

## ВЫБОР РЕЖИМА ПРОДОЛЖЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА

**В.В. Коробицын, Ю.В. Фролова**

Предлагается решение задачи поиска точки пересечения траектории динамической системы с двумя поверхностями разрыва. Приведены алгоритмы вычисления точки пересечения и способ выбора режима продолжения решения после пересечения. Рассмотрены случаи пересечения и скольжения траектории вдоль одной и двух поверхностей.

### Введение

Динамические системы с клеточной структурой, описываемые с использованием двух поверхностей разрыва, могут иметь особый режим — скольжение вдоль их пересечения. При численном решении таких систем необходимо выполнить четыре этапа: 1) найти точку пересечения траектории решения с пересечением поверхностей; 2) определить режим продолжения решения; 3) обеспечить вычисления скользящей траектории; 4) найти точку схода со скольжения. В данной статье рассмотрены этапы 1 и 2.

### 1. Динамическая система с двумя поверхностями разрыва

Рассмотрим динамическую систему в пространстве  $R^n$  с двумя поверхностями разрыва  $S_1 = \{x \in R^n : g_1(x) = 0\}$ ,  $S_2 = \{x \in R^n : g_2(x) = 0\}$ ,  $g_1(x), g_2(x)$  — непрерывные функции. В общем случае две поверхности разбивают пространство на четыре области в  $R^n$ , хотя некоторые из них могут быть вырожденными или совпадать. Запишем систему в общем виде

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} f_{1,1}(t, x) & \text{при } g_1(x) < 0, g_2(x) < 0, \\ f_{-1,1}(t, x) & \text{при } g_1(x) > 0, g_2(x) < 0, \\ f_{1,-1}(t, x) & \text{при } g_1(x) < 0, g_2(x) > 0, \\ f_{-1,-1}(t, x) & \text{при } g_1(x) > 0, g_2(x) > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $f_{1,1}(t, x)$ ,  $f_{-1,1}(t, x)$ ,  $f_{1,-1}(t, x)$ ,  $f_{-1,-1}(t, x)$  — непрерывные функции. В этой системе может реализовываться режим скольжения вдоль двух поверхностей

разрыва одновременно. Точнее, скольжение вдоль кривой  $\gamma = \{x \in R^n : g_1(x) = g_2(x) = 0\}$  пересечения двух поверхностей разрыва. Это выполняется, если верна система неравенств:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f_{1,1}-f_{-1,1}}(g_1)(x) &< 0, \\ \mathcal{L}_{f_{1,-1}-f_{-1,-1}}(g_1)(x) &< 0, \\ \mathcal{L}_{f_{1,1}-f_{1,-1}}(g_2)(x) &< 0, \\ \mathcal{L}_{f_{-1,1}-f_{-1,-1}}(g_2)(x) &< 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если траектория не проходит вблизи кривой  $\gamma$ , то можно использовать алгоритм из [12]. Однако если траектория пересекает кривую или проходит в непосредственной близости от нее, то характер поведения алгоритма качественно меняется. Необходимо рассмотреть два принципиально разных случая (рис. 1): а) траектория из области непрерывности попадает на кривую пересечения поверхностей; б) траектория скользила по одной из поверхностей и попала на пересечение с другой.

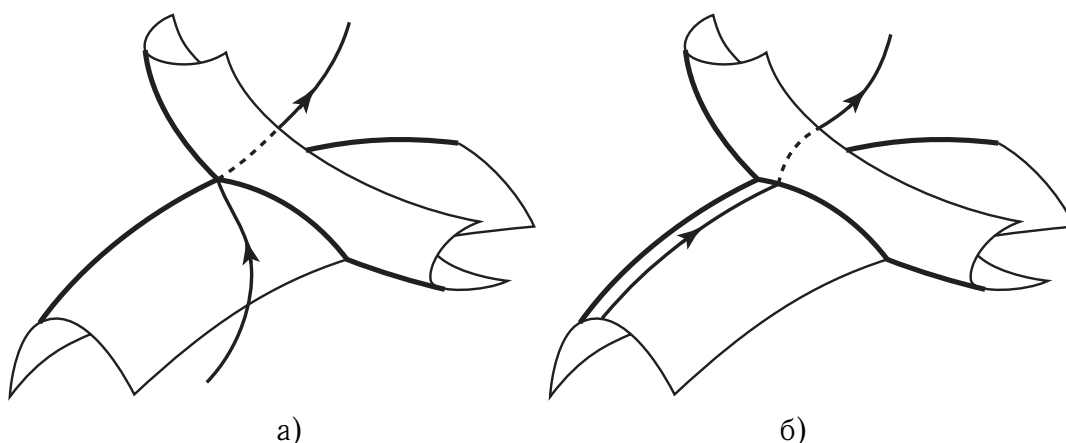


Рис. 1. Траектория решения попадает на пересечение поверхностей разрыва:  
а) из непрерывного режима; б) из скольжения по одной из поверхностей

В первом случае, при вычислении очередной точки детектировано пересечение сразу двух поверхностей разрыва. Это возможно только в том случае, если траектория проходит через точку пересечения поверхностей или очень близко к ней. Для нахождения точек пересечения кривой решения с поверхностями разрыва (будем считать, это точки разные, хотя они могут и совпадать) применим следующий алгоритм.

**Алгоритм А.** Вычисляются точки пересечения траектории с кривой  $\gamma$  и определяется режим продолжения вычисления решения.

1. Вычислить шаги  $h_1, h_2$  до поверхностей  $S_1, S_2$ . Взять  $h = \min\{h_1, h_2\}$ .
2. Выполнить шаг  $h$  методом Рунге—Кутты и построить интерполяционный полином Ньютона по полученным опорным точкам.

3. Продолжить полином вплоть до пересечения с поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ . Найти точки  $A_1, B_1$  и  $A_2, B_2$ , приближающие точки пересечения полинома с поверхностями (рис. 2-а). (Однако если при нахождении точек итерационный метод не дал приемлемого результата для второй поверхности, то из точек  $A_1, B_1$  необходимо шагнуть обычным способом, а затем, если определится пересечение, повторить процедуру. Если же все 4 точки найдены с удовлетворительной погрешностью, то следует продолжить решение из точек  $A_2, B_2$ .)
4. Используя точки  $A_2, B_2$  (или  $A_1, B_1$ , если  $A_2, B_2$  отбросили), определить режим дальнейшего решения задачи. Если векторы функций правой части в этих точках направлены к поверхности, то режим скольжения вдоль этой поверхности, если в одном направлении от неё, то непрерывный режим из соответствующей точки. Если оба вектора направлены от поверхности и в разные стороны, то режим неединственного решения. Далее продолжаем решение согласно выбранному режиму.

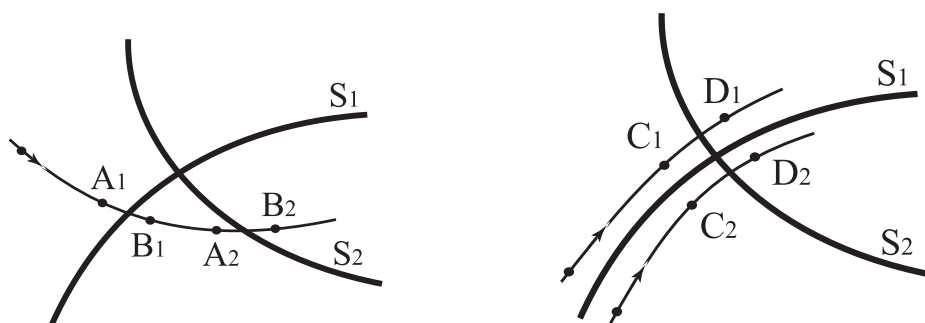


Рис. 2. Точки пересечения кривой решения с двумя поверхностями разрыва: а) в непрерывном режиме; б) в скользящем режиме

Алгоритм А разбирает случай, когда траектория из непрерывной области попадает на кривую пересечения поверхностей разрыва или проходит очень близко от неё.

Теперь разберём случай, когда траектория скользила вдоль одной поверхности и пошла на пересечение с другой.

**Алгоритм Б.** Вычисляются точки пересечения двух скользящих траекторий вдоль  $S_1$  с поверхностью  $S_2$ .

1. Вычислить шаги  $h_1$  и  $h_2$  до пересечения траекторий с поверхностью  $S_2$ . (Траекторий две, поскольку в скользящем режиме мы используем две по разные стороны от поверхности.) Выбрать  $h = \min\{h_1, h_2\}$ .
2. Сделать шаг  $h$  вдоль  $S_1$  и построить два полинома  $N_1(\theta)$  и  $N_2(\theta)$  для обеих траекторий.
3. С помощью итерационной процедуры найти точки пересечения кривых  $x = N_1(\theta)$  и  $x = N_2(\theta)$  с поверхностью  $S_2$ . Получим точки  $C_1, D_1$  и  $C_2, D_2$  (рис. 2-б).

4. Используя значения функций правой части в точках  $C_1, D_1, C_2, D_2$ , определяем дальнейшее поведение траектории.

Для определения поведения траектории после достижения кривой  $\gamma$  введём следующие векторы:

$$p_1 = \frac{\text{pr}_{S_1} f(C_1) + \text{pr}_{S_1} f(C_2)}{2}, \quad p_2 = \frac{\text{pr}_{S_2} f(C_1) + \text{pr}_{S_2} f(D_1)}{2},$$

$$p_3 = \frac{\text{pr}_{S_1} f(D_1) + \text{pr}_{S_1} f(D_2)}{2}, \quad p_4 = \frac{\text{pr}_{S_2} f(D_2) + \text{pr}_{S_2} f(C_2)}{2}.$$

Согласно полученным векторам  $p_1, p_2, p_3, p_4$  заполним кодовое слово  $W$ , состоящее из 4 бит, по следующему правилу. Каждый  $i$ -ый бит равен 0, если  $p_i$  направлен в сторону кривой  $\gamma$ , и 1 в противном случае.

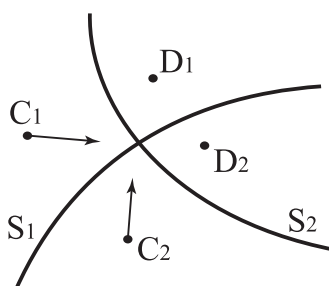


Рис. 3. Расположение точек  $C_1, C_2, D_1, D_2$

Кодовое слово  $W$  может принимать 16 различных значений. Получаем 16 различных вариантов выбора режима продолжения решения.

- 0000 все векторы направлены к поверхностям  $S_1$  и  $S_2$ . Тогда переходим в режим скольжения вдоль обеих поверхностей  $S_1$  и  $S_2$ .
- 0001 0010 0100 1000 один из векторов направлен от кривой пересечения. Тогда переходим в скользящий режим вдоль соответствующей поверхности. Например, в случае 0001 переходим в режим скольжения вдоль поверхности  $S_1$  из точек  $C_1, C_2$ .
- 0011 0110 1100 1001 два смежных вектора направлены от кривой  $\gamma$ . Тогда продолжаем в непрерывном режиме из соответствующей клетки. Например, в случае 0011 продолжаем из точки  $C_1$ .
- 0101 1010 два противоположных вектора направлены от кривой  $\gamma$ . Тогда траектория продолжается в скользящем режиме по соответствующей поверхности, причём в направлении вектора с большей длиной. Например, в случае 0101 траектория будет скользить вдоль поверхности  $S_1$ . Причём если  $|p_1| > |p_3|$ , то в направлении вектора  $p_1$  из точек  $C_1, C_2$ . Если  $|p_1| < |p_3|$ , то в направлении вектора  $p_3$  из точек  $D_1, D_2$ . А если  $|p_1| = |p_3|$ , то неустойчивое скольжение вдоль кривой  $\gamma$ .

0111 1011 1101 1110 только один из векторов направлен к кривой  $\gamma$ . Тогда сравниваем длины смежных с ним векторов и продолжаем в непрерывном режиме в соответствующей клетке. Например, в случае 0111 сравниваем вектора  $p_1$  и  $p_3$ . Если  $|p_1| > |p_3|$ , то продолжаем в непрерывном режиме из точки  $C_1$ . Если  $|p_1| < |p_3|$ , то продолжаем в непрерывном режиме из точки  $D_1$ . Если  $|p_1| = |p_3|$ , то продолжаем в неустойчивом скользящем режиме вдоль поверхности  $S_2$  из точек  $C_1, D_1$ .

1111 все вектора направлены от кривой  $\gamma$  (неустойчивое состояние). Тогда продолжаем в непрерывном режиме из соответствующей точки или в неустойчивом скользящем режиме.

Необходимо сделать уточнение по первому случаю – траектория пересекает две поверхности вблизи их точки пересечения.

Если при определении пересечений с  $S_1$  и  $S_2$  получилось так, что  $A_1$  и  $A_2$  находятся по одну сторону от  $S_1$  и  $S_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  по другую сторону, то это соответствует описанному выше случаю. Необходимо рассматривать только две точки.

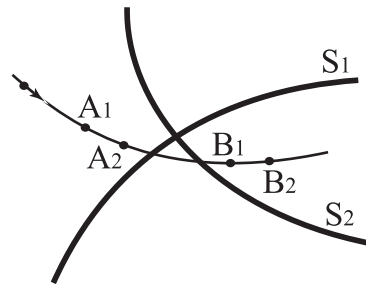


Рис. 4. Пересечение траекторией одновременно двух поверхностей

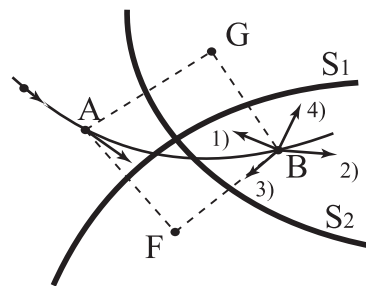


Рис. 5. Определение вспомогательных точек  $F$  и  $G$

В точке  $A$  вектор функций правой части направлен к  $S_1$  и  $S_2$ , необходимо изучить вектор функций правой части для точки  $B$ .

1. Если к  $S_1$  и  $S_2$  в точке  $B$ , то точку пересечения можно считать стационарной и завершить вычисления в средней точке.

2. Если от  $S_1$  и  $S_2$  в точке  $B$ , то продолжить решение в непрерывном режиме из точки  $B$ .
3. Если от  $S_1$  и к  $S_2$  в точке  $B$ . Необходимо найти точку  $F$ , лежащую по другую сторону от  $B$  относительно  $S_2$  и от  $A$  относительно  $S_1$ . Если вектор функций правой части в точке  $F$  направлен к  $S_2$ , то определяем среднее значение проекций в точках  $B$  и  $F$  на  $S_2$ . Если этот вектор направлен к  $S_1$ , то найдена стационарная точка, иначе переходим в скользящий режим по поверхности  $S_2$  из точек  $B$  и  $F$ . Если в точке  $F$  вектор направлен от  $S_2$ , то продолжаем решение в непрерывном режиме из точки  $F$  (когда от  $S_1$ ?). Однако если вектор в точке  $F$  направлен от  $S_2$  и к  $S_1$ , то определяем среднее значение проекций вектор функций правой части в точках  $A$  и  $F$  на  $S_1$ . Если она направлена к  $S_2$ , то найдена стационарная точка, а если от  $S_2$ , то переходим в скользящий режим по поверхности  $S_1$  из точек  $A$  и  $F$ .
4. Если к  $S_1$  и от  $S_2$  в точке  $B$ . Необходимо найти точку  $G$ , лежащую по другую сторону от  $B$  относительно  $S_1$  и от  $A$  относительно  $S_2$ . Если вектор функций правой части в точке  $G$  направлен к  $S_1$ , то определяем среднее значение проекций в точках  $B$  и  $G$  на  $S_1$ . Если этот вектор направлен к  $S_2$ , то найдена стационарная точка, иначе переходим в скользящий режим по поверхности  $S_1$  из точек  $B$  и  $G$ . Если в точке  $G$  вектор направлен от  $S_1$ , то продолжаем решение в непрерывном режиме из точки  $G$  (когда от  $S_2$ ?). Однако если вектор в точке  $G$  направлен от  $S_1$  и к  $S_2$ , то определяем среднее значение проекций вектор функций правой части в точках  $A$  и  $G$  на  $S_2$ . Если она направлена к  $S_1$ , то найдена стационарная точка, а если от  $S_1$ , то переходим в скользящий режим по поверхности  $S_2$  из точек  $A$  и  $G$ .

## Заключение

Предложенные алгоритмы позволяют осуществлять следующие операции: 1) поиск точки пересечения траектории из непрерывного режима с пересечением двух поверхностей разрыва (алгоритм А); 2) поиск точки пересечения скользящей вдоль одной поверхности траектории со второй поверхностью разрыва (алгоритм Б); 3) выбрать режим продолжения решения после достижения пересечения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М. : Наука, 1985. 224 с.
2. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М. : Наука, 1981. 368 с.

3. Dieci L., Lopez L. Sliding Motion in Filippov Differential Systems: Theoretical Results and A Computational Approach. URL: <http://www.math.gatech.edu/~dieci/preps/DL-Fili.pdf> (дата обращения 01.03.2009).
4. Enright W.H., Jackson K.R., Norsett S.P., Thomsen P.G. Effective solution of discontinuous IVPs using a Runge-Kutta formula pair with interpolants // Numerical Analysis Rep. 113. Univer of Manchester, Jan. 1986.
5. Gear C.W., Osterby O. Solving ordinary differential equations with discontinuities // ACM Trans. Math. Software. 1984. Vol. 10. P. 23–44,
6. Park T., Barton P.I. State event location in differential-algebraic models // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation. 1996. Vol. 6, N 2. P. 137–165.
7. Piironen P.T., Kuznetsov Yu.A. An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions // ACM Trans. Math. Software. 2008. V. 34, N 13. С. 1–24.
8. Shampine L.F., Thompson S. Event location for ordinary differential equations // Computer and Mathematics with Application. 2000. Vol. 39. P. 43–54.
9. Коробицын В.В., Фролова Ю.В. Алгоритм численного решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Математические структуры и моделирование. 2005. Вып. 15. С. 46–54.
10. Коробицын В.В., Маренич В.Б., Фролова Ю.В. Исследование поведения явных методов Рунге-Кутты при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Математические структуры и моделирование. 2007. Вып. 17. С. 19–25.
11. Коробицын В.В., Фролова Ю.В., Маренич В.Б. Алгоритм численного решения кусочно-сшитых систем // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, N 2. С. 70–81.
12. Коробицын В.В., Фролова Ю.В. Алгоритм вычисления скользящего режима для системы с гладкой границей разрыва // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, N 2. С. 56–72.