

МОДЕЛИ МОНИТОРИНГА ПОЛОСЫ С ВНЕШНИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ СЕНСОРНЫХ ДАТЧИКОВ

С.Н. Астраков

Рассматриваются модели мониторинга полосы заданной ширины при помощи сенсорных сетей. Сенсорная сеть представляется круговым покрытием: каждый круг — это область действия сенсора, находящегося в центре. Решается задача нахождения наименее плотного покрытия полосы кругами одного, двух и трёх радиусов действия. Специальным требованием для покрытия является то, что центры кругов не должны находиться внутри полосы (внешний мониторинг). Предложены различные эффективные модели покрытий и определены их характеристики.

Введение



С.Н. Астраков. 2008

Модели регулярных покрытий плоскости различными кругами и различными структурами их расположения рассматривались, например, в [1–5]. Достоинством покрытия является не только его малая плотность, но и его конструктивность: простое построение решётки покрытия и не очень большое различие между размерами различных кругов. Так, в [3] исследуются сравнительные характеристики моделей с треугольной и квадратной структурой расположения кругов. В [4] определена нижняя граница плотности покрытия $d \approx 1.018955$ кругами двух видов без ограничения на соотношение между размерами кругов.

Точнее, доказано существование этой нижней границы и найден способ вычисления её с любой заданной точностью. Отметим, что нам удалось получить точное аналитическое значение этого показателя:

$$d = 2\pi/\sqrt{27}(1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}(\pi/6 - \sqrt{27}/12)) \approx 1.018955892.$$

Это очень важно, так как ссылка на приближённое значение не совсем корректна. В ближайшее время доказательство этой формулы будет опубликовано в отдельной работе. В [5] определены нижние границы плотности покрытий при заданном соотношении $q \geq 1$ между площадями большого и маленького кругов, участвующих в покрытии плоскости. Указанный выше результат из [4] предполагает, что значение q достаточно большое. Для практического применения такая модель малополезна. При построении сенсорных покрытий, как правило,

стараятся сделать этот показатель как можно ближе к единице. В определённом смысле проблема нахождения наименее плотных покрытий является более сложной и интересной по сравнению с проблемой упаковок, так как соседние круги могут в различной степени накладываться друг на друга. Кроме того, задачи о покрытиях тесно связаны с приложениями к мониторингу различных областей сенсорными сетями, что в настоящее время очень актуально. При мониторинге реальных объектов приходится учитывать его форму, площадь и протяжённость границы. Необычный результат приведён в [6], в котором утверждается, что для покрытия любой простой связной области с площадью a и периметром p достаточно $n = 2a/\sqrt{27} + 2p/(\pi\sqrt{3} + 1)$ единичных кругов. В [7] приведены наименее плотные и удобные для приложений модели покрытия полосы кругами различных радиусов, в которых строго учитываются граничные эффекты. В данной работе мы проводим похожие исследования, но с требованием внешнего мониторинга области. Это означает, что по некоторым причинам «недоступности» мы не можем располагать сенсорные устройства внутри контролируемой области.

Работа построена следующим образом. В разд. 1 получены предварительные результаты, касающиеся общих свойств внешних покрытий и их связи с покрытиями плоскости. Там же предложена классификация регулярных покрытий. В разд. 2 рассмотрены два оптимальных варианта покрытий кругами одного радиуса, равных по плотности, но различающихся по структуре. В разд. 3 и 4 исследованы, соответственно, несколько моделей покрытий кругами двух и трёх радиусов. В разд. 5 приведена сводная таблица результатов и сделан краткий анализ рассмотренных моделей покрытий.

1. Предварительные результаты

Рассмотрим прямолинейную полосу SP шириной h , покрытую кругами:

$$SP \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i,$$

где I — счётное множество чисел, S_i — круги покрытия, R_i — их радиусы.

Далее рассматриваются только регулярные круговые покрытия, определённые следующим образом. Пусть F_j — одинаковые фрагменты (плитки), составляющие полосу:

$$SP = \bigcup_{j \in J} F_j, \quad \mu(F_{j_1} \cap F_{j_2}) = 0 \quad \text{для любых } j_1, j_2 \in J,$$

где μ — мера площади, J — множество номеров фрагментов покрытия. Другими словами, соседние плитки могут иметь только общие граничные участки. Выделенный фрагмент F покрывается конечным набором кругов, а все другие фрагменты покрываются точно таким же набором кругов, что формально определяется изометрическими преобразованиями плоскости T_j :

$$F \subseteq \bigcup_{m=1}^k S_m, \quad F_j = T_j(F), \quad F_j \subseteq T_j\left(\bigcup_{m=1}^k S_m\right), \quad j \in J. \quad (1)$$

Для регулярного покрытия полосы корректно определяется его плотность

$$D = \mu\left(\bigcup_{m=1}^k S_m\right) / \mu(F).$$

Полоса покрыта *внешним образом*, если центры кругов покрытия лежат вне полосы или на её границе. При исследовании конкретных моделей дополнительно оговариваются ограничения на количество разных размеров кругов и особенности расположения центров этих кругов в данном типовом фрагменте. В общем виде формулируется

Проблема. Для данной прямолинейной полосы SP шириной h и некоторого подходящего типового фрагмента F , удовлетворяющего условию (1), найти регулярное круговое покрытие полосы наименьшей плотности D при некоторых известных ограничениях на систему кругов покрытия.

При решении задачи о покрытии полосы внешним образом верны следующие очевидные утверждения.

Лемма 1. У покрытия полосы минимальной плотности центры кругов располагаются на границе полосы (условие L1).

Лемма 2. Каждое регулярное покрытие полосы внешним образом с условием L1 определяет регулярное покрытие всей плоскости, получающегося многократным отражением исходного покрытия полосы относительно её границ. При этом плотность покрытия полосы в два раза больше соответствующей плотности покрытия плоскости.

Поясним последнее утверждение с помощью рис. 1. Каждый круг «участвует» в покрытии полосы только своей половинкой. Соответствующее покрытие плоскости использует полные круги.

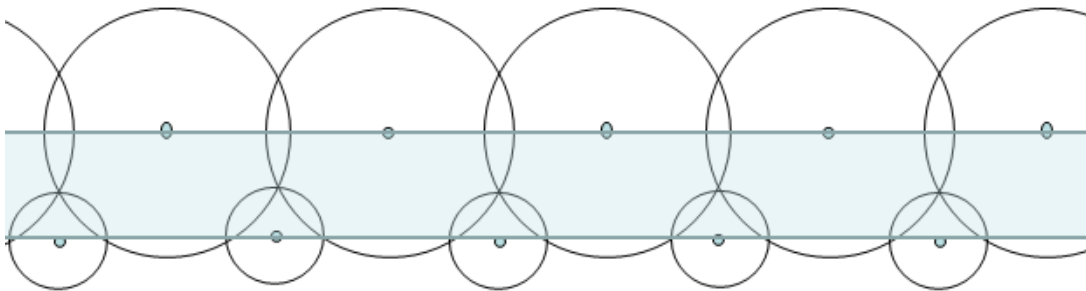


Рис. 1. Пример регулярного покрытия полосы внешним образом

Из леммы 2 следует, что все эффективные покрытия полосы внешним образом для каждого отдельного класса могут быть найдены из соответствующего оптимального покрытия плоскости. При этом можно использовать известные показатели плотности и важные параметры покрытия.

С другой стороны, не каждое оптимальное покрытие плоскости определённого вида порождает некоторое «хорошее» покрытие полосы. Покрытие плоскости со сложным расположением кругов различных радиусов не позволяет «вырезать» полосу так, чтобы все покрывающие её круги участвовали в покрытии своими половинками.

Будем использовать следующие обозначения для различных классов покрытий.

- (i) Общее обозначение: $\text{Cov}_F(n, k)$, где n — число различных размеров кругов, применяемых в покрытии; k — число различных кругов покрытия типового фрагмента F .
- (ii) Структурное обозначение: $\text{Cov}_F(n : k_1/p_1, k_2/p_2, \dots, k_n/p_n)$, где k_i — число кругов вида i покрытия типового фрагмента F ; p_i — доли кругов вида i , покрывающих фрагмент F .

Удобно предполагать, что фрагмент F является минимальным, т. е. его нельзя разбить на части, которые тоже можно считать фрагментами. Например, для покрытия, изображённого на рис. 1, минимальный фрагмент будет прямоугольный треугольник с равными катетами (рис. 2), а обозначения этого покрытия будут иметь вид: $\text{Cov}_F(2, 2)$ и $\text{Cov}_F(2 : 1_8, 1_8)$. Заметим, что знак дроби во втором обозначении можно убрать. Оба круга, покрывающие фрагмент, участвуют в его покрытии своими восьмыми частями. Другие части этих кругов покрывают такие же фрагменты, которые не изображены на рис. 2.

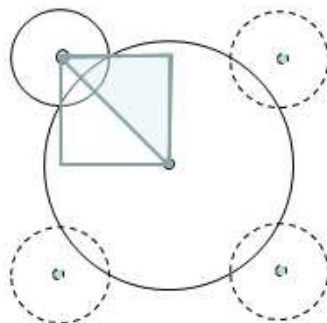


Рис. 2. Минимальный фрагмент покрытия $\text{Cov}_F(2 : 1_8, 1_8)$

Также важно, что при минимальном фрагменте обозначения покрытия полосы и соответствующей плоскости всегда совпадают.

2. Покрытие полосы кругами одного радиуса

Рассмотрим оптимальное покрытие плоскости кругами одного радиуса, имеющую правильную решетку расположения кругов. Легко заметить, что оно порождает два оптимальных покрытия полосы $SA-1(1)$ и $SA-1(2)$ с одинаковыми плотностями, но разными структурами (рис. 3).

Приведём основные характеристики моделей.

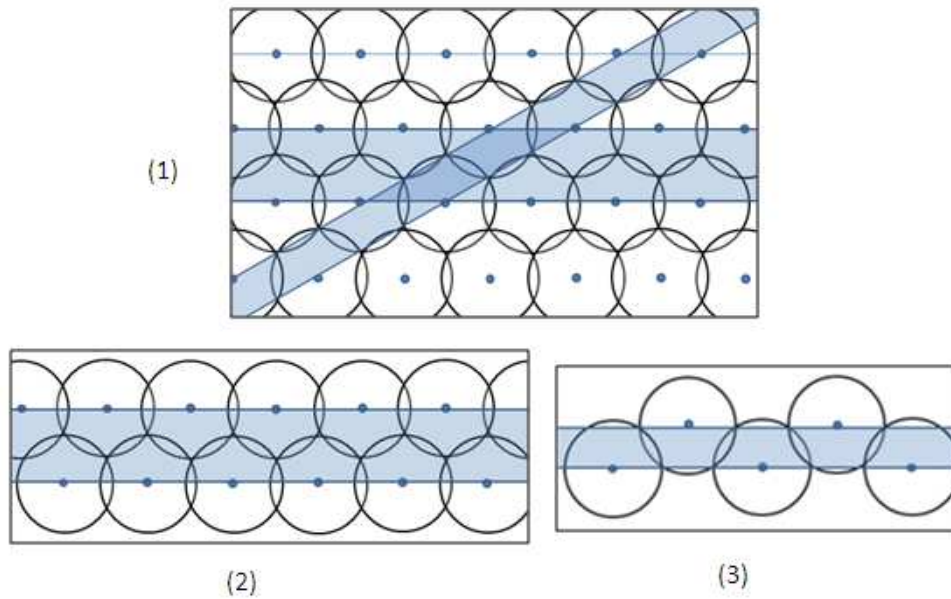


Рис. 3. 1) модель $A-1$ покрытия плоскости кругами одного радиуса и соответствующие модели покрытия полосы: 2) модель $SA-1(1)$, 3) модель $SA-1(2)$

Модель $SA-1(1)$: $D_{SA-1(1)} = 2D_{A-1} = 4\pi/\sqrt{27} \approx 2/4184$, $R = 2h/3 \approx 0.6667h$.

Модель $SA-1(2)$: $D_{SA-1(2)} = 2D_{A-1} = 4\pi/\sqrt{27} \approx 2/4184$, $R = 2h$.

Заметим, что эти результаты можно было бы получить с помощью рассмотрения элементарных фрагментов покрытия, которые при разной укладке в полосе определяют два указанных варианта покрытия. Далее мы продемонстрируем этот метод для более сложных моделей.

3. Покрытие полосы кругами двух радиусов

При покрытии плоскости кругами двух радиусов имеется две конструктивные модели: $A-3$ и $B-3$ (рис. 4). Исследование этих моделей проведено в [5], и мы можем указать основные показатели для них.

Модель $A-3$: $D_{A-3} = \frac{11\pi}{18\sqrt{3}} \approx 1.1084$, $r = R/\sqrt{31} \approx 0.1796R$.

Модель $B-3$: $D_{B-3} = \frac{3\pi}{8} \approx 1.1781$, $r = R/\sqrt{5} \approx 0.4472R$.

Модель $A-3$ порождает единственную эффективную модель $SA-3$ покрытия полосы внешним образом (рис. 5), а модель $B-3$ определяет две модели $SB-3(1)$ и $SB-3(2)$ для покрытия полос разным способом, но с одинаковой плотностью (рис. 6).

Модель $SA-3$: $D_{SA-3} = \frac{11\pi}{9\sqrt{3}} \approx 2.2168$, $R = \frac{h\sqrt{31}}{3\sqrt{3}} \approx 1.0715h$, $r = \frac{h}{3\sqrt{3}} \approx 0.19245h$.

Модель $SB-3(1)$: $D_{SB-3(1)} = \frac{3\pi}{4} \approx 2.3562$, $R = \frac{h\sqrt{5}}{2} \approx 1.1180h$, $r = h/2$.

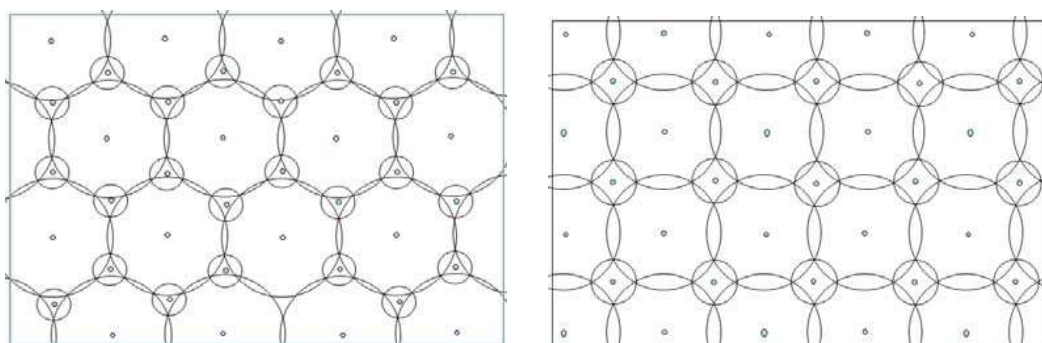


Рис. 4. Модели A-3 и B-3 покрытия плоскости

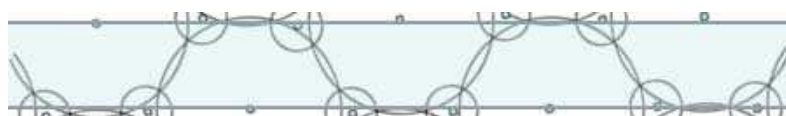


Рис. 5. Модель SA-3 покрытия полосы внешним образом

Модель $SB-3(2)$: $D =_{SB-3(2)} = \frac{3\pi}{4} \approx 2.3562$, $R = \frac{h\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \approx 0.7906h$, $r = \frac{h}{2\sqrt{2}} \approx 0.3536h$.

Проведём расчёты для моделей A-3 и SA-3 через минимальный фрагмент (рис. 7).

Минимальный фрагмент F является прямоугольным треугольником с острыми углами 30 и 60 градусов. Если гипотенуза равна a и угол α определяет взаимное положение кругов покрытия, то $\mu(F) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$, $\mu(S) = \frac{\pi R^2}{12} + \frac{\pi r^2}{6}$, где $R = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$, $r = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha)$. После необходимых расчётов получаем соотношение для плотности покрытия

$$D(\alpha)_{A-3} = \frac{\mu(S)}{\mu(F)} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}(5 + 9 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \left(\left(3 \operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{11}{3} \right).$$

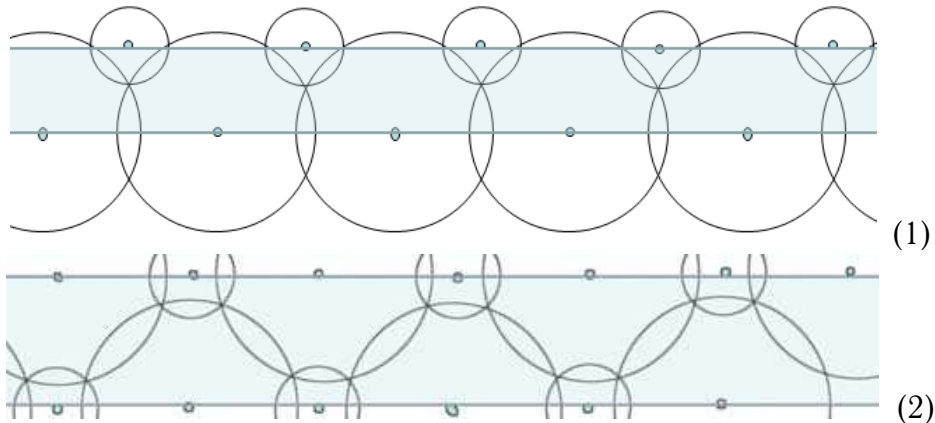
Следовательно,

$$\min D_{A-3} = \frac{11\pi}{18\sqrt{3}} \approx 1.108433, \quad \min D_{SA-3} = \frac{11\pi}{9\sqrt{3}} \approx 2.216866 \text{ при } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Замечание 1. Обозначение покрытия $\operatorname{Cov}_F(2 : 1_{12}, 1_6)$ позволяет определить среднее соотношение между количествами кругов разных размеров: $k_1 : k_2 = \frac{1}{12} : \frac{1}{6} = 1 : 2$. Таким образом, на один большой круг приходится два маленьких круга. Для других классов покрытий это процедура тоже корректна.

4. Покрытие полосы кругами трёх радиусов

Рассмотрим специальное покрытие плоскости кругами трёх радиусов. На рис. 8 изображены элемент этого покрытия и его минимальный фрагмент мо-

Рис. 6. Модели $SB-3(1)$ и $SB-3(2)$ покрытия полосы внешним образом

дель $A-4$ класса $\text{Cov}_F(3 : 1_4, 1_2, 1_2)$. Легко видеть, что такое покрытие плоскости определяет модель $SA-4$ покрытия полосы внешним образом с использованием кругов трёх разных радиусов. Особенность модели состоит ещё и в том, что размер фрагмента (соотношение между катетами прямоугольного треугольника) также является параметром оптимизации. Заметим, что круги большого размера имеют одинаковый радиус, но при оптимальных параметрах покрытия шестиугольник, изображённый на рис. 8, немного растянется вдоль горизонтали. С учётом обозначений фрагмента это значит, что выполняется соотношения для углов: $\alpha > 30^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Проведём расчёты с соответствующими пояснениями. Для удобства считаем сторону BC равной a (для полосы это будет ширина h). Тогда $AC = a \cdot \text{ctg } \alpha$, $AB = a / \sin \alpha = 2R \cos \varphi$. Из последнего соотношения получаем выражение для большого радиуса $R = \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \varphi}$.

Из треугольника BCK получаем, что $\cos \omega = a/R$. Следовательно,

$$\omega = \arccos \frac{a}{R} = \arccos(2 \sin \alpha \cos \varphi).$$

Если L является центром маленького круга, то $\angle CBL = \omega + (\gamma - \omega)/2 = (\omega + \gamma)/2$. Далее определяем малый радиус

$$\rho = a \cdot \text{tg } \angle CBL - a \cdot \text{tg } \omega = a((\omega + \gamma)/2 - \text{tg } \omega).$$

Найдём выражение для среднего радиуса r как расстояние между точками M и N . Легко видеть, что

$$x_M = a, \quad y_m = a \cdot \text{tg } \angle CBM = a \cdot \text{tg} \left(\frac{\beta - \varphi}{2} + \gamma \right) = a \cdot \text{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha - \varphi}{2} + \gamma \right),$$

$$\begin{aligned} x_N &= R \cos(\beta - \varphi) = R \cos(90^\circ - \alpha - \varphi) = \frac{a}{2} \sin \alpha \cos \varphi \sin(\alpha + \varphi) \\ &= \frac{a}{2} (1 + \text{ctg } \alpha \cdot \text{tg } \varphi), \end{aligned}$$

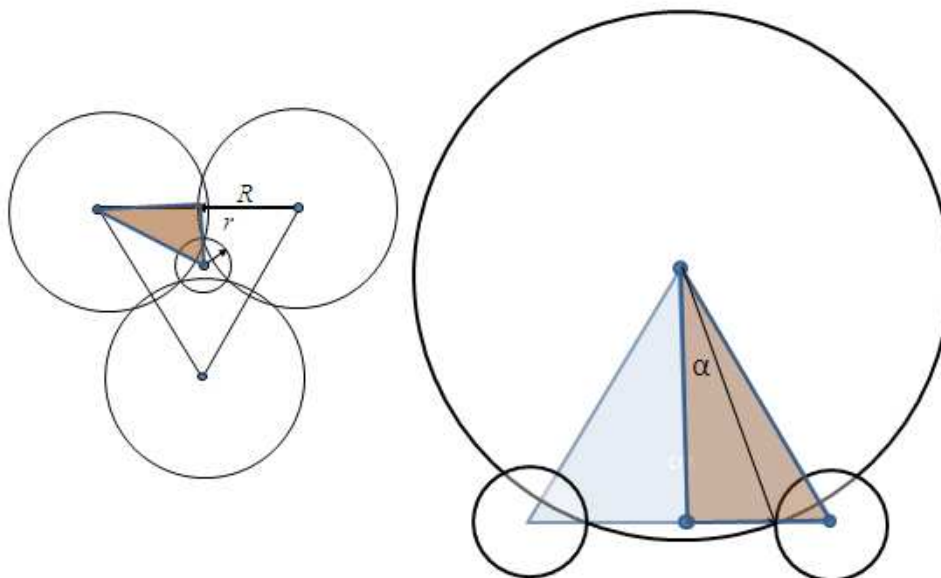


Рис. 7. Фрагменты моделей $A-3$ и $SA-3$ из класса $Cov_F(2 : 1_{12}, 1_6)$

$$y_N = R \operatorname{tg}(\beta - \varphi) = R \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi) = \frac{a \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{2 \sin \alpha \cos \varphi},$$

$$r^2 = a^2 \left(\left(1 - \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{2} \right)^2 + \left(\operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha - \varphi}{2} + \gamma \right) - \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha \cos \varphi} \right)^2 \right).$$

С учётом того, что $\mu(S) = \frac{\pi R^2}{4} + \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi \rho^2}{2}$, $\mu(F) = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha$, получаем выражение для плотности покрытия $D(\alpha, \varphi, \gamma) = D_1 + D_2 + D_3$, где

$$D_1 = \frac{\pi \cdot \operatorname{tg} \alpha}{8(\sin \alpha \cos \varphi)^2}, \quad D_2 = \pi \cdot \left(\left(1 - \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{2} \right)^2 + \left(\operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha - \varphi}{2} + \gamma \right) - \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha \cos \varphi} \right)^2 \right),$$

$$D_3 = \pi \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\omega + \gamma}{2} \right) - \operatorname{tg} \omega \right)^2, \quad \omega = \arccos(2 \sin \alpha \cdot \cos \varphi).$$

После определения экстремума для функции плотности покрытия получаем следующие оптимальные параметры:

$$\min D_{A-4} \approx 1.0928276, \quad \min D_{SA-4} \approx 2.186555 \text{ при } \alpha \approx 29.79^\circ, \quad \beta \approx 60.21^\circ,$$

$$R \approx 1.0644a, \quad r \approx 0.2003a, \quad \rho \approx 0.0305a.$$

Рассмотрим ещё одно покрытие плоскости кругами трёх радиусов — модель $B-4$ класса $Cov_F(3 : 1_4, 1_4, 1_2)$. На рис. 9 изображены элемент этого покрытия и его минимальный фрагмент, который является прямоугольником, близким по форме к квадрату. Структурные свойства этого покрытия также позволяют определить модель $SB-4$ покрытия полосы внешним образом с использованием кругов трех разных радиусов.

Проведём расчёты, используя обозначения рис. 9. Из прямоугольного треугольника с углом α получаем $R = h / \cos \alpha$. Аналогично из прямоугольного

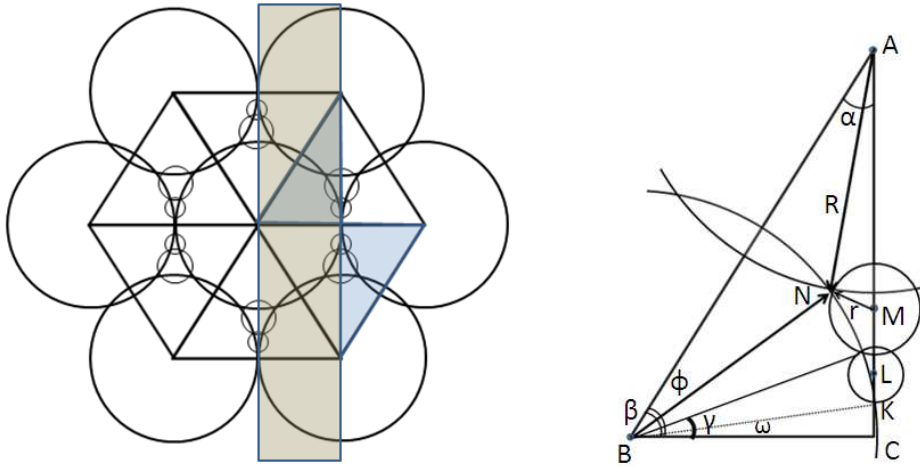


Рис. 8. Элемент покрытия плоскости кругами трёх радиусов и структура его минимального фрагмента $\text{Cov}_F(3 : 1_4, 1_2, 1_2)$

треугольника с углом β получаем выражение для стороны прямоугольника $AD = R \cdot \cos \beta = h \cdot \beta / \cos \alpha$. Следовательно, можно определить площадь фрагмента $\mu(F) = h^2 \cos \beta / \cos \alpha$.

Далее, проведём вычисления для двух других радиусов:

$$r = h - R \sin \beta = h(1 - \sin \beta / \cos \alpha), \quad \rho = h \cdot \operatorname{tg} \varphi - h \cdot \operatorname{tg} \alpha = h \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha).$$

Можно показать, что $\varphi = 45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} - \gamma = 45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} - \arccos(\cos \alpha / \cos \beta)$.

Для площади покрытия фрагмента получаем

$$\begin{aligned} \mu(S) = \pi \left(\frac{R^2}{4} + \frac{r^2}{4} + \frac{\rho^2}{2} \right) &= \frac{h^2 \pi}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \left(1 - \frac{\sin^2 \beta}{\cos \alpha} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} - \arccos(\cos \alpha / \cos \beta) \right) - \operatorname{tg} \alpha \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Это позволяет записать функцию плотности покрытия

$$\begin{aligned} D(\alpha, \beta) = \frac{\mu(S)}{\mu(F)} &= \frac{\pi \cdot \cos \alpha}{4 \cos \beta} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \left(1 - \frac{\sin^2 \beta}{\cos \alpha} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} - \arccos(\cos \alpha / \cos \beta) \right) - \operatorname{tg} \alpha \right)^2 \right). \end{aligned}$$

После определения экстремума для функции плотности покрытия, получаем оптимальные параметры

$$\begin{aligned} \min D_{B-4} \approx 1.15453, \quad \min D_{SB-4} \approx 2.30906 \quad \text{при } \alpha \approx 16.56^\circ, \beta \approx 30.4221^\circ, \\ R \approx 1.043265, r \approx 0.471695, \rho \approx 0.075886. \end{aligned}$$

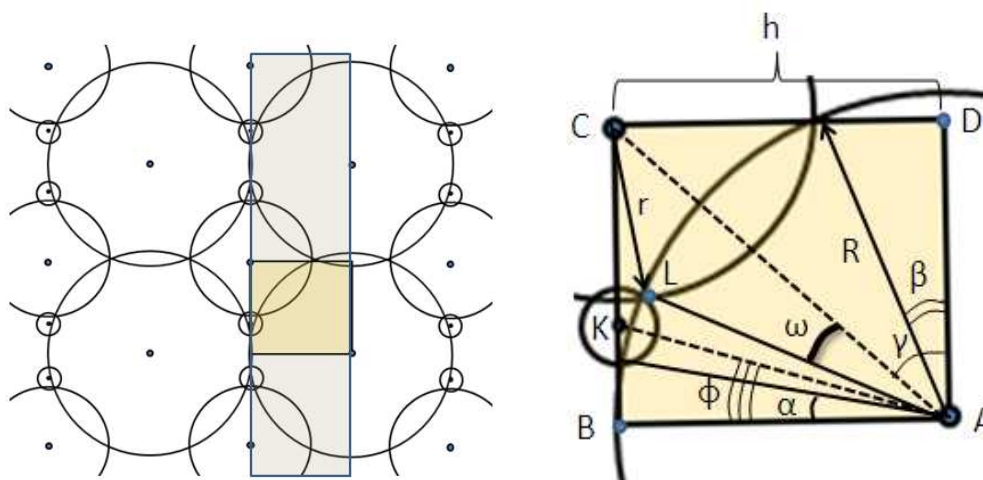


Рис. 9. Элемент покрытия плоскости кругами трех радиусов и структура его минимального фрагмента $Cov_F(3 : 1_4, 1_4, 1_2)$

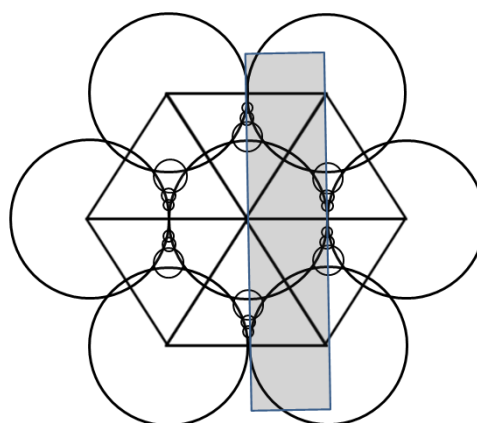


Рис. 10. Элемент покрытия плоскости и полосы кругами четырёх $Cov_F(4 : 1_4, 1_2, 1_2, 1_2)$

Замечание 2. При сравнении построенных моделей покрытий полосы внешним образом можно заметить, что при добавлении нового размера круга мы используем обобщение предыдущих моделей. По этой причине можно утверждать, что нами рассмотрены все рациональные покрытия кругами одного, двух и трёх радиусов. При построении моделей с большим числом различных кругов возрастает сложность (рис. 10), но незначительно улучшается плотность.

5. Заключение

В работе рассмотрены восемь моделей покрытия полосы внешним образом, имеющих наилучшие показатели для своего класса. Задача внешнего покрытия областей очень тесно связана с покрытиями плоскостей. В каком-то смысле она более цельная и поиск эффективных вариантов покрытий ведётся на более «компактном» логическом пространстве. Можно заведомо точно указать все возможные варианты определённого класса покрытий для указанных типов

фрагментов и выбрать среди них лучшие. Далее мы приведём сводную таблицу результатов, которая позволяет более наглядно сравнить характеристики рассмотренных моделей круговых покрытий.

Таблица 1. Сводная таблица результатов

№	Модель покрытия полосы	Класс покрытия	Плотность покрытия	Радиусы кругов	Соотношение $(k_1 : k_2)$ или $(k_1 : k_2 : k_3)$
1	$SA-1(1)$	$Cov_F(1 : 1_{12})$	$\min D \approx 2.4184$	$R = 2h/3$	—
2	$SA-1(2)$	$Cov_F(1 : 1_{12})$	$\min D \approx 2.4184$	$R = 2h$	—
3	$SB-3(1)$	$Cov_F(2 : 1_4, 1_4)$	$\min D \approx 2.3562$	$R \approx 1.12h, r = 0.5h$	1 : 1
4	$SB-3(2)$	$Cov_F(2 : 1_4, 1_4)$	$\min D \approx 2.3562$	$R \approx 0.79h, r \approx 0.35h$	1 : 1
5	$SA-3$	$Cov_F(2 : 1_{12}, 1_6)$	$\min D \approx 2.2169$	$R \approx 1.08h, r \approx 0.19h$	1 : 2
6	$SA-4$	$Cov_F(3 : 1_4, 1_2, 1_2)$	$D \approx 2.18306$	$R \approx 1.06h, r \approx 0.20h,$ $\rho \approx 0.03h$	1 : 2 : 2
7	$SB-4$	$Cov_F(3 : 1_4, 1_4, 1_2)$	$D \approx 2.30906$	$R \approx 1.04h, r \approx 0.47h,$ $\rho \approx 0.076h$	1 : 1 : 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Wu J., Yang S. Energy-efficient node scheduling models in sensor networks with adjustable ranges // Int. J. Foundations of Computer Science. 2005. V. 6, N. 1. P. 3–17.
2. Cardei M. Improving network lifetime using sensors with adjustable sensing ranges // Int. J. Sensor Networks. 2006. V. 1. P. 41–49.
3. Zalubovsky V., Astrakov S., Erzin A., Choo H. Energy-efficient area coverage by sensors with adjustable ranges // Sensors. 2009. V. 9, N. 4. P. 2446–2460.
4. Toth G.F. Covering the plane with two kinds of circles // Discrete Comput. Geom. 1995. V. 13. P. 445–457.
5. Florian A. Uberdeckungen der ebener durch kreise // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1961. Bd. 31. S. 77–86.
6. Hadwiger H. Uberdeckungen ebener bereiche durch kreise und quadrate // Comment. Math. Helv. 1940–1941. Bd. 13. P. 195–200.
7. Erzin A., Astrakov S. Min-density stripe covering and applications in sensor networks // ICCSA, Part III. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2011. P. 152–162.