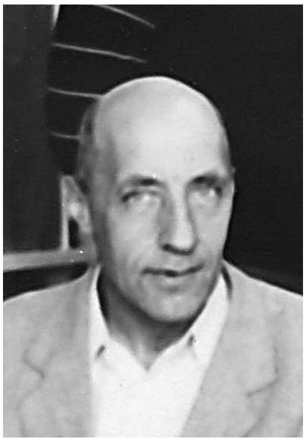
*Математические структуры и моделирование*
*2012, вып. 25, с. 66–69*

УДК 530.145

# МАТРИЦЫ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА КАК ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

**Ю.Е. Боровский**

Показано, что матрицы конечного порядка могут быть представлены как псевдодифференциальные операторы с символом Вейля. Коммутационные соотношения Вейля для операторов координат и импульсов становятся тогда соотношениями между матрицами конечного порядка. Утверждается, что таким образом квантовая механика может быть изложена с помощью матриц конечного порядка. В замечании 3 указываются возможные приложения к квантовой теории поля.



**Ю.Е. Боровский. 1983**

Мне приходилось слышать, что квантовую механику нельзя построить с помощью матриц конечного порядка, но я в это не верю. То, что коммутационные соотношения $\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i$ для операторов координат и импульсов, если под $\hat{q}$ и $\hat{p}$ понимать матрицы конечного порядка, приводят после взятия следа от обеих частей равенства к противоречию, — верно, но в таком виде коммутационные соотношения обычно не пишут, а пишут в форме Вейля

$$e^{u\hat{q}}e^{v\hat{p}} = e^{v\hat{p}}e^{u\hat{q}}e^{iuv}. \qquad (1)$$

В такой форме коммутационные соотношения можно записать с помощью псевдодифференциальных операторов, действующих как матрицы конечного порядка, что и сделано ниже (о псевдодифференциальных операторах см. [1]).

Изложение будет вестись для случая одной переменной. Случай нескольких переменных получается отсюда переосмысливанием обозначений. Так под $q, p$ следует понимать $q = (q_1, ..., q_m)$, $p = (p_1, ..., p_m)$, $pq = p_1q_1 + ... + p_mq_m$, в формулах (2)-(13) вместо $M^{-1}$ писать $M^{-m}$ и т.д.

Пусть $M \geq 3$ — нечётное целое число, $\varepsilon$ — первообразный корень степени $M$ из единицы, например $\varepsilon = exp(2\pi i/M)$, $\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\Re = \mathbf{Z}/M\mathbf{Z}$ — кольцо вычетов по модулю $M$. В кольце $\Re$ число 2 — делитель единицы.

В $\mathbb{C}$-линейном пространстве комплекснозначных функций, заданных на $\Re = \mathbf{Z}/M\mathbf{Z}$, определим линейный оператор $A = a(\hat{q}, \hat{p})$ с символом Вейля $a(q, p)$


Бостон (США)
E-mail: sciftan@hotmail.com

формулой

$$(Af)(q) = M^{-1} \sum_{p',q' \in \Re} a\left(\frac{q+q'}{2}, p'\right) \varepsilon^{p'(q-q')} f(q'). \tag{2}$$

Этому оператору соответствует комплексная $M \times M$ матрица

$$K(q_1, q_2) = M^{-1} \sum_{p' \in \Re} a\left(\frac{q_1+q_2}{2}, p'\right) \varepsilon^{p'(q_1-q_2)}. \tag{3}$$

Так что

$$(Af)(q) = \sum_{q' \in \Re} K(q, q') f(q').$$

Формула (3) устанавливает изоморфизм $M^2$-мерного $\mathbb{C}$-линейного пространства символов Вейля $a(q,p)$ и $M^2$-мерного $\mathbb{C}$-линейного пространства комплексных $M \times M$ матриц. Действительно, положим $q = (q_1+q_2)/2$, $\xi = q_1 - q_2$. Умножая обе части (3) на $\varepsilon^{-p\xi}$ и суммируя по $\xi \in \Re$, получим

$$a(q,p) = \sum_{\xi \in \Re} K\left(q + \frac{\xi}{2}, q - \frac{\xi}{2}\right) \varepsilon^{-p\xi}. \tag{4}$$

Обратно, из (4) следует (3)

В $\mathbb{C}$-линейном пространстве комплекснозначных функций, заданных на $\Re$, введём эрмитово скалярное произведение $(f_1, f_2)$, положив

$$(f_1, f_2) = M^{-1} \sum_{q \in \Re} f_1(q) \overline{f}_2(q). \tag{5}$$

Легко проверяется, что оператор $A^+$, сопряжённый оператору $A$ относительно скалярного произведения (5), имеет символ Вейля $\overline{a(q,p)}$ (здесь $\overline{f}_2(q)$, $\overline{a(q,p)}$ — функции, комплексно сопряжённые $f_2(q)$, $a(q,p)$).

Пусть $n$ — чётное натуральное число, $A_k$, $k = 1, 2, ..., n$ — операторы вида (2) с символами Вейля $a_k(q,p)$, $A = A_n \circ A_{n-1} \circ ... \circ A_1$ — композиция операторов $A_k$, $a = a_n * a_{n-1} * ... * a_1$ — символ Вейля оператора $A$. По определению композиции операторов

$$M^{-1} \sum_{p_{n+1} \in \Re} a\left(\frac{q_{n+1}+q_1}{2}, p_{n+1}\right) \varepsilon^{p_{n+1}(q_{n+1}-q_1)} =$$

$$= M^{-n} \sum_{p_n, q_n, ..., p_2, q_2, p_1 \in \Re} a_n\left(\frac{q_{n+1}+q_n}{2}, p_n\right) ... a_1\left(\frac{q_2+q_1}{2}, p_1\right) \varepsilon^{p_n(q_{n+1}-q_n)+...+p_1(q_2-q_1)}. \tag{6}$$

Положим

$$q = \frac{q_{n+1}+q_1}{2}, \quad \xi = q_{n+1} - q_1. \tag{7}$$

Умножая обе части (6) на $\varepsilon^{-p\xi}$ и суммируя по $\xi \in \Re$, получим

$$a(q,p) =$$

$$= M^{-n} \sum_{p_n,q_n,\dots,p_1,q_1\in\Re} a_n\left(\frac{q_{n+1}+q_n}{2},p_n\right)\dots a_1\left(\frac{q_2+q_1}{2},p_1\right)\varepsilon^{p_n(q_{n+1}-q_n)+\dots+p_1(q_2-q_1)-p(q_{n+1}-q_1)}. \tag{8}$$

В силу (7) $q_1 = q - \xi/2$. Это равенство при фиксированном $q \in \Re$ устанавливает в кольце $\Re$ взаимно однозначное соответствие между $q_1$ и $\xi$. Положим

$$p_i = p + y_i, i = 1,\dots,n;\ \ \frac{q_i+q_{i+1}}{2} = q + x_i, i = 1,\dots,n;\ \ \frac{q_{n+1}+q_1}{2} = q + x_{n+1}, \tag{9}$$

считая $x_{n+1} = 0$. Тогда (8) переходит в

$$a(q,p) = M^{-n} \sum_{x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n\in\Re} a_n(q+x_n,p+y_n)\dots a_1(q+x_1,p+y_1)\varepsilon^S, \tag{10}$$

где

$$S = \sum_{i=1}^{n} y_i(q_{i+1}-q_i). \tag{11}$$

Распространим определение $x_i$ на все целые числа $i$, полагая $x_i = x_{i'}$, если $i \equiv i'\ mod(n+1)$. Из (9) имеем тогда

$$q_i = q + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x_{i+k}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), получаем

$$S = 2\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}.$$

Отсюда и из (10)

$$a(q,p) = M^{-n} \sum_{x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n\in\Re} a_n(q+x_n,p+y_n)\dots a_1(q+x_1,p+y_1)\varepsilon^{2\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}} \tag{13}$$

— формула для символа $a = a_n * a_{n-1} * \dots * a_1$ оператора $A = A_n \circ A_{n-1} \circ \dots \circ A_1$, если $n$ — чётное. Если $n$ — нечётное, то для вычисления $a = a_n * a_{n-1} * \dots * a_1$ полагаем $a_{n+1}(q,p) \equiv 1$ и применяем формулу (13) к $a_{n+1} * a_n * a_{n-1} * \dots * a_1$.

Пусть теперь, как и ранее, $M \ge 3$ — нечётное целое число, $\varepsilon$ — первообразный корень степени $M$ из единицы (например, $\varepsilon = \exp(2\pi i/M)$), $u, v \in Z$ — целые числа. Рассмотрим определяемые формулой (2) псевдодифференциальные операторы $\varepsilon^{u\hat q}$ и $\varepsilon^{v\hat p}$ с символами Вейля $\varepsilon^{uq}$ и $\varepsilon^{vp}$ соответственно. Полагая в формуле (13) $n = 2$, получаем для композиции операторов $\varepsilon^{u\hat q}$ и $\varepsilon^{v\hat p}$:

$$\varepsilon^{u\hat q} \circ \varepsilon^{v\hat p} = \varepsilon^{u\hat q + v\hat p}\varepsilon^{\frac12 uv}, \quad \varepsilon^{v\hat p} \circ \varepsilon^{u\hat q} = \varepsilon^{u\hat q + v\hat p}\varepsilon^{-\frac12 uv}.$$

Отсюда

$$\varepsilon^{u\hat q}\varepsilon^{v\hat p} = \varepsilon^{uv}\varepsilon^{v\hat p} \circ \varepsilon^{u\hat q}. \tag{14}$$

Формула (14) вполне аналогична формуле Вейля (1) коммутационных соотношений для операторов $\hat{q}$ и $\hat{p}$ координат и импульсов. Однако фигурирующие в (14) операторы $\varepsilon^{u\hat{q}}$ и $\varepsilon^{v\hat{p}}$ являются комплексными $M \times M$ матрицами, действующими в $M$-мерном $\mathbb{C}$-линейном пространстве как линейные операторы.

**Замечание 1.** Аналогично, но намного проще, могут быть определены псевдодифференциальные $qp$-операторы и $pq$-операторы (см. [1]), действующие как матрицы конечного порядка.

**Замечание 2.** Все приведённые выше результаты сохраняются, если функции $f(q)$, заданные на $\Re = \mathbf{Z}/M\mathbf{Z}$, принимают значения в некотором $\mathbb{C}$-линейном пространстве $\mathcal{L}$, а значения символа Вейля $a(q,p)$ — линейные операторы в $\mathcal{L}$ (операторнозначные символы). Элементы матрицы $K(q_1, q_2)$ (см. (3)) будут в этом случае линейными операторами в $\mathcal{L}$. Результаты, связанные со скалярным произведением (5), требуют очевидной переформулировки.

**Замечание 3.** С помощью нестандартного анализа можно распространить определение (2) на операторы, действующие как матрицы гиперконечного порядка.

В некотором роде квантовая теория поля приводится к квантовой механике. Для этого надо до квантования заменить дифференциальные уравнения в частных производных конечно-разностными уравнениями подобно тому, как это сделано в [2]. Поэтому квантовую теорию поля тоже можно описывать с помощью псевдодифференциальных операторов, действующих как матрицы конечного порядка, а потом расширить эти операторы до операторов, действующих как матрицы гиперконечного порядка.

В квантовой теории поля бывает также полезным заменить уравнения для вектора состояния уравнениями для оператора плотности.

При квантовании фермионных полей (с помощью виковских операторов) операторы рождения-уничтожения изначально представляются $2\times2$ матрицами.

## Литература


1. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. М. : Изд-во МГУ, 1983.
2. Вентцель Г. Введение в квантовую теорию волновых полей. М.-Л. : Гостехиздат, 1947.