Математические структуры и моделирование
2012, вып. 26, с. 5–19

УДК 519.214.5

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь

Получены оценки скорости сходимости в предельных теоремах о сходимости к нормальному закону для последовательностей слабо зависимых случайных величин без предположения о существовании дисперсии.

1. Введение. Формулировки основных результатов

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$ — σ-алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leqslant n\}$ и $\{\xi_i : i \geqslant n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)} :\ A \in \mathcal{F}_{\leqslant 0},\ B \in \mathcal{F}_{\geqslant n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Обозначим

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_n,\ \xi_n(z) = \xi_n \mathbf{1}\left\{|\xi_n| \leqslant z\right\},\quad T_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(z), \quad \sigma_n(z) = \mathbf{D}T_n(z).$$

Введём так называемую универсальную нормирующую последовательность $\{b_n\}$:

$$b_n = \sup\{z \geqslant 0 : \sigma_n(z) \geqslant z\}$$

(см., например, [1]). Будем писать $\xi \overset{d}{=} \eta,\ \xi_n \overset{d}{\to} \eta$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают и $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению. Обозначим через $\mathcal{N}(0,1)$ случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение. Для того, чтобы при некотором выборе нормирующих постоянных A_n и $B_n \to +\infty$ имело место соотношение

$$B_n^{-1} T_n - A_n \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \tag{1}$$

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
E-mail: `griniran@gmail.com`

достаточно, а если $\varphi(1) < 1$ — и необходимо, чтобы при любом $\varepsilon > 0$

$$n\mathbf{P}\left\{|\xi_1| \geqslant \varepsilon b_n\right\} \to 0, \quad n \to \infty \tag{2}$$

При этом если выполнено (1) и $\varphi(1) < 1$, то $A_n = b_n^{-1} n\mathbf{E}\xi_1(b_n) + o(1)$, $B_n \sim b_n \sim \sigma_n(b_n)$, $\{b_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2, и если $h(x)$ — медленно меняющаяся функция такая, что $nh(b_n) \sim b_n^2,\ n \to \infty$, то

$$P\left\{|\xi_1| \geqslant x\right\} \leqslant C\frac{h(x)}{x^2},\ C > 0 \tag{3}$$

[1, 2]. Обозначим

$$\Delta_n = \sup_x \left| \mathbf{P}\left\{\frac{T_n - n\mathbf{E}\xi_1(b_n)}{b_n} < x\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt \right|.$$

В дальнейшем будем писать $g \ll h$, если $g(t, n, ...) \leqslant ch(t, n, ...)$, где $c > 0$ не зависит от $t, n, ...$, а $g \asymp h$ будет обозначать, что $g \ll h$ и $h \ll g$. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию экспоненциально быстрого φ-перемешивания (то есть $\varphi(n) \leqslant e^{-\alpha n}$, $\alpha > 0$), $\varphi(1) < 1$ и выполнено условие (2), то при любом $\varepsilon > 0$*

$$\Delta_n \ll n\mathbf{P}\left\{|\xi_1| \geqslant b_n\right\} + b_n^{-3} n\mathbf{E}|\xi_1(b_n)|^3 + n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Теорему 1 можно интерпретировать как распространение неулучшаемых в определённом смысле верхних оценок П. Холла из [3] на последовательности слабо зависимых величин.

Следствие 1. Если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию экспоненциально быстрого φ-перемешивания, $\varphi(1) < 1$, и $\mathbf{E}|\xi_1|^a < \infty,\ 2 < a < 3$, то $\Delta_n \ll n^{\frac{a}{2}-1}$.

Этот результат улучшает оценки А.Н. Тихомирова из [4].

Следствие 2. Если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию экспоненциально быстрого φ-перемешивания и $P\left\{|\xi_1| \geqslant x\right\} = x^{-a}h(x),\ 2 \leqslant a < 3$, где $h(x)$ — медленно меняющаяся функция, то $\Delta_n \ll n\mathbf{P}\left\{|\xi_1| \geqslant b_n\right\}$.

Ясно, что при $a = 2$ у величин ξ_1 с указанным распределением дисперсия может и не существовать.

2. Вспомогательные результаты

Обозначим через $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$ σ–алгебры, порождённые, соответственно, семействами $\{\xi_k : k \leqslant n\}$ и $\{\xi_k : k \geqslant n\}$.

Лемма 1. *Пусть последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания (φ–перемешивания) с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$ и пусть случайные величины ξ и η измеримы относительно $\mathcal{F}_{\leqslant 0}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$ соответственно,*

$$\|\xi\|_p = (\mathbf{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \|\eta\|_q < \infty, \quad p > 1,\ q > 1, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Тогда при любых комплексных a и b

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta| \leqslant 2\varphi^{\frac{1}{p}}(n)\|\xi - a\|_p\|\eta - b\|_q. \tag{4}$$

Если же

$$\|\xi\|_1 = \mathbf{E}|\xi| < \infty,\ \|\eta\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup|\eta| \leqslant \infty,$$

то

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta| \leqslant 2\varphi(n)\|\xi - a\|_1\|\eta - b\|_\infty. \tag{5}$$

Доказательство леммы легко получается, например, из теоремы 17.2.3 в [5] или из [6, с.236].

В дальнейшем будем обозначать через $\theta_i = \theta_i(t, n, ...)$, $i = 1, 2, \ldots$ — ограниченные величины, (т.е. $\sup\limits_{t,n,\ldots} |\theta_i(t, n, ...)| < \infty$); обозначим также $\tilde{\xi} = \xi - \mathbf{E}\xi$.

Лемма 2. *1. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\varphi^{\frac{1}{2}}(k) < \infty$. Тогда*

$$\sigma^2(z) = \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^2(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\tilde{\xi}_1(z)\tilde{\xi}_{k+1}(z) < \infty \quad \text{и} \quad \sup_n |\sigma_n^2(z) - n\sigma^2(z)| \ll \sigma_1^2(z).$$

2. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\varphi^{\frac{1}{2}}(k) < \infty$, $\varphi(1) < 1$, выполнено соотношение (2) и $\ln p \asymp \ln n$, $\ln c_n \asymp \ln n$, то $\sigma_p^2(c_n) \sim p\sigma^2(c_n)$.

3. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{3}}(k) < \infty, \quad \text{то} \quad |\mathbf{E}\widetilde{T}_n^3(z)| \ll n\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(z)|^3.$$

4. В условиях пункта 2

$$\mathbf{E}\widetilde{T}_p^4(c_n) \ll p\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(c_n)|^4 + p^2\sigma^4(c_n).$$

5. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) < \infty, \quad \text{то} \quad \left|b_n^{-2}\sigma_n^2(b_n) - 1\right| \ll n\mathbf{P}\left\{|\xi_1| \geqslant b_n\right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\sigma_n^2(z) = n\mathbf{E}\tilde{\xi}_1^2(z) + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\mathbf{E}\tilde{\xi}_1(z)\tilde{\xi}_{k+1}(z).$$

С помощью леммы 1 получаем отсюда

$$|\,\sigma_n^2(z) - n\sigma^2(z)| = \left| 2n\sum_{k=n}^{\infty}\mathbf{E}\tilde{\xi}_1(z)\tilde{\xi}_{k+1}(z) + 2\sum_{k=1}^{n-1}k\mathbf{E}\tilde{\xi}_1(z)\tilde{\xi}_{k+1}(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\sigma_1^2(z)\left(n\sum_{k=n}^{\infty}\varphi^{\frac{1}{2}}(k) + \sum_{k=1}^{n-1}k\varphi^{\frac{1}{2}}(k)\right) \leqslant 4\sigma_1^2(z)\sum_{k=1}^{\infty}k\varphi^{\frac{1}{2}}(k),$$

что доказывает утверждение 1 леммы.

Докажем утверждение 2. В наших предположениях справедливо соотношение (3), из которого следует, что $\sigma_1^2(b_n)$ и $\sigma_1^2(c_n)$ не превосходят некоторую медленно меняющуюся последовательность (см., например [5, с. 98]), так что $\sigma_1^2(b_n) = o(n^{\varepsilon})$ и $\sigma_1^2(b_n) = o(n^{\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$ [7, с. 24].

$\{b_n^2\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1, а в силу утверждения 1 $b_n^2 \sim \sigma_n^2(b_n) = n\sigma^2(b_n) + \theta_1\sigma_1(b_n)$, следовательно $b_n^2 \sim n\sigma^2(b_n)$ и $\sigma^2(b_n)$, а вместе с ней и $\sigma^2(n)$ являются медленно меняющимися последовательностями. Из утверждения 1 настоящей леммы выводим теперь

$$\sigma_p^2(c_n) = p\sigma^2(c_n) + \theta_2\sigma_1^2(c_n) \sim p\sigma^2(c_n).$$

Доказательство утверждения 3.

В силу стационарности последовательности $\{\xi_n(z)\}$

$$\left|\mathbf{E}\widetilde{T}_n^3(z)\right| \leqslant 6n\sum_{0\leqslant i+j\leqslant n-1}\left|\mathbf{E}\tilde{\xi}_1(z)\tilde{\xi}_{i+1}(z)\tilde{\xi}_{i+j+1}(z)\right|. \tag{6}$$

С помощью соотношения (4) (справедливого и при $n = 0,\ \varphi(0) = 1$) получаем

$$\left|\mathbf{E}\tilde{\xi}_1(z)\tilde{\xi}_{i+1}(z)\tilde{\xi}_{i+j+1}(z)\right| \leqslant 2\varphi^{\frac{2}{3}}(i)\|\tilde{\xi}_1(z)\|_3\|\tilde{\xi}_{i+1}(z)\tilde{\xi}_{i+j+1}(z)\|_{\frac{3}{2}} \leqslant 2\varphi^{\frac{2}{3}}(i)\|\tilde{\xi}_1(z)\|_3^3,$$

$$\left|\mathbf{E}\tilde{\xi}_1(z)\tilde{\xi}_{i+1}(z)\tilde{\xi}_{i+j+1}(z)\right| \leqslant 2\varphi^{\frac{2}{3}}(j)\|\tilde{\xi}_{i+j+1}(z)\|_3\|\tilde{\xi}_1(z)\tilde{\xi}_{i+1}(z)\|_{\frac{3}{2}} \leqslant 2\varphi^{\frac{2}{3}}(j)\|\tilde{\xi}_1(z)\|_3^3.$$

Отсюда

$$\left|\mathbf{E}\tilde{\xi}_1(z)\tilde{\xi}_{i+1}(z)\tilde{\xi}_{i+j+1}(z)\right| \leqslant 2(\varphi(i)\varphi(j))^{\frac{1}{3}}\|\tilde{\xi}_1(z)\|_3^3. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует утверждение 2.

Доказательство утверждения 4. Воспользуемся известным неравенством М. Пелиград [8]:

пусть при некоторых $a > 0,\ \delta > 0$ и натуральном m

$$\varphi(m) + \max_{1\leqslant j\leqslant p}\mathbf{P}\{|\widetilde{T}_j(c_n)| \geqslant \delta a\} \leqslant \gamma < 1.$$

Тогда при любых $x \geqslant a$ и $p \geqslant m$

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{T}_p(c_n)| \geqslant x\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbf{P}\left\{|\widetilde{T}_p(c_n)| \geqslant \frac{x}{1+4\delta}\right\} + \frac{p}{1-\gamma}\mathbf{P}\left\{|\tilde{\xi}_1(c_n)| \geqslant \frac{\delta x}{m(1+4\delta)}\right\}.$$

При $p/2 \leqslant j \leqslant p$ из неравенства Чебышёва и утверждения 1 следует

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{T}_j(c_n)| \geqslant N\sqrt{p}\sigma(c_n)\} \leqslant \frac{\sigma_j^2(c_n)}{N^2 p\sigma^2(c_n)} \leqslant \frac{1}{N^2}.$$

Если же $j < p/2$, то с помощью полученного неравенства выводим

$$\mathbf{P}\{|\widetilde{T}_j(c_n)| \geqslant N\sqrt{p}\sigma(c_n)\} \leqslant \mathbf{P}\{|\widetilde{T}_p(c_n)| \geqslant N\sqrt{p}\sigma(c_n)/2\}+$$

$$+\mathbf{P}\{|\widetilde{T}_p(c_n) - \widetilde{T}_j(c_n)| \geqslant N\sqrt{p}\sigma(c_n)/2\} \leqslant \frac{8}{N^2}.$$

Два последних неравенства означают, что неравенство М. Пелиград справедливо при $a = N\sqrt{p}\sigma(c_n)$, причём $N > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ можно выбрать такими, чтобы $\dfrac{\gamma(1+4\delta)^4}{1-\gamma} < 1$. Имеем

$$\mathbf{E}\widetilde{T}_p^4(c_n) = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\widetilde{T}_j^4(c_n) \geqslant x\}\,dx \leqslant N^4p^2\sigma^4(c_n)+$$

$$+\frac{\gamma}{1-\gamma}\int\limits_{N\sqrt{p}\sigma(c_n)}^\infty \mathbf{P}\left\{\widetilde{T}_p^4(c_n) \geqslant \frac{x}{(1+4\delta)^4}\right\}dx+$$

$$+\frac{p}{1-\gamma}\int\limits_{N\sqrt{p}\sigma(c_n)}^\infty \mathbf{P}\left\{\tilde{\xi}_1^4(c_n) \geqslant \frac{\delta^4 x}{m^4(1+4\delta)^4}\right\}dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma(1+4\delta)^4}{1-\gamma}\mathbf{E}\widetilde{T}_p^4(c_n) + p\frac{m^4(1+4\delta)^4}{(1-\gamma)\delta^4}\mathbf{E}\tilde{\xi}_1^4(c_n),$$

отсюда следует утверждение 3.

Докажем утверждение 4. Обозначим $\delta_n = n\mathbf{P}\left\{|\xi_1| > b_n\right\}$. В силу определения b_n существует последовательность положительных чисел $d_n \geqslant b_n$ такая, что $0 \leqslant d_n^{-2}\sigma_n^2(d_n) - 1 \leqslant \delta_n$ и $0 < d_n^2 b_n^{-2} - 1 \leqslant \delta_n$. Тогда

$$|b_n^{-2}\sigma_n^2(d_n) - 1| \ll \delta_n. \tag{8}$$

Далее, обозначим

$$W_n = \widetilde{T}_n(d_n) - \widetilde{T}_n(b_n) = \sum_{j=1}^n \eta_j, \quad \eta_j = \tilde{\xi}_j \mathbf{1}\left\{b_n < |\xi_j| \leqslant d_n\right\},\ j = 1, ..., n.$$

Тогда

$$\sigma_n^2(d_n) = \sigma_n^2(b_n) + 2\mathbf{E}\widetilde{T}_n(b_n)W_n + \mathbf{E}W_n^2. \qquad (9)$$

В силу соотношения (5)

$$\left|\mathbf{E}\tilde{\xi}_i(b_n)\eta_j\right| \leqslant 2\varphi(|i-j|)\|\xi_i(b_n)\|_\infty\|\xi_j \mathbf{1}\left\{b_n < |\xi_j| \leqslant d_n\right\}\|_1 \ll \varphi(|i-j|)b_n d_n \mathbf{P}\left\{|\xi_j| > b_n\right\},$$

откуда

$$\mathbf{E}\widetilde{T}_n(b_n)W_n \ll n b_n d_n \mathbf{P}\left\{|\xi_j| > b_n\right\}. \qquad (10)$$

Аналогично показывается, что

$$\mathbf{E}W_n^2 \ll n d_n^2 \mathbf{P}\left\{|\xi_j| > b_n\right\}. \qquad (11)$$

Так как $d_n^2 \ll b_n^2$, то из (8), (9), (10) и (11) следует утверждение 4.

3. Доказательство основных результатов

Пусть n и p — натуральные числа, $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$ — последовательности положительных чисел. Ниже с помощью конструкции из [9] выводится представление для характеристических функций величин $\widetilde{T}_n(c_n)$.

Обозначим

$$Q_j(c_n) = d_n^{-1}\sum_{l=1}^{p}\tilde{\xi}_{(j-1)p+l}(c_n), \quad f_r(t) = \mathbf{E}\exp\left\{it\sum_{j=1}^{r}Q_j(c_n)\right\}, \quad j, r = 1, 2, ...$$

Введём функцию

$$F_k(z) = \mathbf{E}\prod_{j=1}^{k}\left(f_1 + z\left(\exp\left\{itQ_j(c_n)\right\} - f_1\right)\right) = \sum_{m=1}^{k} z^m f_1^{k-m}\mathbf{E}S_m(X_1, ..., X_k),$$

где $X_j = \exp\left\{itQ_j(c_n)\right\} - f_1,\ j = 1, ..., k$, а

$$S_0(x_1, ..., x_k) = 1, \quad S_m(x_1, ..., x_k) = \sum_{1\leqslant j_1<...<j_m\leqslant k} x_{j_1}...x_{j_k} -$$

— m-й элементарный симметрический многочлен. Из формулы Тейлора для функции $F_k(z)$ (см., например, [10, с. 67]) получаем при $l < k$

$$f_k(t) = F_k(1) = f_1^k + f_1^{k-1}\mathbf{E}S_1(X_1, ..., X_k) + ... + f_1^{k-l}\mathbf{E}S_l(X_1, ..., X_k) + R_l, \qquad (12)$$

где

$$R_l = R_l(X_1, ..., X_k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{F_k(z)\,dz}{(z-1)\,z^{l+1}}, \quad |\rho| > 1. \qquad (13)$$

Обозначим $g_l = \mathbf{E}X_1...X_l,\ l \geqslant 1,\ \beta^2 = \mathbf{E}|X_1|^2 = 1 - |f_1|^2$.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия Теоремы 1. Положим в определении $f_r(t)$ $d_n = \sigma_n(c_n)$. Тогда*

1. $$\mathbf{E}S_1(X_1,...,X_k) = 0,\ \mathbf{E}S_2(X_1,...,X_k) = (k-1)g_2 + O(\beta^2 k^2 \varphi^{\frac{1}{2}}(p)),$$

$$\mathbf{E}S_3(X_1,...,X_k) = (k-2)g_3 + O(\beta^2 k^3 \varphi^{\frac{1}{2}}(p)). \qquad (14)$$

2. Пусть $n = kp$. Существует $\gamma > 0$ такое, что при $|t| \leqslant \gamma\sigma_n(c_n)\sigma_p^{-1}(c_n)$

$$f_1(t) = \exp\left\{-\frac{t^2\sigma_p^2(c_n)}{2\sigma_n^2(c_n)} + \theta_3\Psi(n,t,c_n)\right\}, \qquad (15)$$

где

$$\Psi(n,t,c_n) = \frac{p\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(c_n)|^3}{\sigma_n^3(c_n)}|t|^3 + \frac{p\mathbf{E}\tilde{\xi}_1^4(c_n)}{\sigma_n^4(c_n)}t^4 + \frac{t^4}{k^2}.$$

3. Пусть $g_2^* = f_1^{-2}g_2$, $g_3^* = f_1^{-3}g_3$. При $|t| \leqslant \gamma\sigma_n(c_n)\sigma_{3p}^{-1}(c_n)$

$$|g_2^*| \ll \frac{\sigma_1^2(c_n)}{\sigma_n^2(c_n)}t^2 + \theta_4\Psi(n,t,c_n),\ |g_3^*| \ll \frac{\sigma_1^2(c_n)}{\sigma_n^2(c_n)}t^2 + \theta_5\Psi(n,t,c_n). \qquad (16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Так как $\mathbf{E}X_j = 0$, $j = 1,2,...$, то

$$\mathbf{E}S_1(X_1,...,X_k) = \mathbf{E}\sum_{j=1}^{k} X_j = 0.$$

В сумме $\mathbf{E}S_2(X_1,...,X_k)$ имеется $k-1$ слагаемое вида $\mathbf{E}X_jX_{j+1} = g_2$ и $(k-1)(k-2)/2$ слагаемых вида $\mathbf{E}X_jX_l$, $|j-l| > 1$, каждое из которых по лемме 1 не превосходит $2\varphi^{\frac{1}{2}}(p)\|X_j\|_2\|X_l\|_2 = 2\beta^2\varphi^{\frac{1}{2}}(p)$; это даёт нам нужную оценку для $\mathbf{E}S_2(X_1,...,X_k)$. Соотношение (14) доказывается аналогично.

2. При $|t| \leqslant \gamma\sigma_n(c_n)\sigma_p^{-1}(c_n)$. С помощью утверждения 2 леммы 2 получаем

$$|f_1(t)-1| \leqslant \frac{t^2\sigma_p^2(c_n)}{2\sigma_n^2(c_n)} \leqslant \frac{\gamma}{2},\quad |f_1(t)-1|^2 \leqslant \frac{t^4\sigma_p^4(c_n)}{4\sigma_n^4(c_n)} \ll \frac{t^4}{k^2}, \qquad (17)$$

а из (17) выводим

$$\ln f_1(t) = f_1(t) - 1 + \theta_6|f_1(t)-1|^2 =$$

$$= -\frac{t^2\sigma_p^2(c_n)}{2\sigma_n^2(c_n)} + \frac{\mathbf{E}\widetilde{T}_p^3(c_n)}{6\sigma_n^3(c_n)}(it)^3 + \theta_7\left(\frac{\mathbf{E}\widetilde{T}_p^4(c_n)}{\sigma_n^4(c_n)}t^4 + \frac{t^4}{k^2}\right).$$

Отсюда уже легко выводится (15).

3. Нетрудно подсчитать, что $g_2^* = \left(f_1^{-2}f_2 - 1\right)$. Представив f_1 и f_2 в виде (15) и воспользовавшись леммой 2, получим при $|t| \leqslant \gamma\sigma_n(c_n)\sigma_{2p}^{-1}(c_n)$

$$f_2f_1^{-2} = \exp\left\{-\frac{\sigma_{2p}^2(c_n) - 2\sigma_p^2(c_n)}{2\sigma_n^2(c_n)}t^2 + \theta_8\Psi(n,t,c_n)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\theta_9 \frac{\sigma_1^2(c_n)}{\sigma_n^2(c_n)} t^2 + \theta_{10}\Psi(n,t,c_n)\right\} = e^w.$$

В силу (17) при достаточно малых $\gamma > 0$ $|e^w| = |f_2 f_1^{-2}| \leqslant 4$, и

$$\left|\frac{e^w - 1}{w}\right| \leqslant e,\ |w| \leqslant 1,\quad \left|\frac{e^w-1}{w}\right| \leqslant |e^w - 1| \leqslant 5,\ |w| > 1,$$

так что из приведённого выше представления для e^w следует оценка для $|g_2^*|$ в (16). Далее $g_3^* = \left(f_1^{-3} f_3 - 1\right) - 2g_2^* - g_2^{**}$, $g_2^{**} = \mathbf{E} X_1 X_3$. Представив входящие в определение g_3^* характеристические функции в виде (15), аналогично оценке для $|g_2^*|$ выводим (16).

Пусть $2q < p$. Обозначим

$$U_j = \frac{1}{\sigma_n(c_n)} \sum_{l=1}^{p-2q} \tilde{\xi}_{(j-1)p+q+l}(c_n),\quad V_j = \frac{1}{\sigma_n(c_n)} \sum_{l=1}^{q} (\tilde{\xi}_{(j-1)p+l}(c_n) + \tilde{\xi}_{jp-q+l}(c_n)),$$

$$u = u(t) = \mathbf{E}\exp\{itU_1\},\quad v = v(t) = \mathbf{E}\exp\{itV_1\}.$$

Тогда $Q_j(c_n) = U_j + V_j$, $X_j = Y_j + Z_j$, $j = 1, 2, ...$, где

$$Y_j = (\exp\{itU_j\} - u)v,\quad Z_j = \exp\{itU_j\}(\exp\{itV_j\} - v) + uv - f_1,$$

так что

$$F_k(z) = \mathbf{E}\prod_{j=1}^{k} \left(f_1 + z\left(Y_j + Z_j\right)\right). \tag{18}$$

Лемма 4.

$$|F_k(z)| \leqslant \left\{1 - \beta^2 + \rho^2\delta^2 + 8\rho^2\varphi(p)\right\}^{\frac{k}{2}} + 16\rho\varphi(q)B_k, \tag{19}$$

где $\delta^2 = 1 - |v|^2$, $\rho = |z| \geqslant 1$, *а*

$$B_k = \sum_{l=2}^{k-2} \|\prod_{j=1}^{l-1}(f_1 + zX_j)\|_\infty \left\{1 - \beta^2 + \rho^2\delta^2 + 8\rho^2\varphi(p)\right\}^{\frac{k-l-1}{2}} +$$

$$+ \|\prod_{j=1}^{k-1}(f_1 + zX_j)\|_\infty \left\{1 - \beta^2 + \rho^2\delta^2 + 8\rho^2\varphi(p)\right\}^{\frac{k-2}{2}}.$$

Доказательство практически дословно повторяет рассуждения леммы 8 в [9].

Обозначим $\delta_n = n\mathbf{P}\left\{|\xi_1| \geqslant b_n\right\}$, $\tau_n = \dfrac{n\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(b_n)|^3}{b_n^3}$.

Лемма 5. *Пусть* $k = k(n) = [n^a]$, $a = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $n = kp$, $k_1 = k(p)$, $\psi_n = \gamma\min(\sqrt{k_1}, \tau_n^{-\frac{1}{2}})$. *В условиях теоремы 1 существует* $\gamma > 0$ *такое, что при* $n^{-1} \leqslant |t| \leqslant \psi_n$

$$f_n^*(t) = \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{T}_n(b_n)}{b_n}\right\} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \theta_{11}\left(\delta_n t^2 + \frac{t^2+t^4}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} + \tau_n(|t|^3 + t^4)\right)\right\}. \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $n^{-1} \leqslant |t| \leqslant \gamma\sigma_n(c_n)\sigma_p^{-1}(c_n) \sim \gamma\sqrt{k}$ (см. лемму 2). Положим

$$p = \left[\frac{n}{k}\right], \quad q = \left[p^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{1}{3}}\right].$$

Тогда, кстати, $kq = o(p)$. При достаточно малых $\gamma > 0$

$$\beta^2 = \mathbf{E}\left|\exp\{itX_1\} - f_1\right|^2 \leqslant \mathbf{E}\left|\exp\{itX_1\} - 1\right|^2 \leqslant \frac{t^2\sigma_p^2(c_n)}{2\sigma_n^2(c_n)} < \frac{1}{2}. \qquad (21)$$

Аналогично с помощью леммы 2 выводим

$$\delta^2 = 1 - |v(t)|^2 \leqslant \frac{t^2}{2}\mathbf{D}V_1 \sim \frac{t^2\sigma_q^2(c_n)}{\sigma_n^2(c_n)}. \qquad (22)$$

Так как $|v(t)|^2$ является характеристической функцией случайной величины $W = V_1 - \widehat{V}_1$, где V_1 и $\widehat{V}_1$ независимы и одинаково распределены и $3(1-\cos x) \geqslant x^2$, $|x| \leqslant 1$, то

$$\delta^2 = 1 - \mathbf{E}\cos(tW) \geqslant \frac{t^2}{3}\mathbf{E}W^2\mathbf{1}\left\{|tW| \leqslant 1\right\}. \qquad (23)$$

Далее, с помощью утверждения 2 леммы 2 выводим

$$\mathbf{D}W = 2\mathbf{D}V_1 \ll \sigma_n^{-2}(c_n)\sigma_q^2(c_n) \ll \sigma_n^{-2}(c_n)\sigma_p^2(c_n),$$

так что при $|t| \leqslant \gamma\sigma_n^{-2}(c_n)\sigma_p^{-1}(c_n)$

$$\{|tW| \leqslant 1\} \supseteq \{|W| \leqslant C\gamma^{-1}\sqrt{\mathbf{D}W}\},$$

где $C > 0$ не зависит от n и γ. Далее, из леммы 4 в [1] следует

$$\mathbf{E}W^2\mathbf{1}\left\{|W| \geqslant C\gamma^{-1}\sqrt{\mathbf{D}W}\right\} = o_\gamma(1)\mathbf{D}W,$$

и при достаточно малых $\gamma > 0$ и достаточно больших n из (23) следует теперь

$$\delta^2 \geqslant \frac{t^2}{4}\mathbf{D}W \geqslant t^2\sigma_n^{-2}(c_n)\sigma_q^2(c_n). \qquad (24)$$

Из (12) и (13) при $l = 3$ с помощью утверждения 1 леммы 3 получаем

$$f_k(t) = f_1^k(t)\left(1 + (k-1)g_2^* + (k-2)g_3^* + \theta_{12}\beta^2k^3\varphi^{\frac{1}{2}}(p)\right) + R_3, \qquad (25)$$

$$|R_3| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{F_k(z)\,dz}{(z-1)\,z^4}\right| \leqslant (\rho-1)^{-1}\rho^{-3}\sup_{|z|=\rho}|F_k(z)|, \quad |\rho| > 1. \qquad (26)$$

Положим в (26) $\rho^2 = \dfrac{1-\beta^2}{k\delta^2}$. При достаточно малых γ и достаточно больших n с помощью (21), (22) и утверждения 2 леммы 2 получаем

$$\rho^{-2} \leqslant 2\frac{kt^2\sigma_q^2(c_n)}{\sigma_n^2(c_n)} \leqslant 2\gamma^2\frac{kq}{p} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad |t| \leqslant \gamma\sigma_n^{-2}(c_n)\sigma_p^{-1}(c_n),$$

а при $|t| \geqslant n^{-1}$ с помощью (24) —

$$\rho^2 \leqslant \frac{b_n^2}{kt^2\sigma_q^2(c_n)} \ll n^2.$$

Используя два последних неравенства, лемму 2, лемму 4, соотношения (19) и (26), выводим

$$|R_3| \ll f_1^k \frac{k^{\frac{3}{2}}\sigma_q^3(c_n)|t|^3}{\sigma_n^3(c_n)} \left(1 + \frac{1}{k} + n^2\varphi(p)\right)^{\frac{k}{2}} + t^2 n^3 \varphi(q) B_k \ll$$

$$\ll f_1^k \frac{\mathbf{E}|\widetilde{T}_p(c_n)|^3|t|^3}{\sigma_n^3(c_n)} + t^2 n^3 \varphi(q) B_k, \qquad (27)$$

где

$$B_k \leqslant k(1+2\rho)^k \left(1 + \frac{1}{k} + n^2\varphi(p)\right)^{\frac{k}{2}} \ll k(1+n^2)^k.$$

По условию $\varphi(n) \leqslant \exp\{-\alpha n\}$ и так как $k \ln n = o(q)$, то из последнего неравенства следует

$$n^3\varphi(q)B_k \ll \exp\left\{3\ln n + k\ln(1+n^2) - \alpha q\right\} \ll e^{-\alpha' q}, 0 < \alpha' < \alpha. \qquad (28)$$

Из (16), (25) и (28) получаем

$$f_k(t) = f_1^k(t)\left[1 + \theta_{13}\left(\frac{\sigma_1^2(c_n)}{\sigma_n^2(c_n)}t^2 + k\Psi(n,t,c_n)\right)\right] + \theta_{14}t^2\exp\left\{-\alpha' q\right\}.$$

Так как $\sigma_1(n)$ и $\sigma(n)$ — медленно меняющиеся функции (см. доказательство утверждения 2 леммы 2), то $\sigma_1^2(c_n)\sigma_n^{-2}(c_n) = o(n^{1-2\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$, поэтому последнее соотношение можно переписать так

$$f_k(t) = f_1^k(t)\left[1 + \theta_{15}\left(\frac{t^2}{n^{1-2\varepsilon}} + k\Psi(n,t,c_n)\right)\right] + \theta_{16}t^2\exp\left\{-\alpha' q\right\}. \qquad (29)$$

Далее, из (15) и леммы 2 следует

$$f_1^k(t) = \exp\left\{-\frac{kt^2\sigma_p^2(c_n)}{2\sigma_n^2(c_n)} + \theta_{17}k\Psi(n,t,c_n)\right\}. \qquad (30)$$

Из леммы 2, аналогично тому, как при выводе (29), получаем $\frac{k\sigma_p^2(c_n)}{2\sigma_n^2(c_n)} = 1 + o(n^{-1+2\varepsilon})$, так что из (29) и (30) следует теперь

$$f_1^k(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \theta_{18}\left(\frac{t^2}{n^{1-2\varepsilon}} + k\Psi(n,t,c_n)\right)\right\}. \qquad (31)$$

Обозначим

$$\mu_n^{-1} = \max\left\{\frac{n\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(c_n)|^3}{\sigma_n^3(c_n)}, \left(\frac{n\mathbf{E}\tilde{\xi}_1^4(c_n)}{\sigma_n^4(c_n)}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Нетрудно видеть, что если $|t| \leqslant \gamma \min(\sqrt{k}, \mu_n)$, то $k\Psi(n,t,c_n) \ll \gamma t^2$, откуда легко выводится, что при достаточно малых $\gamma > 0$

$$n \exp\{-\alpha' q\} = o\left(\exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \theta_{19}\left(\frac{t^2}{n^{1-2\varepsilon}} + k\Psi(n,t,c_n)\right)\right\}\right),$$

что вместе с (29) и (31) даёт нам

$$f_k(t) = \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{T}_n(c_n)}{\sigma_n(c_n)}\right\} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \theta_{20}\left(\frac{t^2}{n^{1-2\varepsilon}} + k\Psi(n,t,c_n)\right)\right\}. \qquad (32)$$

$|t| \leqslant \gamma \min(\sqrt{k}, \mu_n)$.

Обозначим $k_1 = k_1(n) = k(p) = [p^a]$ и пусть $k_1 p_1 = p$. Последовательность $\{c_n\}$ выберем так, чтобы $c_p = b_n$. Заменив в (32) n на p, k на k_1, и p на p_1, получим

$$\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{T}_p(b_n)}{\sigma_p(b_n)}\right\} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \theta_{21}\left(\frac{t^2}{p^{1-2\varepsilon}} + k_1\Psi(p,t,b_n)\right)\right\}.$$

$|t| \leqslant \gamma \min(\sqrt{k_1}, \mu_p)$, откуда

$$f_1(t) = \mathbf{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{T}_p(b_n)}{\sigma_n(b_n)}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{t^2\sigma_p^2(b_n)}{2\sigma_n^2(b_n)} + \theta_{22}\left(\frac{t^2\sigma_p^2(b_n)}{\sigma_n^2(b_n)p^{1-2\varepsilon}} + k_1\Psi\left(p, \frac{t\sigma_p(b_n)}{\sigma_n(b_n)}, b_n\right)\right)\right\}, \qquad (33)$$

$|t| \leqslant \gamma \min(\sqrt{k_1}, \mu_p)\sigma_n(b_n)\sigma_p^{-1}(b_n)$.

Далее, $\sigma_n(b_n) \sim b_n$, $kk_1 \sim n^{a+a(1-a)} = \sqrt{n}$, а $\sigma_p(b_n)\sigma_n^{-1}(b_n) \sim \sqrt{k}$ в силу леммы 2. Так как $b_n^{-4}\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(b_n)|^4 \leqslant b_n^{-3}\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(b_n)|^3$, то

$$\frac{1}{\sqrt{k}\mu_p} = \frac{1}{\sqrt{k}}\max\left\{\frac{p\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(b_n)|^3}{\sigma_p^3(b_n)}, \left(\frac{p\mathbf{E}\tilde{\xi}_1^4(b_n)}{\sigma_n^4(b_n)}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \leqslant \max(\tau_n, \sqrt{\tau_n}).$$

При $\tau_n > 1$ утверждение теоремы 1 выполняется очевидным образом, поэтому будем считать, что $\tau_n \leqslant 1$, в этом случае $\sqrt{k}\mu_p \geqslant \tau_n^{-\frac{1}{2}}$. Поскольку

$$k_1\Psi\left(p, \frac{t\sigma_p(b_n)}{\sigma_n(b_n)}, b_n\right) \sim \frac{p\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(b_n)|^3}{\sigma_n^3(b_n)}|t|^3 +$$

$$+\frac{p\mathbf{E}\tilde{\xi}_1^4(b_n)}{\sigma_n^4(b_n)}t^4 + \frac{t^4}{k\sqrt{n}} \leqslant \frac{p\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(b_n)|^3}{b_n^3}(|t|^3 + t^4) + \frac{t^4}{k\sqrt{n}},$$

то (33) можно переписать в виде

$$f_1(t) = \exp\left\{-\frac{t^2\sigma_p^2(b_n)}{2\sigma_n^2(b_n)} + \theta_{23}\Psi_1(t,n)\right\}, \text{ где} \qquad (34)$$

$$\Psi_1(t,n)=\frac{t^2}{kp^{1-2\varepsilon}}+\frac{p\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(b_n)|^3}{b_n^3}(|t|^3+t^4)+\frac{t^4}{k\sqrt{n}},$$

$|t|\leqslant\psi_n=\gamma\min\left(\sqrt{k_1},\tau_n^{-\frac{1}{2}}\right)$. Представив в виде (34) функцию f_2 и, проведя рассуждения, приводящие к утверждению 3 леммы 3, можно получить оценку

$$|g_2^*|\ll\frac{\sigma_1^2(b_n)}{\sigma_n^2(b_n)}t^2+\Psi_1(t,n),\quad |g_3^*|\ll\frac{\sigma_1^2(b_n)}{\sigma_n^2(b_n)}t^2+\Psi_1(t,n). \tag{35}$$

Если теперь повторить рассуждения, приводящие к (32), используя (34) и (35) вместо (15) и (16), получим

$$\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{T}_n(b_n)}{\sigma_n^{-1}(b_n)}\right\}=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}+\theta_{24}\left(\frac{t^2}{p_1^{1-2\varepsilon}}+\tau_n(|t|^3+t^4)+\frac{t^4}{\sqrt{n}}\right)\right\}, \tag{36}$$

$|t|\leqslant\psi_n$. В силу утверждения 5 леммы 2

$$\left|\frac{\sigma_n^2(b_n)}{b_n^2}-1\right|\ll\delta_n=n\mathbf{P}\left\{|\xi_1|\geqslant b_n\right\},$$

а $p_1=p(p)=\left(n^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{n}$, так что из (36) следует теперь

$$f_n^*(t)=\mathbf{E}\exp\left\{it\frac{\widetilde{T}_n(b_n)}{b_n}\right\}=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}+\theta_{25}\Psi_2(t,n)\right\}, \tag{37}$$

$$\Psi_2(t,n)=\delta_n t^2+\frac{t^2+t^4}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}+\tau_n(|t|^3+t^4),\ |t|\leqslant\psi_n.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *В условиях леммы 5*

$$\left|f_n^*(t)-\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\right|\ll\Psi_2(t,n)\exp\left\{-\frac{t^2}{3}\right\},\ |t|\leqslant\psi_n.$$

Доказательство. Легко видеть, что при достаточно малых $\gamma>0$ если $|t|\leqslant\psi_n=\gamma\min\left(\sqrt{k_1},\tau_n^{-\frac{1}{2}}\right)$, то $|\theta_{25}|\Psi_2(t,n)\leqslant\dfrac{t^2}{6}$ (напомним, что мы рассматриваем только случай, когда $|\tau_n|\leqslant 1$, в противном случае утверждение теоремы 1 очевидно). С помощью неравенства $|\exp\{z\}-1|\leqslant|z|\exp\{|z|\}$ из (37) выводим теперь

$$\left|f_n^*(t)-\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\right|\leqslant\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}|\theta_{25}|\Psi_2(t,n)\exp\left\{\frac{t^2}{6}\right\},$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 7. *В условиях теоремы 1 при* $|t| \ll n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$

$$|f_n^*(t)| \ll \exp\left\{-\frac{t^2}{4}\right\} + o\left(e^{-n^\varepsilon}\right), \quad n \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Положим в (19) $z = \rho = 1,\ q = [Nn^\varepsilon], p = [N^2 n^\varepsilon],\ k = [np^{-1}],\ N > 0,\ c_n = b_n$. Получим

$$|f_n^*(t)| = |F_k(1)| \leqslant \left\{1 - |v(t)|^2 + |f_1(t)|^2 + 8\varphi(p)\right\}^{\frac{k}{2}} + 16\varphi(q)B_k, \tag{38}$$

где

$$B_k = \sum_{l=1}^{k-1} \left\{1 - |v(t)|^2 + |f_1(t)|^2 + 8\varphi(p)\right\}^{\frac{l-1}{2}}.$$

Пусть $|t| \leqslant \sigma_n(b_n)\sigma_p^{-1}(b_n) \sim \sqrt{k}$. С помощью леммы 2 получаем при достаточно больших $N > 0$

$$|f_1(t)|^2 - |v(t)|^2 = \frac{2t^2\sigma_q^2(b_n)}{\sigma_n^2(b_n)} - \frac{t^2\sigma_p^2(b_n)}{\sigma_n^2(b_n)} + o\left(\frac{t^2}{k}\right) \sim -\frac{t^2}{k}\left(1 - 2N^{-1}\right) + o\left(\frac{t^2}{k}\right) \leqslant -\frac{t^2}{2k}.$$

Подставив это неравенство в (30), выводим

$$|f_k(t)| \ll \exp\left\{-\frac{t^2}{4}\right\} + o\left(e^{-n^\varepsilon}\right).$$

Так как $b_n \sim \sigma_n(b_n)$, аналогичная оценка справедлива и для $f_n^*(t) = f_k\left(\frac{\sigma_n(b_n)}{b_n}t\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Прежде всего заметим, что

$$\left|\mathbf{P}\left\{\frac{T_n - n\mathbf{E}\xi_1(b_n)}{b_n} < x\right\} - \mathbf{P}\left\{\frac{T_n(b_n) - n\mathbf{E}\xi_1(b_n)}{b_n} < x\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{n}(\xi_j \neq \xi_j(b_n))\right\} \leqslant 2n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant b_n\} = 2\delta_n,$$

так что если обозначить

$$\Delta_n' = \sup_x \left|\mathbf{P}\left\{\frac{T_n(b_n) - n\mathbf{E}\xi_1(b_n)}{b_n} < x\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt\right|,$$

то будем иметь

$$|\Delta_n - \Delta_n'| \leqslant 2\delta_n. \tag{39}$$

Далее воспользуемся классическим неравенством Эссеена

$$\Delta_n' \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{\chi(t)}{t}\right| dt + \frac{4}{\pi T}, \quad \chi(t) = f_n^*(t) - \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}$$

(см., например, [5, с. 119]), при $T = n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$. Получим

$$\Delta_n' \ll n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} + \int\limits_{|t|\leqslant n^{-1}} \left|\frac{\chi(t)}{t}\right| dt + \int\limits_{n^{-1}\leqslant|t|\leqslant\psi_n} \left|\frac{\chi(t)}{t}\right| dt + \int\limits_{\psi_n\leqslant|t|\leqslant n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \left|\frac{\chi(t)}{t}\right| dt =$$

$$= n^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} + I_1 + I_2 + I_3. \tag{40}$$

При $|t| \leqslant n^{-1}$ $|f_n^*(t) - 1| \leqslant t^2$, откуда легко получается

$$I_1 \leqslant n^{-2}. \tag{41}$$

I_2 оценим с помощью леммы 6:

$$I_2 \leqslant \int\limits_{n^{-1}\leqslant|t|\leqslant\psi_n} |t|^{-1}\Psi_2(t,n)\exp\left\{-\frac{t^2}{3}\right\} dt \ll \delta_n + \tau_n + n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{42}$$

Наконец, для оценки I_3 используем лемму 7:

$$I_3 \ll \int\limits_{\psi_n\leqslant|t|\leqslant n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \frac{\exp\left\{-\dfrac{t^2}{4}\right\} + o\left(e^{-n^\varepsilon}\right)}{|t|} dt \ll \psi_n^{-2} + o\left(e^{-n^\varepsilon}\right) \leqslant \tau_n + o\left(e^{-n^\varepsilon}\right). \tag{43}$$

Из соотношений (39) – (43) следует утверждение теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1.

Пусть $\mathbf{E}|\xi_1|^a < \infty$, $2 < a < 3$. Так как $\mathbf{E}\xi_1^2 < \infty$, то, как нетрудно видеть, $b_n^2 \sim \sigma_n^2 = \mathbf{D}T_n$. Из утверждения 1 леммы 2 следует, что $\sigma_n^2 \sim n\sigma^2$, где $\sigma^2 = \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_{k+1} < \infty$, а из соотношения (2) $\sigma_n \to \infty$, $n \to \infty$, так что $\sigma > 0$. Имеем

$$\delta_n = n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant b_n\} \leqslant \frac{n\mathbf{E}|\xi_1|^a}{b_n^a} \ll n^{1-\frac{a}{2}}, \quad \tau_n = \frac{n\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(b_n)|^3}{b_n^3} \leqslant \frac{n\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1|^a}{b_n^a} \ll n^{1-\frac{a}{2}}.$$

Из двух последних соотношений следует утверждение следствия 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2.

Если $P\{|\xi_1| \geqslant x\} = \dfrac{h(x)}{x^a}$, $2 \leqslant a < 3$, где $h(x)$ — медленно меняющаяся функция, то

$$\mathbf{E}|\xi_1(x)|^a = -\int\limits_0^{b_n} x^3\, dP\{|\xi_1| \geqslant x\} \sim \frac{3-a}{a}x^3\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant x\},\ x \to \infty$$

[11, с. 324]. Отсюда

$$\tau_n = \frac{n\mathbf{E}|\tilde{\xi}_1(b_n)|^3}{b_n^3} \ll n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geqslant b_n\} = \frac{nh(b_n)}{b_n^a}$$

и при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll n^{1-\frac{a}{2}-\varepsilon} = o\left(\frac{nh(b_n)}{b_n^a}\right)$$

(см., например, вывод соотношения (29)). Утверждение следствия 2 следует теперь из Теоремы 1.

Литература

1. Гринь А.Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин // Теория вероятностей и её применения. 1991. Т. 36, № 2. С. 285–300.
2. Гринь А.Г. Об областях притяжения для сумм зависимых величин // Теория вероятностей и её применения. 1990. Т. 35, № 2. С. 255–270.
3. Hall P. Two-sided bounds for nonuniform rates of convergence in the central limit theorem // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1983. Bd. 65, N. 1. S. 61–72.
4. Тихомиров А.Н. О скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых величин // Теория вероятностей и её применения. 1980. Т. 25, № 4. С. 800–818.
5. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М : Наука, 1977. 351 с.
7. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1983. 142 с.
8. Peligrad M. An invariance principle for φ-mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, N. 4. P. 1304–1313.
9. Гринь А.Г. Уточнения центральной предельной теоремы для сумм зависимых случайных величин // Математические структуры и моделирование. 2003. Вып. 12. С. 10–27.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1973. 736 с.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М. : Мир, 1984. 751 с.