Математические структуры и моделирование
2012, вып. 26, с. 38–48

УДК 517.968

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА ОТНОСИТЕЛЬНО МЕРЫ НА СФЕРЕ S^{n-1}

В.Н. Степанов

Исследуются свойства интегрального оператора с ядром, зависящим от скалярного произведения и действующего на банаховом пространстве мер на сфере.

Пусть S^{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$; u, v — точки на S^{n-1}; $\mathcal{M}$ — банахово пространство знакопеременных мер (зарядов) на S^{n-1} с нормой $\|\mu\| = |\mu|(S^{n-1})$, где $|\mu|(S^{n-1})$ — полная вариация знакопеременной меры μ на S^{n-1}, определяемая формулой [1]

$$\|\mu\| = |\mu|(S^{n-1}) = \sup\left|\int_{S^{n-1}} x(v)\mu(dv)\right|.$$

Здесь sup берётся по всем μ — измеримым функциям $x(v)$ на S^{n-1}, для которых $|x(v)| \leqslant 1$; dv — евклидов элемент площади на S^{n-1}. Норму меры $\|\mu\|$ можно понимать и как наименьшее из чисел $m \geqslant 0$, для которых $\mu(\varphi) \leqslant m{\cdot}\|\varphi\|$ для любой функции $\varphi(u) \in C(S^{n-1})$. Здесь μ мера Радона на компактном пространстве S^{n-1} [2]. Через $C^a(T)$ обозначено пространство вещественных аналитических функций на компакте $T \subset \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим линейное уравнение первого рода

$$(A\mu)(u) \equiv f(u) = \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v\rangle)\mu(dv) \tag{1}$$

относительно меры μ на S^{n-1}. $K(\langle u, v\rangle)$ — заданная функция (ядро); $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Интегральные преобразования, определённые формулой (1), тесно связаны с задачами геометрической томографии, которая имеет дело с восстановлением компактного множества B в $\mathbb{R}^n$ по мерам проекций тела на подпространство и по мерам сечений тела подпространствами [3]. Приведём примеры.

1. Сферическое преобразование Радона $(Rf)(u)$:

$$(Rf)(u) = \int_{S^{n-1}} \delta(\langle u, v\rangle) f(v)\mu(dv),$$

Омский государственный технический университет
E-mail: stpnv@yandex.ru

где $\delta(\langle u, v\rangle)$ — дельта-функция и интегрирование выполняется по большой подсфере ортогональной вектору $u \in S^{n-1}$. Если $(n-1)f(v) = \rho^{n-1}$, где ρ радиальная функция звёздного тела B, то $(Rf)(u)$ есть объём пересечения тела B с подпространством $u^{\perp}$ ортогональным вектору $u \in S^{n-1}$.

2. Полусферическое преобразование $(Hf)(u)$:

$$(Hf)(u) = \int_{S^{n-1}} \chi(\langle u, v\rangle)\, f(v)\mu(dv),$$

где $\chi(\langle u, v\rangle)$ — функция Хевисайда. Если функция $f(v)$ равна произведению главных радиусов кривизны гладкой выпуклой поверхности ∂B в точке с нормалью v, то $(Hf)(u)$ представляет площадь «освещённой» части тела B.

3. Косинус преобразование $(Cf)(u)$:

$$(Cf)(u) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle|\, f(v)\mu(dv).$$

Если функция $f(v)$ равна произведению главных радиусов кривизны гладкой выпуклой поверхности ∂B в точке с нормалью v, то $(Cf)(u)$ равна $(n-1)$-мерному объёму проекции выпуклого тела B на подпространство $u^{\perp}$.

4. p-косинус преобразование $(C_p f)(u)$

$$(C_p f)(u) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle|^p f(v)\mu(dv).$$

5. Синус преобразование

$$(Sf)(u) = \int_{S^{n-1}} \sqrt{1 - \langle u, v\rangle^2} f(v)\mu(dv).$$

О применении этих и других интегральных преобразований вида (1) в геометрической томографии см. [3, 4] и цитированную там литературу.

В работе рассматриваются свойства интегральных операторов вида (1) на пространстве мер.

Теорема 1.

1. *Если K(t)$\in C[-1,1]$, то A — вполне непрерывный оператор из пространства $\mathcal{M}$ в пространство $C(S^{n-1})$.*

2. *Если K(t)$\in C[-1,1]$, то A — вполне непрерывный оператор из пространства $\mathcal{M}$ в пространство $L_p(S^{n-1};\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

3. *Если K(t)$\in L_p[-1,1], 1 \leqslant p \leqslant \infty$, то A — вполне непрерывный оператор из пространства $\mathcal{M}$ в пространство $L_p(S^{n-1};\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

4. *Если K(t)$\in C^k[-1,1]$, $1 < k < \infty$, то A — вполне непрерывный оператор из пространства $\mathcal{M}$ в пространство $C^k(S^{n-1})$.*

5. *Если K(t)$\in C^\infty[-1,1]$, то A — вполне непрерывный оператор из пространства $\mathcal{M}$ в пространство $C^\infty(S^{n-1})$.*

6. *Если* $K(t)\in C^a[-1,1]$, *то* A *— вполне непрерывный оператор из пространства* $\mathcal{M}$ *в пространство* $C^a(S^{n-1})$.

Доказательство. $n^0 1$. Пусть $\mathcal{M}' = \{\mu \in \mathcal{M} : \|\mu\| \leqslant m\}$ — ограниченное множество в пространстве $\mathcal{M}$ и множество функций $F = \{f : f = A\mu, \mu \in \mathcal{M}'\}$.

(a_0): множество функций F равномерно ограничено. Действительно, для всех $\mu \in \mathcal{M}'$ выполняется неравенство:

$$|f(u)| = |(A\mu)(u)| \leqslant \int_{S^{n-1}} |K(\langle u, v\rangle)|\, |\mu|(dv) \leqslant \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|K(t)|\, \|\mu\| \leqslant$$
$$\leqslant m \cdot \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|K(t)|$$

для любой функции $f \in F$.

(b_0): множество функций F равностепенно непрерывно. В самом деле, вследствие равномерной непрерывности функции $K(t)$ на отрезке $[-1,1]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_1 = \langle u_1, v\rangle$ и $t_2 = \langle u_2, v\rangle$ и любых $v \in S^{n-1}$, как только

$$|t_2 - t_1| = |\langle u_2, v\rangle - \langle u_1, v\rangle| \leqslant |u_2 - u_1| < \delta,$$

сразу же

$$|K(t_2) - K(t_1)| = |K(\langle u_2, v\rangle) - K(\langle u_1, v\rangle)| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Но тогда при $|\langle u_2, v\rangle - \langle u_1, v\rangle| \leqslant |u_2 - u_1| < \delta$ для любой функции $f \in F$ имеем

$$|f(u_2) - f(u_1)| = |(A\mu)(u_2) - (A\mu)(u_1)| \leqslant \int_{S^{n-1}} |K(\langle u_2, v\rangle) - K(\langle u_1, v\rangle)|\, |\mu|(dv) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{m} \cdot m = \varepsilon,$$

что означает равностепенную непрерывность множества функций F.

Таким образом, множество функций $F = \{f(u) : f(u) = (A\mu)(u),\ \mu \in \mathcal{M}'\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $C(S^{n-1})$, а поэтому A вполне непрерывный (компактный) оператор из $\mathcal{M}$ в $C(S^{n-1})$. Для нормы оператора A очевидна оценка $\|A\| \leqslant \max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}|K(t)|$.

$n^0 2$. В $n^0 1$ было доказано, что оператор A с непрерывным ядром является вполне непрерывным оператором из пространства $\mathcal{M}$ в пространство $C(S^{n-1})$.

Пусть $\{\mu_n\}$ — ограниченная последовательность мер из пространства $\mathcal{M}$. Оператор A с непрерывным ядром переводит последовательность $\{\mu_n\}$ в последовательность $\{f_n\} \subset C(S^{n-1})$, $f_n = A\mu_n$. Так как A вполне непрерывный оператор, то из последовательности $\{f_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_k\}$, сходящуюся равномерно к элементу $f_0 \in C(S^{n-1})$. Из вложений $C(S^{n-1}) \subset L_p(S^{n-1}), 1 \leqslant p \leqslant \infty$ следует

$$||f_k - f_0||_{L_p} \leqslant \mathrm{Const}\, ||f_k - f_0||_C.$$

Так как при $k \to \infty$, $f_k \rightrightarrows f_0$ равномерно, то $f_k \to f_0$ тем более в $L_p(S^{n-1})$. Это означает, что последовательность $\{f_k\}$ компактна в $L_p(S^{n-1};\mu)$. Следовательно, оператор A — вполне непрерывный оператор из $\mathcal{M}$ в $L_p(S^{n-1};\mu)$ для любого $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

$n^0 3$. Отметим для дальнейшего, что интегралы вида

$$\int_{S^{n-1}} K(\langle u,v\rangle)dv, \quad n \geqslant 3$$

не зависят от u и равны [6, с. 214]

$$|S^{n-1}| \int_{-1}^{1} K(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt.$$

Пусть $K(t) \in L_p[-1,1], 1 < p < \infty$. Непрерывные функции образуют в пространстве $L_p[-1,1]$ всюду плотное множество. Следовательно, найдётся последовательность $\{K_m(t)\}$ непрерывных на $[-1,1]$ функций, сходящаяся к $K(t)$ в метрике $L_p[-1,1], 1 < p < \infty$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} |K_m(t) - K(t)|^p dt \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Но тогда для $n \geqslant 3$ и $1 < p < \infty$

$$\int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|^p du = |S^{n-1}| \int_{-1}^{1} |K_m(t) - K(t)|^p (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt \leqslant$$
$$\leqslant |S^{n-1}| \int_{-1}^{1} |K_m(t) - K(t)|^p dt \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Обозначим через A_m интегральные операторы с непрерывными ядрами $K_m(\langle u,v\rangle)$. Применяя неравенство Гёльдера с показателем $1 < p < \infty$, получим:

$$|(A_m\mu)(u) - (A\mu)(u)| = \left| \int_{S^{n-1}} [K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)]\mu(dv) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)| \cdot 1 \cdot |\mu|(dv) \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|^p \; |\mu|(dv) \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_{S^{n-1}} 1^q \; |\mu|(dv) \right]^{\frac{1}{q}} =$$
$$\leqslant \left[\int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|^p \; |\mu|(dv) \right]^{\frac{1}{p}} \cdot ||\mu||^{\frac{1}{q}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \neq 1$.

Возводя это неравенство в степень p, интегрируя по мере Лебега du на S^{n-1} и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int_{S^{n-1}} |(A_m\mu)(u) - (A\mu)(u)|^p\, du \leqslant \int_{S^{n-1}} \left[\int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|^p\ |\mu|(dv)\right] du\cdot$$
$$||\mu||^{\frac{p}{q}} = \int_{S^{n-1}} \left[\int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|^p\, du\right] |\mu|(dv)\cdot \|\mu\|^{\frac{p}{q}} =$$
$$= \int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|^p\, du \cdot \int_{S^{n-1}} |\mu|(dv)\cdot ||\mu||^{\frac{p}{q}} =$$
$$= \int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|^p\, du \cdot ||\mu||^p,$$

так как $\|\mu\|\cdot\|\mu\|^{\frac{p}{q}} = \|\mu\|^{1+\frac{p}{q}} = \|\mu\|^p$.

Таким образом,

$$||(A_m\mu)(u) - (A\mu)(u)||_{L_p(S^{n-1};\mu)} \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|^p\, du\right)^{\frac{1}{p}}\cdot$$
$$\cdot ||\mu|| \leqslant |S^{n-1}|^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-1}^{1} |K_m(t) - K(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot ||\mu|| \tag{2}$$

и, следовательно,

$$||A_m - A|| \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|^p\, du\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$

$1 < p < \infty$.

Так как последовательность A_m вполне непрерывных операторов из $\mathcal{M}$ в $L_p(S^{n-1};\mu)$ с непрерывными ядрами равномерно сходится к оператору A с ядром класса $L_p[-1,1], 1 < p < \infty$, то оператор A также вполне непрерывный оператор из пространства $\mathcal{M}$ в пространство $L_p(S^{n-1};\mu)$.

В случае суммируемого ядра, $p = 1$, имеем

$$|(A_m\mu)(u) - (A\mu)(u)| \leqslant \int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|\cdot|\mu|(dv).$$

Интегрируя по u на S^{n-1} и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int_{S^{n-1}} |(A_m\mu)(u) - (A\mu)(u)|du \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} |K_m(\langle u,v\rangle) - K(\langle u,v\rangle)|du\right)\cdot ||\mu||.$$

Отсюда, как и выше, также следует компактность предельного оператора.

Наконец, пусть $p = \infty$, т. е. ядро $K(t) \in L_\infty[-1,1]$ и $K_m(t)$ последовательность непрерывных ядер, сходящаяся к $K(t)$ в $L_\infty[-1,1]$. Так как для любой функции $\varphi(u) \in L_\infty(S^{n-1};\mu)$

$$||\varphi(u)||_{L_\infty(S^{n-1};\mu)} = \lim_{p\to\infty} ||\varphi(u)||_{L_p(S^{n-1};\mu)},$$

то, переходя в (2) к пределу при $p \to \infty$, получим:

$$||(A_m\mu)(u) - (A\mu)(u)||_{L_\infty(S^{n-1};\mu)} \leqslant ||K_m(t) - K(t)||_{L_\infty[-1,1]} \cdot ||\mu|| \to 0,\ m \to \infty.$$

Следовательно, последовательность операторов A_m сходится равномерно к оператору A. Так как A_m — вполне непрерывные операторы из $\mathcal{M}$ в $L_\infty(S^{n-1};\mu)$, то и в этом случае предельный оператор A — вполне непрерывный как оператор из $\mathcal{M}$ в $L_\infty(S^{n-1};\mu)$.

$n^0 4$. Для доказательства этого утверждения понадобится теорема Титце-Урысона [7, с. 242]: *пусть Q непустой компакт, Q_0 — компактное подмножество Q и $f_0 \in C(Q_0, \mathbb{R})$. Тогда существует функция $f \in C(Q, \mathbb{R})$ такая, что $f|_Q = f_0$.*

Пусть $K(t) \in C^k[-1,1]$, $1 < k < \infty$. По доказанному в $n^0 1$ функция $f(u)$ по крайней мере непрерывна. По теореме Титце-Урысона функцию $f(u)$ можно продолжить в замкнутую область $\overline{Q}_h = \{x \in R^n : 1-h \leqslant |x| \leqslant 1+h, 0 < h < 1\}$.

Для $x \in \overline{Q}_h$ положим:

$$f^*(x) = \int_{S^{n-1}} K\left(\left\langle \frac{x}{|x|}, v\right\rangle\right) \mu(dv).$$

Если $K(t) \in C^k[-1,1]$, где $t = \left\langle \frac{x}{|x|}, v\right\rangle$, $1 < k < \infty$, то функция $K\left(\left\langle \frac{x}{|x|}, v\right\rangle\right)$ при каждом $v \in S^{n-1}$ имеет непрерывные производные в $\overline{Q}_h$ по x порядка α, $|\alpha| \leqslant k$, равные

$$D_x^\alpha K\left(\left\langle \frac{x}{|x|}, v\right\rangle\right) = \sum_{i=1}^{|\alpha|} d_i \cdot K^{(|\alpha|+1-i)}(t),$$

где коэффициенты d_i содержат производные от $t = \left\langle \frac{x}{|x|}, v\right\rangle$ порядка не выше i.

Следовательно, по теореме о дифференцируемости функции, представимой интегралом, функция $f^*(x) \in C^k(\overline{Q}_h)$ и

$$D^\alpha f^*(x) = \int_{S^{n-1}} D_x^\alpha K\left(\left\langle \frac{x}{|x|}, v\right\rangle\right) \mu(dv), \quad |\alpha| \leqslant k.$$

Значит $f(u) \in C^k(S^{n-1})$ и

$$D^\alpha f(u) \equiv D^\alpha f^*(x)|_{x=u} = \int_{S^{n-1}} D_x^\alpha\, K\left(\left\langle \frac{x}{|x|}, v\right\rangle\right)\Big|_{x=u} \mu(dv) = \tag{3}$$
$$= \sum_{i=1}^{|\alpha|} \int_{S^{n-1}} d_i \cdot K^{(|\alpha|+1-i)}(t)\big|_{x=u}\, \mu(dv).$$

Так как для производных $D^\alpha f(u)$ (которые определены равенством $D^\alpha f(u) = D^\alpha f^*(x)\big|_{x=u}$) имеет место оценка:

$$|D^\alpha f(u)| \leqslant c_\alpha ||K(t)||_{C^{|\alpha|}[-1,1]} \cdot ||\mu||, \quad |\alpha| \leqslant k,$$

то

$$||f(u)||_{C^k(S^{n-1})} \leqslant C \cdot ||\mu||$$

при $1 < k < \infty$. Постоянная C зависит от k и $||K(t)||_{C^k[-1,1]}$. Следовательно, оператор $A : \mathcal{M} \to C^k(S^{n-1})$ непрерывен.

Для доказательства полной непрерывности оператора A воспользуемся следующим критерием компактности в пространстве $C^k(\overline{G})$, идея доказательства которого содержится в известной теореме Арцела-Асколи.

Критерий компактности в пространстве $C^k(\overline{G})$. *Пусть G — связное ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Для того чтобы множество функций $\Phi \subset C^k(\overline{G})$ было компактно в $C^k(\overline{G})$ необходимо и достаточно, чтобы*
(a_k): множество Φ было ограничено, т. е.

$$|f(x)| \leqslant M, \ \ \forall x \in \overline{G}, \ \forall f \in \Phi;$$

(b_k): производные функций из множества Φ были равностепенно непрерывны: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ такое, что $\forall \ x, y \in \overline{G}$ из $|x - y| < \delta$ следует

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| < \varepsilon, \ \ \forall \, \alpha, \ |\alpha| = k, \ \forall f \in \Phi.$$

Пусть

$$(A\mu)(u) \equiv f(u) = \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v\rangle)\mu(dv)$$

и ядро $K(t) \in C^k[-1,1]$, $1 < k < \infty$. Выше доказано, что функция $f(u) \in C^k(S^{n-1})$, следовательно, оператор A действует из пространства $\mathcal{M}$ в пространство $C^k(S^{n-1})$ и является непрерывным оператором. Для доказательства полной непрерывности оператора A проверим выполнение условий (a_k) и (b_k).

Пусть $\mathcal{M}' = \{\mu \in \mathcal{M} : ||\mu|| \leqslant m\}$ — ограниченное множество в пространстве мер $\mathcal{M}$ и множество функций $F = \{f : f = A\mu, \ \mu \in \mathcal{M}'\}$.

(a_k). Множество функций F равномерно ограничено. Действительно, для всех $\mu \in \mathcal{M}'$ выполняется неравенство:

$$|(A\mu)(u)| \leqslant \int_{S^{n-1}} |K(\langle u, v\rangle)||\mu|(dv) \leqslant \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |K(t)| \, \|\mu\| \leqslant m \cdot \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |K(t)|$$

для любой функции $f \in F$.

(b_k). Производные от функций из множества F порядков $|\alpha| \leqslant k$ равностепенно непрерывны. Действительно, вследствие равномерной непрерывности производных $D^\alpha K(\langle u, v\rangle)$ на S^{n-1} для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых u_1, $u_2 \in S^{n-1}$ и для любого $v \in S^{n-1}$ из неравенства $|u_2 - u_1| < \delta$ следует неравенство:

$$|D^\alpha K(\langle u_2, v\rangle) - D^\alpha K(\langle u_1, v\rangle)| < \varepsilon.$$

Используя равенство (3), для любой функции $f \in F$ имеем:

$$|D^\alpha f(u_2) - D^\alpha f(u_1)| \leqslant \int_{S^{n-1}} |D^\alpha K(\langle u_2, v\rangle) - D^\alpha K(\langle u_1, v\rangle)| \cdot |\mu|(dv) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \cdot m,$$

что означает равностепенную непрерывность производных порядков $|\alpha| \leqslant k$ функций из множества F. По критерию компактности множество F компактно и оператор $A : \mathcal{M} \to C^k(S^{n-1})$ вполне непрерывен.

$n^0 5$. Прежде всего отметим, что оператор A с ядром $K(\langle u, v \rangle)$ класса $C^\infty[-1, 1]$ действует из пространства $\mathcal{M}$ в пространство $C^\infty(S^{n-1})$. Это следует из доказательства в $n^0 1$ и $n^0 4$, где показано, что для любого α, $|\alpha| \geqslant 0$

$$D^\alpha f(u) = D^\alpha f^*(x)|_{x=u} = \int_{S^{n-1}} D_x^\alpha \, K\left(\left\langle \frac{x}{|x|}, v \right\rangle\right)\Bigg|_{x=u} \mu(dv) = \qquad (4)$$

$$= \int_{S^{n-1}} D_u^\alpha K\left(\langle u, v \rangle\right) \mu(dv).$$

Поэтому, если ядро класса $C^\infty[-1, 1]$, то и функция $f(u) \in C^\infty(S^{n-1})$.

В пространстве $C^\infty(S^{n-1})$ бесконечное число раз дифференцируемых на S^{n-1} функций определим разделяющее семейство $\mathcal{P}$ согласованных полунорм $p_m(f)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, полагая

$$p_m(f) = \max_{u \in S^{n-1}, \, |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha f(u)| \, .$$

Обычным способом в $C^\infty(S^{n-1})$ введём топологию, принимая за локальную базу окрестностей нуля, например, множества

$$U_m = \left\{ f \in S^{n-1} : p_m(f) < \frac{1}{m+1}, \, m = 0, 1, 2, \ldots \right\}.$$

Так как $\mathcal{P} = \{p_m(f)\}_{m=0}^\infty$ счётное разделяющее семейство согласованных полунорм, то пространство $C^\infty(S^{n-1})$ является локально выпуклым счётно-нормированным пространством [1, с. 45], [8, с. 33]. Как известно, [8, с. 25], [14, с. 103], топологическое векторное пространство со счётной локальной базой метризуемо. Инвариантная относительно сдвигов метрика, совместимая с введённой топологией, может быть определена формулой

$$\rho(f, g) = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{2^m} \cdot \frac{p_m(f - g)}{1 + p_m(f - g)}. \qquad (5)$$

Пространство $(C^\infty(S^{n-1}); \rho)$ — полное [9, с. 16] локально выпуклое метрическое пространство, т. е. является пространством Фреше. Как показано в [8, с. 44], это пространство обладает свойством Гейне-Бореля: в нём любое ограниченное замкнутое множество компактно.

Поэтому для доказательства полной непрерывности оператора A достаточно установить, что множество

$$F = \left\{ f \in C^\infty(S^{n-1}) : f(u) = (A\mu)(u), ||\mu|| \leqslant m \right\}$$

замкнуто и ограничено в $(C^\infty(S^{n-1}); \rho)$.

Ограниченность множества F в локально выпуклом пространстве равносильна ограниченности каждой полунормы на F [8, с. 35]. Оценка $p_n(f) \leqslant c_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ следует из равенства (4).

Докажем замкнутость множества F. Пусть $f_0(u)$ — предельная точка (функция) множества F. Тогда существует последовательность $\{f_n(u)\} \subset F$, сходящаяся к $f_0(u)$ в метрике пространства $C^\infty(S^{n-1})$ и, следовательно, функция $f_0(u) \in C^\infty(S^{n-1})$, ввиду полноты $C^\infty(S^{n-1})$. Так как $f_n(u) \in F$ при каждом n, то по определению множества F существует ограниченная мера μ_n, $\|\mu_n\| \leqslant m$, такая что $f_n(u) = (A\mu_n)(u)$. По теореме Банаха-Алаоглу [10, с. 459], [2, с. 75] из ограниченной последовательности мер $\{\mu_n\}$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{\mu_k\}$. Пусть $\mu_k \underset{\text{слабо}}{\rightharpoonup} \mu_0$, т. е. $\mu_k(\varphi) \to \mu_0(\varphi)$ для любой функции $\varphi(u) \in C^\infty(S^{n-1})$, где значение меры μ на функции $\varphi(u) \in C^\infty(S^{n-1})$ понимается как интеграл по S^{n-1} от $\varphi(u)$ по мере μ [2, с. 63] и пусть $f_k(u) = (A\mu_k)(u)$. Последовательность мер μ_k слабо сходится к мере μ_0, поэтому для любого $u \in S^{n-1}$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v\rangle)\mu_k(dv) = \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v\rangle)\mu_0(dv) = \widehat{f_0}(u).$$

Так как ядро $K(\langle u, v\rangle)$ класса $C^\infty[-1, 1]$, то и функция $\widehat{f_0}(u)$ бесконечное число раз дифференцируема на S^{n-1}.

Покажем теперь, что если $\mu_k \underset{\text{слабо}}{\rightharpoonup} \mu_0$ и последовательность мер $\{\mu_k\}$ ограничена, $\|\mu_n\| \leqslant m$, то мера μ_0 также ограничена, $\|\mu_0\| \leqslant m$. Как отмечалось, норму меры на компактном пространстве можно определить следующим образом: $\|\mu\| = \{\inf c : |\mu(\varphi)| \leqslant c, \forall\varphi \in C(S^{n-1})\}$ [2, с. 60].

Так как $\mu_0(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(\varphi)$ для любой функции $\varphi(u) \in C^\infty(S^{n-1})$, то $|\mu_0(\varphi)| = \lim_{k\to\infty} |\mu_k(\varphi)|$. Для последовательности $\{\mu_k(\varphi)\}$ имеем оценку $|\mu_k(\varphi)| \leqslant \|\mu_k\| \cdot \|\varphi\|$. По условию числовая последовательность $\{\|\mu_k\|\}$ ограничена, $\|\mu_k\| \leqslant m$, поэтому существует её верхний предел $\overline{\lim}_{k\to\infty}\|\mu_k\| \leqslant m$. Следовательно,

$$|\mu_0(\varphi)| = \lim_{k\to\infty} |\mu_k(\varphi)| \leqslant \overline{\lim}_{k\to\infty}\|\mu_k\| \cdot \|\varphi\| \leqslant m\|\varphi\|, \ \forall\varphi \in C(S^{n-1}).$$

Отсюда получаем оценку $\|\mu_0\| \leqslant m$, поэтому функция $\widehat{f_0}(u) \in F$.

Так как последовательность функций $\{f_n(u)\}$ сходится к функции $f_0(u)$ в метрике пространства $C^\infty(S^{n-1})$, то и её подпоследовательность $\{f_k(u)\}$ также сходится к функции $f_0(u)$ в метрике пространства $C^\infty(S^{n-1})$. Значит $\widehat{f_0}(u) = f_0(u)$. Таким образом, предельная функция $f_0(u) \in F$, множество F замкнуто и оператор $A : \mathcal{M} \to C^\infty(S^{n-1})$ вполне непрерывен.

$n^0 6$. Пусть ядро $K(\langle u, v\rangle)$ оператора A — аналитическая на отрезке $[-1, 1]$ функция. В работах [11, 12] показано, что интегральный оператор A с аналитическим ядром действует из пространства $\mathcal{M}$ в пространство $C^a(S^{n-1})$.

В пространстве $C^a(S^{n-1})$ аналитических на S^{n-1} функций определим семейство $\mathcal{P}$ полунорм $p_m(f), m = 0, 1, 2, \dots$, локальную базу $\{U_m\}$ окрестностей нуля и инвариантную относительно сдвигов метрику ρ так же, как и в предыдущем пункте по формуле (5). Тогда пространство $(C^a(S^{n-1});\rho)$ будет локально выпуклым счётно-нормированным метрическим пространством. Установим полноту этого пространства.

Пусть $\{f_n(u)\}$ фундаментальная относительно метрики ρ последовательность, т. е. $\{f_n(u)\} \subset C^a(S^{n-1})$ и $\rho(f_i, f_j) \to 0$ при $i, j \to \infty$. Так как сходимость по метрике ρ есть «покоординатная» сходимость, то фундаментальная по метрике ρ последовательность будет фундаментальной по любой полунорме, поэтому $p_m(f_i - f_j) = \max_{u\in S^{n-1},|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha f_i(u) - D^\alpha f_j(u)| \to 0$. Следовательно, последовательность $\{D^\alpha f_i(u)\}$ сходится равномерно на S^{n-1} при любом фиксированном α, $|\alpha| \geqslant 0$ к некоторой непрерывной функции $f_\alpha(u)$. В частности, $f_i(u) \rightrightarrows f_0(u)$; $f_\alpha(u) = D^\alpha f_0(u)$, и поэтому $f_0(u) \in C^\infty(S^{n-1})$. Теперь следует показать, что функция f_0, которая является пределом равномерно сходящейся в метрике ρ последовательности $\{f_n(u)\}$ аналитических на компакте S^{n-1} функций, также является аналитической на S^{n-1} функцией. Это следует из теоремы Вейерштрасса для голоморфных функций нескольких комплексных переменных [9, с. 13]; [13, с. 289]: *если последовательность $\{f_i\}$ голоморфных (аналитических) в области $U \subset C^n$ функций сходится равномерно на компактных подмножествах U к некоторой функции f, то функция f голоморфна в U и для любого α последовательность $D^\alpha f_i$ сходится равномерно к $D^\alpha f$ на компактах из U.*

Пространство $(C^a(S^{n-1});\rho)$ — локально выпукло, и его топология порождается полной инвариантной относительно сдвигов метрикой ρ. Следовательно, оно является пространством Фреше [8].

Следуя [8, с. 44], покажем, что пространство Фреше $(C^a(S^{n-1});\rho)$ обладает свойством Гейне-Бореля: в нём ограниченное замкнутое множество компактно. Пусть $E \subset C^a(S^{n-1})$ — замкнутое ограниченное множество. Ограниченность означает, что каждая полунорма $p_m(f)$ ограничена на E. Пусть $p_m(f) \leqslant c_m < \infty$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, для всех $f \in E \subset C^a(S^{n-1})$. Из неравенств $|D^\alpha f(u)| \leqslant c_m$, справедливых на S^{n-1} при $|\alpha| \leqslant m$, следует, что для любого мультииндекса β с $|\beta| \leqslant m-1$, $m = 1, 2, \ldots$, семейство функций $\left\{D^\beta f(u) : f \in E\right\}$ равностепенно непрерывно на S^{n-1}. Применив теорему Арцела-Асколи к семейству функций $\left\{D^\beta f(u) : f \in E\right\}$ при каждом фиксированном β, а затем канторовскую диагональную процедуру, получим, что любая последовательность функций из E содержит такую подпоследовательность f_i, что для любого β последовательность $\{D^\beta f_i\}$ сходится равномерно на S^{n-1}. Следовательно, последовательность $\{f_i\}$ сходится в метрике пространства $C^a(S^{n-1})$, т е. предельная функция аналитическая как предел равномерно сходящейся в метрике ρ на компакте S^{n-1} последовательности аналитических функций. А так как по предположению множество E замкнуто, то предельная функция принадлежит множеству E. Это означает, что E компактное множество. Следовательно, пространство $(C^a(S^{n-1});\rho)$ действительно обладает свойством Гейне-Бореля.

Так как пространство $C^a(S^{n-1})$ обладает свойством Гейне-Бореля и не является локально ограниченным (иначе оно было бы конечномерным [8], стр. 25), то как следствие получаем, что в пространстве $C^a(S^{n-1})$ не существует нормы, совместимой с введённой топологией.

Остаётся доказать полную непрерывность оператора A. Так как пространство $(C^a(S^{n-1});\rho)$ является пространством Фреше и обладает свойством Гейне-Бореля, то для доказательства полной непрерывности оператора A, как и в предыдущем пункте, достаточно установить, что множество

$$F = \left\{f \in C^a(S^{n-1}) : f(u) = (A\mu)(u),\, ||\mu|| \leqslant m\right\}$$

замкнуто и ограничено в $(C^a(S^{n-1});\rho)$. Ограниченность полунорм $p_m(f) \leqslant c_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ также следует из равенства (4). Замкнутость множества F доказывается совершенно аналогично случаю пространства $C^\infty(S^{n-1})$. Следует только иметь в виду, что функция $\widehat{f}_0(u) \in C^a(S^{n-1})$, поскольку ядро $K(\langle u, v\rangle)$ интегрального оператора является аналитической функцией и предельная функция $f_0(u)$ принадлежит пространству $C^a(S^{n-1})$ ввиду его полноты. ■

Литература

1. Иосида К. Функциональный анализ. М. : Наука, 1967. 624 с.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. М. : Наука, 1967. 396 с.
3. Gardner R.J. Geometric tomography. New York : Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1995. 424 p.
4. Schneider R. Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory. New York : Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1993. 490 p.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М. : Наука, 1969. 1072 с.
6. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М. : Мир, 1990. 280 с.
7. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. Новосибирск : Институт математики, 2001. 354 с.
8. Рудин У. Функциональный анализ. М. : Мир, 1975. 446 с.
9. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М. : Мир, 1971. 32 с.
10. Данфорт Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. М. : ИЛ, 1962. 896 с.
11. Stepanov V.N. Firs-kind equations on a sphere and some problems of convex geometry // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2002. Vol. 20, N. 9, P. 1–20.
12. Степанов В.Н. Асимптотика собственных значений уравнения первого рода // Омский научный вестник. 2011. № 3(103). С. 41–44.
13. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М. : Наука, 1969. 576 с.
14. Канторович Л.В. Функциональный анализ. М. : Наука, 1977. 744 с.