Математические структуры и моделирование
2012, вып. 26, с. 89–93

УДК 519.16:004.372.2

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗОМОРФНОСТИ ГРАФОВ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЁННОЙ И ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

Д.Э. Вильховский, С.С. Ефимов

Задача проверки изоморфности графов часто возникает в химии, экономике, статистике, теоретической физике, математической лингвистике и других областях. Целью проведённого исследования являлся сравнительный анализ эффективности использования инвариантов и параллельных реализаций алгоритмов проверки изоморфности графов.

1. Методы определения изоморфности графов

Для определения изоморфности графов используется два основных подхода. В первом выполняется попытка перебора всех возможных перестановок. При наличии у разных графов совпадающих перестановок считается, что графы изоморфны. Недостатки этого подхода очевидны: из-за необходимости перебора всех $n!$ перестановок, при некотором значении n необходимое для вычисления время делает эту задачу нерешаемой в реальном масштабе времени. При втором подходе пытаются найти такой инвариант, из совпадения которого следовало бы, что графы изоморфны. К недостаткам этого подхода стоит отнести тот факт [1, с.193], что не существует полного инварианта, вычислимого за полиномиальное время.

1.1. Список основных инвариантов

Среди наиболее распространённых инвариантов решения задачи определения изоморфизма графов можно назвать следующие:

- индекс Винера,
- определитель матрицы смежности,
- число вершин и число дуг/рёбер,
- индекс Рандича,

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
E-mail: `vilkhovskiy@gmail.com`, `s_efimov@mail.ru`

- диаметр графа,
- индекс Хосойи,
- минимальное число вершин, необходимое для покрытия рёбер,
- упорядоченный по возрастанию или убыванию вектор собственных чисел матрицы смежности графа (спектр графа),
- характеристический многочлен матрицы смежности,
- упорядоченный по возрастанию или убыванию вектор собственных чисел матрицы смежности графа (спектр графа),
- характеристический многочлен матрицы смежности.

1.2. Описание инвариантов

В данной работе были рассмотрены следующие инварианты:

Число вершин и число дуг/рёбер. Для вычисления необходимо сверить число вершин с различными степенями

Индекс Винера — величина $w=\sum\limits_{\forall i,j} d(v_i, v_j)$, где $d(v_i, v_j)$ минимальное расстояние между вершинами v_i, v_j.

Индекс Рандича — величина $r = \sum\limits_{(v_i,v_j)\in V} \dfrac{1}{\sqrt{d(v_i) * d(v_j)}}$, где $d(v_i), d(v_j)$ степени вершин v_i, v_j соответственно.

1.3. Описание прямого алгоритма проверки изоморфности графов

Для распараллеливания задачи был написан метод, который позволяет определить итоговую перестановку по её номеру. В результате, каждая вычислительная машина в кластере получала для обработки свой диапазон значений. Далее результаты проверки отправлялись корневому процессу, который собирал результаты и анализировал их.

Проверка эффективности параллельной реализации прямого алгоритма исследовалась на следующих классах графов:

- планарный граф,
- дерево,
- двудольный граф.

2. Реализация алгоритмов

Для проверки эффективности инвариантов генерировались всевозможные неориентированные графы с заданным числом вершин m. По числу найденных изоморфных графов с помощью инварианта можно судить о его эффективности. Если это число совпадает с количеством изоморфных графов, найденных прямым методом, то выполняется достаточность инварианта для всех графов с числом вершин m.

При реализации алгоритмов использовались следующие технические и программные средства.

- Java SE 6 update 31
- MPJ Express v0.38
- 9 персональных компьютеров (кластер невыделенных рабочих станций)
  - ◇ Процессор — Dual-Core E5200 2,5 Ghz;
  - ◇ Память — 3,24 Гб;
  - ◇ Mandriva Linux;
  - ◇ Сеть — 100 Мбит/сек.

3. Результаты экспериментов

Число вершин и число дуг/рёбер

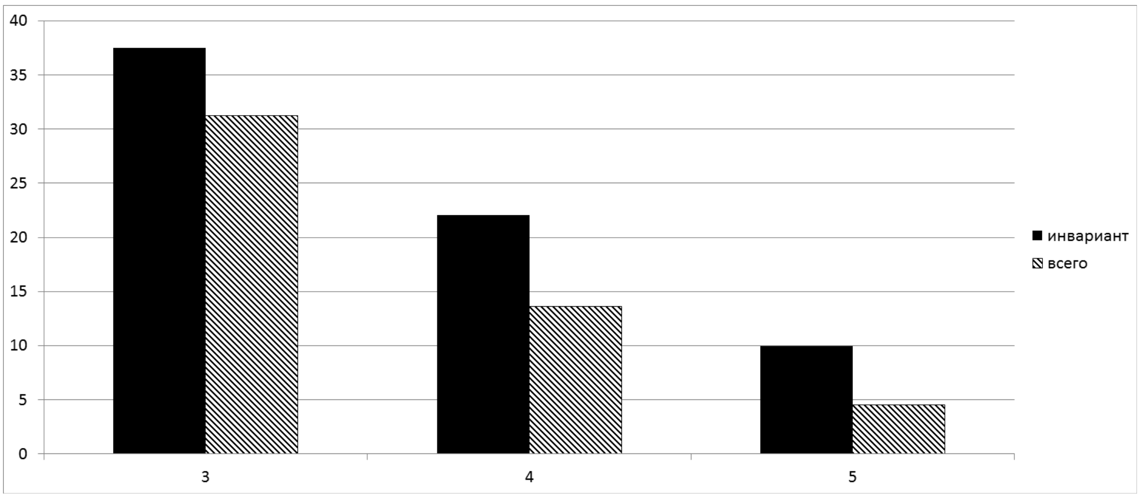

Рис. 1. Процент изоморфных графов, найденных с помощью инварианта «число вершин и число дуг/рёбер»

Из результатов видно, что данный инвариант не даёт достаточности для графов с числом вершин равным трём.

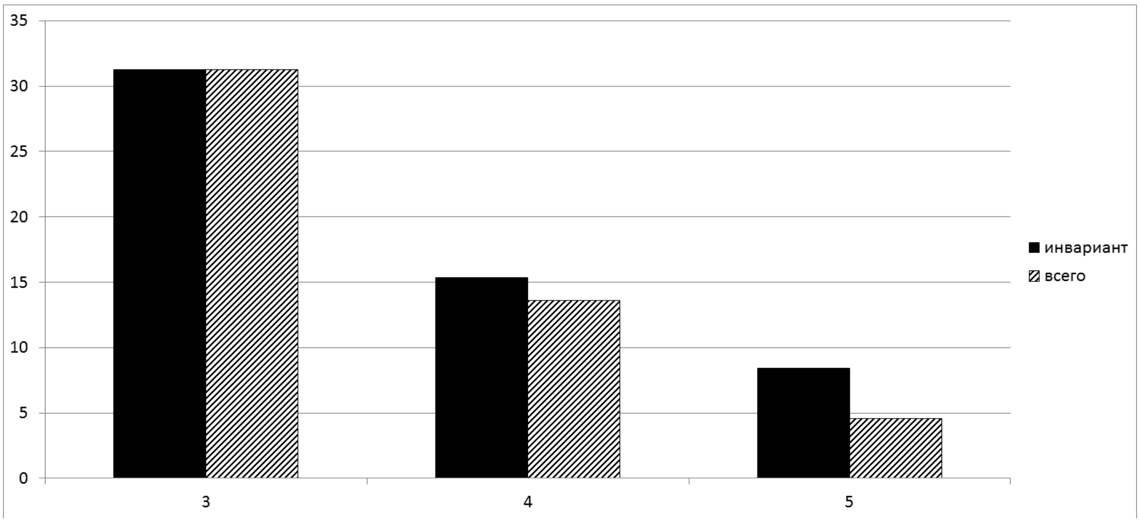

Рис. 2. Процент изоморфных графов, найденных с помощью инварианта Индекс Винера

Индекс Винера

Данный инвариант даёт достаточность для графов с числом вершин, не превосходящим трёх. Однако стоит заметить, что для его вычисления нам необходимо воспользоваться алгоритмом Флойда-Уоршелла, сложность которого составляет о(n^3).

Индекс Рандича

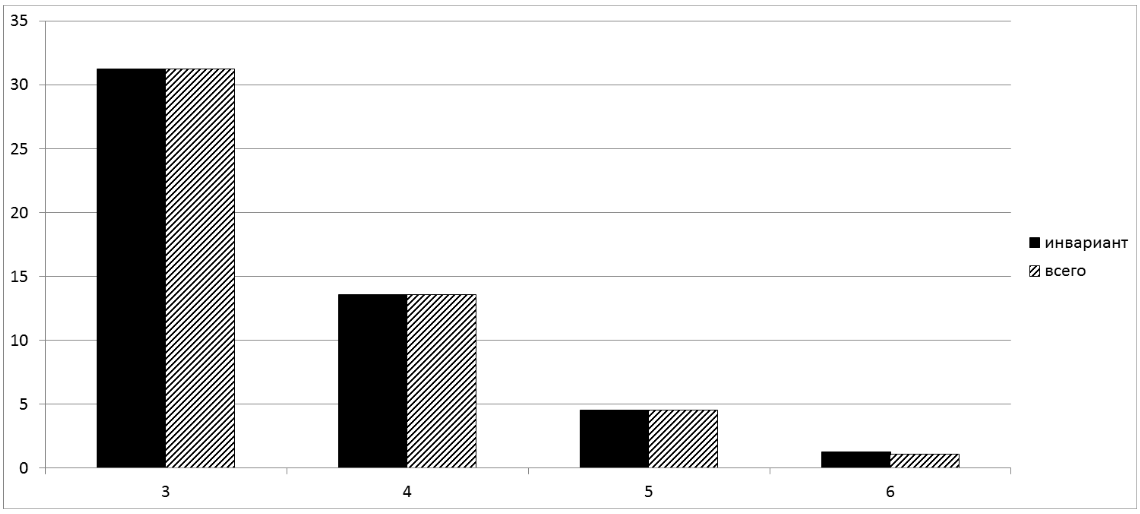

Рис. 3. Процент изоморфных графов, найденных с помощью инварианта Индекс Рандича

Данный инвариант является самым эффективным из всех рассмотренных в этой работе инвариантов. Он даёт достаточное условие для графов с числом вершин, не превосходящих 5.

По результатам анализа данных инвариантов можно сделать вывод, что при рассмотрении графов с числом вершин, превосходящих 5, придётся использовать прямой алгоритм проверки изоморфности графов.

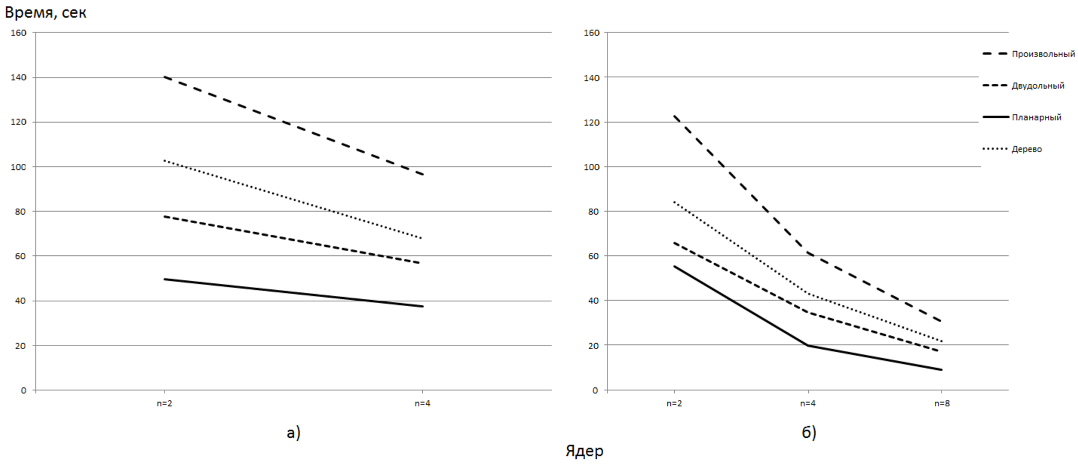

Рис. 4. Зависимость времени от числа ядер: а) распределённая память, б) общая

4. Заключение

В результате проведённых исследований оказалось, что в общем случае самым эффективным инвариантом является индекс Рандича, но его использование имеет смысл только тогда, когда число вершин у графов меньше 5, т.к. при большем количестве вершин условие достаточности не выполняется. Для более сложных графов применялся прямой алгоритм проверки. В результате использования его параллельной реализации в модели с общей памятью было получено небольшое ускорение, что связано с необходимостью частого выделения и освобождения памяти. Параллельная реализация в модели с распределённой памятью показала хорошее линейное ускорение.

Литература

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПБ : Питер, 2000. 304 с.