Математические
структуры и моделирование
2013. № 1(27). С. 11–13

УДК 514.12

РАЗЛИЧАЮЩИЕ И ГЛОБАЛЬНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

А.Н. Романов

В работе изучаются условия, которые приводят хронологическое качество пространства-времени к достаточно сильному условию — глобальной гиперболичности. Ключевым моментом является поведение лоренцевой функции расстояния.

Работа посвящена исследованию поведения лоренцева расстояния на различающих и глобально гиперболических пространствах.

Будем использовать следующие вспомогательные результаты (см. 1-3).

Лемма 1. *Пространство-время* (M, g) *глобально гиперболично тогда и только тогда, когда оно сильно причинно и* (M, g') *удовлетворяет условию конечности расстояния для всех* $g' \in C(M, g)$.

Здесь через $C(M, g)$ обозначен класс лоренцевых метрик на многообразии M, глобально конформных метрике g :

$$g' \in C(M, g) \Leftrightarrow g' = \Omega g$$

для некоторой гладкой функции $\Omega : M \to (0, \infty)$.

Лемма 2. *Пусть пространство-время* (M, g) *принадлежит классу* A. *Если для некоторых точек* $p, s \in M$, *множество* $J_p^+ \cap J_s^-$ *не замкнуто в* M, *а* $I_p^+ \cap I_s^- \neq \emptyset$, *то тогда (замкнутое) множество* $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ *не является компактным.*

Будем считать, что к классу пространств A не относятся лишь те пространства, в которых одновременно имеют место как явление захвата причинных кривых, так и явление конечной недостижимости (между некоторыми точками).

Лемма 3. *Пусть* (M, g) *— пространство-время. Если для некоторых точек* $p, s \in M$, *множество* $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ *не является компактным, то существует лоренцева метрика* $g' \in C(M, g)$, *глобально конформная метрике* g *такая, что* $d_{g'}(a, b) = \infty$ *для некоторых точек* $a, b \in M$.

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
E-mail: `aroms@yandex.ru`

Теперь применим указанные результаты к исследованию причинной структуры пространства-времени (M, g), для которого условие конечности расстояния является инвариантом при конформных преобразованиях метрики g.

Теорема 1. *Пусть* (M, g) *— различающее пространство-время класса* A. *Если пространство-время* (M, g') *удовлетворяет условию конечности расстояния для всех* $g' \in C(M, g)$, *то пространство-время* (M, g) *является глобально гиперболическим.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения сводится к следующим рассуждениям. Покажем сначала, что в условиях теоремы пространство-время (M, g) является причинно простым (то есть различающим с дополнительным условием, что множества J_p^+ и J_p^- замкнуты для всех $p \in M$).

Так как различаемость предполагается выполненной, остаётся доказать замкнутость множеств J_p^+ и J_p^-. Проведём доказательство, например, для множества J_p^+ : покажем, что оно замкнуто для любой точки $p \in M$ (замкнутость J_p^- доказывается аналогично).

Допустим обратное: множество J_p^+ не замкнуто, то есть существует точка $q \in cl(J_p^+) \setminus J_p^+$. Возьмём в I_q^+ произвольную точку r и покажем, что множество $J_p^+ \cap J_r^-$ не пусто и не является замкнутым..

Действительно, так как $q \in cl(J_p^+)$, то существует последовательность точек $\{q_n\} \subset J_p^+$, сходящаяся к $q : q_n \to q$ (сходимость в исходной топологии многообразия M). Так как $q \in I_r^-$ (утверждение, эквивалентное тому, что $r \in I_q^+$), а множество I_r^- открыто (см. [6], лемма 2.5), то некоторая окрестность точки q так же принадлежит I_r^-. Так как $q_n \to q$, то, начиная с некоторого n, все точки q_n попадают в эту окрестность, а следовательно и в I_r^-, то есть для достаточно больших n имеем: $q_n \in I_r^-$ или иначе: $q_n << r$.

Таким образом, $p \leq q_n$, $q_n << r$. Отсюда получаем: $p << r$ (по свойствам соотношений $\leq, <<$), то есть $r \in I_p^+$.

В результате имеем: множество $I_p^+ \cap I_r^-$ не пусто (так как существует времениподобная кривая α_{pr}, соединяющая p с r — её существование гарантировано соотношением $p << r$; и если $s \in \alpha_{pr}$, $s \neq p$, $s \neq r$, то $s \in I_p^+ \cap I_r^-$).

Далее из соотношений

$$I_p^+ \subset J_p^+,\ I_r^- \subset J_r^-,\ I_p^+ \cap I_r^- \neq \emptyset$$

получаем:

$$J_p^+ \cap J_r^- \neq \emptyset.$$

Из приведённых ниже соотношений видно, что множество $J_p^+ \cap J_r^-$ не замкнуто в M :

$$q \in I_r^- \subset int(J_r^-),\ q \in cl(J_p^+),\ q \notin J_p^+ \implies$$

$$\implies q \in cl(J_p^+ \cap J_r^-) \setminus (J_p^+ \cap J_r^-)$$

Тогда по лемме 2 получаем, что множество $cl(J_p^+ \cap J_r^-)$ не компактно. Далее, следуя лемме 3, можно найти метрику $g' \in C(M, g)$, глобально конформную метрике g такую, что пространство-время (M, g') не удовлетворяет условию конечности лоренцева расстояния, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, множества J_p^+ и J_p^- замкнуты для любой точки $p \in M$, что вместе с различаемостью (M, g) указывает на его причинную простоту, то есть пространство-время (M, g) является причинно простым.

Причинная простота пространства-времени (M, g) автоматически влечёт за собой его сильную причинность. Теперь по лемме 1 сразу получаем желаемый результат: пространство-время (M, g) является глобально гиперболическим. ■

Литература

1. Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. М. : Мир, 1985.
2. Пенроуз Р. Структура пространства-времени. М. : Мир, 1972.
3. Malament D.B. The class of continuous timelike curves determines the topology of spasetime // J. Math. Phys. 1977. V. 18, N. 7. P. 1399–1404.