Математические структуры и моделирование
2014. №1(29). С. 4–12

УДК 519.214.5

УСЛОВИЯ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ СУММ

А.Г. Гринь, профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Приводятся «общеупотребительные» условия регулярности, обеспечивающие выполнение минимальных условий слабой зависимости в предельных теоремах для обобщенных сумм.

Ключевые слова: обобщённое суммирование, минимальные условия слабой зависимости, λ-перемешивание, абсолютная регулярность.

В работе [1] введён класс операций, названный там обобщённым суммированием, доказаны предельные теоремы для обобщённых сумм независимых случайных величин, описан класс предельных распределений и получены минимальные условия слабой зависимости в предельных теоремах для обобщённых сумм. В настоящей статье приводятся условия слабой зависимости, обеспечивающие выполнение этих минимальных условий.

Пусть $x \oplus y$ - бинарная операция на $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$, о которой мы будем предполагать, что она удовлетворяет условиям $A_1 - A_4$ (условия $(\mathbf{A})$):

A_1. Ассоциативность: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,\ x, y, z \in \mathbb{D}$;

A_2. Коммутативность: $x \oplus y = y \oplus x,\ x, y \in \mathbb{D}$;

A_3. $x \oplus 0 = x,\ x \in \mathbb{D}$;

A_4. Равномерная непрерывность в следующем смысле:
Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что из $|y| < \delta$ следует $|x \oplus y - x| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{D}$;

Этим условиям удовлетворяют, например, $x \oplus y = x + y,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$, $x \vee y = \max\{x, y\}, \mathbb{D} = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $x \wedge y = \min\{x, y\},\ \mathbb{D} = \mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, а не удовлетворяют, скажем, $x \oplus y = xy$, и $x \oplus y = x + y\ (mod\ d),\ d > 0,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$ (не выполняются A_3 и A_4).

Если бинарная операция $x \otimes y$ удовлетворяет условиям $(\mathbf{A})$, а $f(x)$ возрастающая выпуклая (вниз) функция такая, что $f(0) = 0,\ f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, то бинарная операция $x \oplus y = f^{-1}(f(x) \otimes f(y))$ также удовлетворяет условиям $(\mathbf{A})$ [1]. К примеру, бинарные операции $x \oplus y = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x \oplus y = \ln(e^x + e^y - 1)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$ и т. п. удовлетворяют условиям $(\mathbf{A})$.

Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность случайных величин. Обозначим

$$X_{k,m}(b) = \left(\frac{\xi_k}{b}\right) \oplus ... \oplus \left(\frac{\xi_m}{b}\right), \quad X_n(b) = X_{1,n}(b),$$

$$X_n = X_n(1), \quad \overline{X}_n(b) = \max_{1\le k\le n} |X_k(b)|, \; k,m,n \in \mathbb{N}\,, \; b > 0,$$

Будем говорить, что выполнено условие A_5, если при любых $x > 0$, $y_i \in \mathbb{D}\,, \; i = 1,...n, \; n \ge 2$

$$(xy_1) \oplus ... \oplus (xy_n) = x(y_1 \oplus ... \oplus y_n). \tag{1}$$

Например, $x \oplus y = x + y$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}\,,$ $x \oplus y = (x^p + y^p)^{1/p}\,,$ $p \ge 1$, $x \oplus y = x \vee y$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$, удовлетворяют условию A_5.

Если $\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$ и

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi_1 \ge x\}}{\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge x\}} \to a, \quad \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 < -x\}}{\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge x)\}} \to 1 - a, \; x \to +\infty, \; 0 \le a \le 1,$$

то говорят, что хвосты распределения ξ_1 имеют согласованное правильное изменение порядка $-\rho$. В этом случае

$$a_n = \sup\{x : n\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge x\} \ge 1\}$$

является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\rho$ [2, стр. 111],

$$n\mathbf{P}\{\xi_1 \ge xa_n\} \to \frac{a}{x^\rho}, \quad n\mathbf{P}\{\xi_1 < -xa_n\} \to \frac{1-a}{x^\rho}, \quad n \to \infty \tag{2}$$

[2, стр. 94] и $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty, \; 0 < p < \rho$ [2, стр. 103].

Пусть

$$F_\rho(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a}{x^\rho}, & x \ge 1 \\ 1 - a, & -1 < x < 1 \\ \dfrac{1-a}{|x|^\rho}, & x \le -1 \end{cases}.$$

Если ξ и η - независимые случайные величины с функциями распределения F_ξ и F_η, то будем обозначать $F_\xi * F_\eta = F_{\xi\oplus\eta}$.

Предположим, что при каждом $x \in \mathbb{R}$ существует

$$H_\rho(x) = \lim_{k\to\infty} F_\rho^{*k}\left(k^{1/\rho}x\right). \tag{3}$$

Пусть при любых $n \in \mathbb{N}$ и $z > 0$ $\mathbf{E}|X_n(z)|^p < \infty$. Положим

$$b_n(p) = \inf\left\{z > 0 : \max_{1\le k\le n} \mathbf{E}|X_k(z)|^p \le 1\right\}.$$

Сформулируем основные результаты из [1] (теоремы 1 и 2).

Теорема 1. *Пусть операция* $\oplus$ *удовлетворяет условиям* $A_1 - A_5$ *на* $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. *Для того, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n(a_n) < x\} = H_\rho(x), \; x \in \mathbb{R}\,, \tag{4}$$

где $H_\rho(x)$ *удовлетворяет*

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - H_\rho\left(k^{1/\rho}x\right)\right) = \frac{a}{x^\rho}, \quad \lim_{k\to\infty} kH_\rho\left(-k^{1/\rho}x\right) = \frac{1-a}{x^\rho}, \ x > 0, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы хвосты распределения ξ_1 *имели согласованное правильное изменение порядка* ρ *и при любых* $0 < p < \rho$ *и при некотором* $\varepsilon > 0$ *выполнялось*

$$\liminf_{n\to\infty} n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq \varepsilon b_n(p)\} > 0. \tag{6}$$

Будем писать $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, $\xi_n \stackrel{d}{\to} \eta$ и $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [4, § 28.1]). Через $\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что $\hat{\xi}_k \stackrel{d}{=} \xi_k, \ k = 1, 2, ..., n$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_n, \ n = 1, 2, ...\}$ *– стационарная последовательность, у которой хвосты распределения* ξ_1 *имеют согласованное правильное изменение порядка* $-\rho$*, а операция* $\oplus$ *удовлетворяет условиям* $A_1 - A_5$ *на* $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ *. Для того, чтобы выполнялось (4), где* $H_\rho(x)$ *удовлетворяет (5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие утверждения*

а)

$$X_{n+m}(a_{n+m}) \stackrel{d}{\sim} \widehat{X}_n(a_{n+m}) \oplus \widehat{X}_m(a_{n+m}), \quad n + m \to \infty \tag{R$_1$}$$

(здесь символ $n + n \to \infty$ *означает, что* (R_1) *выполняется при* $n \to \infty$ *и при любой последовательности* $m = m(n)$*);*

б) при любом $x > 0$ *и при любой достаточно медленно растущей последовательности* $k = k(n) \to \infty, \ n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\pm X_n(a_{kn}) \geq x\} \sim n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \geq xa_{kn}\}, \ n \to \infty. \tag{R$_2$}$$

Теорему 2 можно интерпретировать так: условия (R_1) и (R_2) являются минимальными условиями слабой зависимости, при которых выполняется (4).

Далее в настоящей работе приводятся условия слабой зависимости, обеспечивающие выполнение (R_1) и (R_2).

Пусть $\mathcal{F}_{\leq n}$ и $\mathcal{F}_{\geq n}$ – σ -алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leq n\}$ и $\{\xi_i : i \geq n\}$. Если для некоторой функции $\lambda(x) > 0$ такой, что $\lambda(x) \to 0, \ x \to 0$

$$\sup\left\{\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\lambda(\mathbf{P}(B))} : A \in \mathcal{F}_{\leq 0}, B \in \mathcal{F}_{\geq 1} \text{ или } A \in \mathcal{F}_{\geq 1}, B \in \mathcal{F}_{\leq 0}\right\} < 1,$$

то говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию* λ*-перемешивания* (см. [5]).

Обозначим

$$\delta_n = \lambda\left(\max_{1\leq k\leq n} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geq \delta\}\right).$$

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta > 0$ *такое, что при* $x > 0,\ m \le n$

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1}(c_n) \ge x + \varepsilon\} \le (1-\delta_n)^{-1}\mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \ge x\}.$$

Доказательство. В силу свойства A_4 для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при любом $x > 0$

$$\{\xi \ge x + \varepsilon,\ |\eta| < \delta\} \subseteq \{\xi \oplus \eta \ge x\},$$

$$\{|\xi| \ge x + \varepsilon,\ |\eta| < \delta\} \subseteq \ \{|\xi \oplus \eta| \ge x\}. \tag{7}$$

Аналогично из свойств $A_1 - A_4$ выводится

$$\{\xi \ge x + \varepsilon,\ |\eta| < \delta,\ |\zeta| < \delta\} \subseteq \{\xi \otimes \eta \oplus \zeta \ge x\},$$

$$\{|\xi| \ge x + \varepsilon,\ |\eta| < \delta,\ |\zeta| < \delta\} \subseteq \{|\xi \otimes \eta \oplus \zeta| \ge x\}. \tag{8}$$

Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1}(c_n) < x + \varepsilon \le |X_k(c_n)|\},\ k = 1, ..., m$. Тогда $E_iE_j = \varnothing,\ i \ne j,\ \bigcup\limits_{k=1}^{m-1} E_k = \{\overline{X}_{m-1}(c_n) \ge x + \varepsilon\}$, а в силу (7) найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$\{|X_k(c_n)| \ge x + \varepsilon,\ |X_{k+1,m}(c_n)| < \delta\} \subseteq \{|X_m(c_n)| \ge x\},$$

то есть

$$\{|X_m(c_n)| < x\} \subseteq \{|X_k(c_n)| < x + \varepsilon\} \cup \{|X_{k+1,m}(c_n)| \ge \delta\},$$

откуда

$$\{|X_m(c_n)| < x,\ E_k\} \subseteq \{|X_{k+1,m}(c_n)| \ge \delta,\ E_k\},\ k = 1, ..., m-1. \tag{9}$$

С помощью (9) и условия λ-перемешивания получаем

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1}(c_n) \ge x + \varepsilon\} \le \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \ge x\} + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| < x,\ E_k\} \le$$

$$\le \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \ge x\} + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}\{|X_{k+1,m}(c_n)| \ge \delta,\ E_k\} \le$$

$$\le \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \ge x\} + \lambda\left(\max_{1\le k\le n} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \ge \delta\}\right) \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}\{E_k\} =$$

$$= \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \ge x\} + \delta_n \cdot \mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1}(c_n) \ge x + \varepsilon\},$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Лемма 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta > 0$ *такое, что при любом* $x > 0$

$$\mathbf{P}\{\pm X_n(c_n) \geq x\} \geq n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \geq (x+\varepsilon)c_n\}(1-3\delta_n)).$$

Неравенство с плюсом доказывается, когда $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{D}$*, а с минусом – когда* $\mathbb{R}_- \subseteq \mathbb{D}$.

Доказательство. Пусть $A_0 = \varnothing,\ A_n = \{\overline{X}_{n-1}(c_n) < \delta,\ \xi_n \geq (x+\varepsilon)c_n\}$

$$A_k = \{\overline{X}_{k-1}(c_n) < 2\delta,\ \xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n,\ |X_{k+1,n}(c_n)| < \delta\},\ 1 \leq k \leq n-1.$$

В силу (8) и (9) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x\} \geq \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\overline{A}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{k-1} A_k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{A_k\} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{A_k \cdot \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right\}. \tag{10}$$

При $1 \leq k \leq n-1$ с помощью λ-перемешивания получаем

$$\mathbf{P}\{A_k\} = \mathbf{P}\left\{\xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n\right\} -$$

$$-\mathbf{P}\left\{(\xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n) \cdot \left(\left\{\overline{X}_{k-1}(c_n) \geq 2\delta\right\} \cup \{|X_{k+1,n}(c_n)| \geq \delta\}\right)\right\} \geq$$

$$\geq \mathbf{P}\left\{\xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n\right\}\left(1 - \lambda\left(\mathbf{P}\{|X_{k+1,n}(c_n)| \geq \delta\}\right) - \lambda\left(\mathbf{P}\{\overline{X}_{k-1}(c_n) \geq 2\delta\}\right)\right). \tag{11}$$

$\mathbf{P}\{A_n\}$ оценивается аналогично. Без ограничения общности $\delta > 0$ можно считать таким, что

$$\{|X_{j-1}(c_n)| < 2\delta,\ \xi_j \geq (x+\varepsilon)c_n\} \subseteq \{|X_{j-1}(c_n)| < 2\delta,\ X_j(c_n) \geq x\}$$

так что если $2\delta < x$, то $\mathbf{P}\left\{A_k \cdot \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right\} \leq$

$$\leq \mathbf{P}\left\{\xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n,\ \bigcup_{j=1}^{k-1}\left(\overline{X}_{j-1}(c_n) < 2\delta, \xi_j \geq (x+\varepsilon)c_n\right)\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left\{\xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n\right\}\lambda\left(\mathbf{P}\{\overline{X}_{k-1}(c_n) \geq 2\delta\}\right). \tag{12}$$

и тогда из (10), (11) и (12) и леммы 1 следует

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x\} \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{\xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n\right\}(1-3\delta_n).$$

Вероятность $\mathbf{P}\{-X_n(c_n) \geq x\}$ оценивается аналогично.

Лемма доказана. ∎

Следующее предложение – это модификация леммы 3.1 из [8].

Лемма 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при достаточно больших n*

$$\mathbf{P}\{\pm X_n(c_n) \geq x + \varepsilon\} \leq (1 - \delta_n)^{-1}\delta_n \mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geq \delta\} + n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \geq xc_n\}.$$

(Предположения об области $\mathbb{D}$ те же, что и в лемме 2.)

Доказательство. Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1}(c_n) < 2\delta \leq |X_k(c_n)|\}$, $k = 1, ..., n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} E_k = \{\overline{X}_{n-1}(c_n) \geq 2\delta\}$. В силу (9) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при $1 \leq k \leq n-1$

$$\{|X_{k+1,n}(c_n)| < \delta,\ E_k,\ \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\} \subseteq$$
$$\subseteq \{X_n(c_n) < x + \varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\},$$

откуда

$$\{X_n(c_n) \geq x + \varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\} \subseteq \{E_k,\ |X_{k+1,n}(c_n)| \geq \delta\}. \qquad (13)$$

Аналогично выводится

$$\{X_n(c_n) \geq x + \varepsilon, \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\} \subseteq \{\overline{X}_{n-1}(c_n) \geq 2\delta,\ \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\}.$$

Отсюда

$$\{X_n(c_n) \geq x + \varepsilon,\ \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\} =$$
$$= \{X_n(c_n) \geq x + \varepsilon,\ \overline{X}_{n-1}(c_n) \geq 2\delta,\ \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\}. \qquad (14)$$

С помощью (13) и (14) получаем $\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x + \varepsilon\} \leq$

$$\leq \mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x + \varepsilon, \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\} + \mathbf{P}\{\max_{1\leq k\leq n} \xi_k \geq xc_n\} =$$
$$= \mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x + \varepsilon, \overline{X}_{n-1}(c_n) \geq 2\delta, \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\} +$$
$$+ \mathbf{P}\{\max_{1\leq k\leq n} \xi_k \geq xc_n\} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x + \varepsilon, E_k, \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\} +$$
$$+ \mathbf{P}\{\max_{1\leq k\leq n} \xi_k \geq xc_n\} \leq n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xc_n\} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{|X_{k+1,n}(c_n)| \geq \delta, E_k\} \leq$$
$$\leq n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xc_n\} + \lambda \left(\max_{1\leq k\leq n} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geq \delta\} \right) \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{E_k\} =$$
$$= \delta_n \mathbf{P}\{\overline{X}_{n-1}(c_n) \geq 2\delta\} + n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xc_n\}.$$

Отсюда с помощью леммы 1 выводится оценка для $\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x + \varepsilon\}$ в формулировке леммы. Оценка для $\mathbf{P}\{-X_n(c_n) \geq x + \varepsilon\}$ доказывается аналогично. ■

Следствие 1. *Из лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение: если последовательность положительных чисел $\{c_n\}$ такова, что при любом $\delta >$ 0*

$$\delta_n = \lambda \left(\max_{1\le k\le n} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \ge \delta\} \right) \to 0,\ n \to \infty$$

и при любых $x > 0,\ \delta > 0$ выполняется следующее предположение:

$$\delta_n \mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \ge \delta\} = o\left(n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \ge xc_n\}\right),\ n \to \infty, \tag{15}$$

то

$$\mathbf{P}\{\pm X_n(c_n) \ge x\} \sim n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \ge xc_n\},\ n \to \infty. \tag{16}$$

Пусть хвосты распределения ξ_1 имеют согласованное правильное изменение порядка $-\rho,\ \rho > 0$. Тогда $\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge x\}$ правильно меняющаяся функция порядка $-\rho$, а $\{a_n\}$ – правильно меняющаяся последовательность порядка $1/\rho$. Если выполняется (6), то $b_n(p) = O(a_n),\ n \to \infty$. Пусть $k = k(n) \to \infty$. Если $k(n)$ растёт достаточно медленно, то

$$\max_{1\le m\le n} \mathbf{P}\{|X_m(a_{nk})| \ge \delta\} \le \frac{\max\limits_{1\le m\le n} \mathbf{E}|X_m|^p}{\delta^p a_{nk}^p} = O(a_n^p a_{nk}^{-p}) = O\left(k^{-p/\rho}\right).$$

Отсюда

$$\max_{1\le m\le n} \mathbf{P}\{|X_m(a_{nk})| \ge \delta\}\mathbf{P}\{|X_n(a_{nk})| \ge \delta\} = O\left(k^{-2p/\rho}\right),$$

и так как в силу (2) $n\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge xa_{nk}\} \sim (kx^\rho)^{-1}$, то при $p > \rho/2$ выполняется условие (15) и из (16) получаем

$$\mathbf{P}\{\pm X_n(a_{nk}) \ge x\} \sim n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \ge xa_{nk}\}.$$

Таким образом, мы доказали, что, если последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию λ-перемешивания, хвосты распределения ξ_1 имеют согласованное правильное изменение порядка $-\rho,\ \rho > 0$ и выполнено (6), то имеет место R_2.

Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию абсолютной регулярности, если

$$\beta(n) = \mathbf{E} \sup_{A\in\mathcal{F}_{\ge n}} |\mathbf{P}(A|\mathcal{F}_{\ge n}) - \mathbf{P}(A)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

(см. [3, 7]).

Доказывается [3, с.167], что

$$\beta(n) = \frac{1}{2} \sup \sum_{i,j} \left[\mathbf{P}(A_i B_j) - \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B_j)\right], \tag{17}$$

где sup берётся по всевозможным конечным разбиениям пространства элементарных исходов Ω на непересекающиеся события $(A_1, ..., A_k)$, $(B_1, ..., B_l)$ такие, что $A_i \in \mathcal{F}_{\le 0},\ B_j \in \mathcal{F}_{\ge n},\ i = 1, ..., k,\ j = 1, ..., l$. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\beta(n) \le \varphi(n) = \sup_{A\in\mathcal{F}_{\le n}, B\in\mathcal{F}_{\ge n}} |\mathbf{P}(A|B) - \mathbf{P}(A)|,$$

то есть стационарные последовательности, удовлетворяющие условию равномерно сильного перемешивания ($\varphi(n) \to 0,\ n \to \infty$), являются абсолютно регулярными.

Пусть ξ измерима относительно $\mathcal{F}_{\geq 0}$, η – относительно $\mathcal{F}_{\geq n}$, $\mathbf{P}_\xi$, $\mathbf{P}_\eta$ и $\mathbf{P}_{\xi,\eta}$– распределения ξ, η, и (ξ, η) соответственно. Из (17) следует

$$\sum_{i,j} [\mathbf{P}_{\xi,\eta}(C_i \times D_j) - \mathbf{P}_\xi(C_i)\mathbf{P}_\eta(D_j)] \leq 2\beta(n), \tag{18}$$

где $(C_1, ..., C_k)$ и $(D_1, ..., D_l)$ – разбиения $\mathbb{R}$ на непересекающиеся борелевские множества. Так как $\mathbf{P}_{\xi,\eta} \ll \mathbf{P}_\xi \times \mathbf{P}_\eta$, из (18) следует

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\,\mathbf{P}_{\xi,\eta}}{d\,\mathbf{P}_\xi \times \mathbf{P}_\eta}(x,y) - 1 \right| \mathbf{P}_\xi \times \mathbf{P}_\eta(dxdy) \leq 2\beta(n). \tag{19}$$

Докажем, что в предположениях теоремы 2 из условия абсолютной регулярности следует (R_1).

Прежде всего отметим, что $a_n \to \infty$ как правильно меняющаяся функция положительного порядка [6, с.24], так что $\xi_1/a_n \to 0$ по вероятности и из свойства A_4 следует, что $X_k(a_n) \to 0$ по вероятности при любом натуральном k и, следовательно, при достаточно медленно растущих $k = k(n) \to \infty$. В силу стационарности последовательности $\{\xi_n\}$ $X_{n+1,n+k}(a_{n+m}) \stackrel{d}{=} X_{n+m+1,n+m+k}(a_{n+m}) \stackrel{d}{=}$ $\stackrel{d}{=} X_k(a_{n+m})$, так что все эти величины также стремятся к нулю по вероятности при $n \to \infty$, если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно.

Пусть последовательность $\delta_n \to 0$ такова, что $\mathbf{P}\{|X_{n+1,n+k}(a_{n+m})| \geq \delta_n\} \to 0$, $\mathbf{P}\{|X_{n+m+1,n+m+k}(a_{n+m})| \geq \delta_n\} \to 0,\ n \to \infty$. Если $|X_{n+1,n+k}(a_{n+m})| < \delta_n$, $|X_{n+m+1,n+m+k}(a_{n+m})| < \delta_n$ то из свойства A_4 следует $|X_{n+m}(a_{n+m}) - X_n(a_{n+m}) \oplus$ $\oplus X_{n+k,n+m+k}(a_{n+m})| < \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$. Тогда

$$|\mathbf{E}\exp\{itX_{n+m}(a_{n+m})\} - \mathbf{E}\exp\{itX_n(a_{n+m}) \oplus X_{n+k,n+m+k}(a_{n+m})\}| \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\,|\exp\{it\,(X_{n+m}(a_{n+m}) - X_n(a_{n+m}) \oplus X_{n+k,n+m+k}(a_{n+m}))\} - 1| \leq$$

$$\leq |t|\varepsilon_n + 2\mathbf{P}\{|X_{n+1,n+k}(a_{n+m})| \geq \delta_n\} + 2\mathbf{P}\{|X_{n+m+1,n+m+k}(a_{n+m})| \geq \delta_n\} \to 0,$$

$n \to \infty$. Это означает, что

$$X_{n+m}(a_{n+m}) \stackrel{d}{\sim} X_n(a_{n+m}) \oplus X_{n+k,n+m+k}(a_{n+m}),\ n \to \infty \tag{20}$$

[4, с.393]. Обозначим через $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{P}_m$ и $\mathbf{P}_{n,m}$ распределения величин $X_n(a_{n+m})$, $X_{n+k,n+m+k}(a_{n+m})$ и $X_n(a_{n+m}) \oplus X_{n+k,n+m+k}(a_{n+m})$ соответственно. $X_n(a_{n+m})$ измерима относительно $\mathcal{F}_{\leq n}$, а $X_{n+k,n+m+k}(a_{n+m})$ – относительно $\mathcal{F}_{\geq n+k}$, так что в силу (19)

$$|\mathbf{E}\exp\{itX_n(a_{n+m}) \oplus X_{n+k,n+m+k}(a_{n+m})\} -$$

$$-\mathbf{E}\exp\{itX_n(a_{n+m})\}\,\mathbf{E}\exp\{itX_{n+k,n+m+k}(a_{n+m})\}\,| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x+y)} \mathbf{P}_{n,m}(dxdy) - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x+y)} \mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_m(dxdy) \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\,\mathbf{P}_{n,m}}{d\,\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_m}(x,y) - 1 \right| \mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_m(dxdy) \leq 2\beta(k) \to 0,$$

$n \to \infty$. Это означает, что

$$X_n(a_{n+m}) \oplus X_{n+k,n+m+k}(a_{n+m}) \overset{d}{\sim} \widehat{X}_n(a_{n+m}) \oplus \widehat{X}_{n+k,n+m+k}(a_{n+m}),\ n \to \infty, \quad (21)$$

где $\widehat{X}_n(a_{n+m})$ и $\widehat{X}_{n+k,n+m+k}(a_{n+m})$ – независимые величины, распределения которых совпадают с распределениями величин $X_n(a_{n+m})$ и $X_{n+k,n+m+k}(a_{n+m})$. Поскольку $\widehat{X}_{n+k,n+m+k}(a_{n+m}) \overset{d}{=} \widehat{X}_m(a_{n+m})$, из (20) и (21) следует (R_1).

Таким образом, если бинарная операция $x \oplus y$ удовлетворяет условиям $A_1 - A_5$, а последовательность $\{\xi_n\}$ абсолютно регулярна, то выполняется (R_1).

Литература

1. Гринь А.Г. Минимальные условия слабой зависимости в схеме обобщенного суммирования // Теория вероятн. и ее примен. (В печати)
2. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
3. Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. Гауссовские случайные процессы. М. : Наука, 1970. 384 с.
4. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962. 719 с.
5. Гринь А.Г. Области притяжения для последовательностей с перемешиванием // Сибирский математический журнал. 1990. Т. 31, № 1. С. 53–63.
6. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985. 141 с.
7. Bradley R. Basic properties of strong mixing conditions // Dependence in Probability and Statistics (Ser. Progress in Probability and Statistics). Boston – Basel – Stuttgart : Birkhäuser, 1986. V. 11. P. 165–192.
8. Peligrad M. An invariance principle for φ– mixing sequences //Ann. Probab. 1985. V. 13, N. 4. P. 1304–1313.

CONDITIONS OF THE WEAK DEPENDENCE IN THE LIMIT THEOREMS FOR GENERALIZED SUMS

A.G. Grin, professor, Doctor of Mathematics, e-mail: griniran@gmail.com

Omsk State University n.a. F.M. Dostoevskiy

Abstract. “Commonly used” regularity conditions ensuring the implementation of the minimum conditions of weak dependence in limit theorems for generalized sums are given in this article.

Keywords: generalized sums, minimum conditions of weak dependence, λ-mixing, absolute regularity.