

## ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ГЛАССА-ПАСТЕРНАКА МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

**В.П. Голубятников**<sup>1,2</sup>

профессор, д.ф.м.н., г.н.с., e-mail: glbtn@math.nsc.ru

**И.В. Голубятников**<sup>1</sup>

инженер, e-mail: ivan.golubyatnikov@gmail.com

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

**Аннотация.** В работе рассматриваются вопросы неединственности циклов в фазовых портретах некоторых нелинейных динамических систем (био)химической кинетики, изучавшихся Л. Глассом и Дж. Пастернаком, которые установили для этих систем условия существования устойчивого цикла. Мы доказываем существование траекторий, никогда не попадающих в область притяжения этого устойчивого цикла.

**Ключевые слова:** Нелинейные динамические системы, фазовые портреты, циклы, диаграммы перехода, ретракция.

### Введение

В наших предыдущих публикациях [1–3, 7] (см. также цитированную там литературу) рассматривались нелинейные динамические системы вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_{i-1}) - m_i \cdot x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Одна из основных задач этой серии работ состояла в выявлении периодических траекторий (циклов) в фазовых портретах подобных систем. Здесь все переменные, параметры и функции принимают неотрицательные значения, предполагается также, что  $x_{i-1} = x_n$  при  $i = 1$ . Такие динамические системы возникают при моделировании ряда биологических процессов, и наличие у них периодических траекторий имеет естественную биологическую интерпретацию, см. [7, 9].

Вычитаемые в правых частях уравнений системы (1) соответствуют процессам разложения биологических молекул в моделируемой генной сети, положительные коэффициенты  $m_i$  характеризуют скорости этих разложений. Переменные  $x_i$  обозначают концентрации участвующих в реакциях веществ, слагаемое  $f_i(x_{i-1})$  описывает скорость синтеза вещества номер  $i$  в зависимости от концентрации  $x_{i-1}$  вещества номер  $i - 1$ .

В этой заметке мы рассматриваем фазовые портреты динамических систем вида (1) с «пороговыми» правыми частями:  $f_i(x) = \Gamma_i(x)$  или  $f_i(x) = L_i(x)$ , где функции  $\Gamma_i$  и  $L_i$  являются ступенчатыми и определяются следующим образом:

$$\Gamma_i(x) = A_i > 2 \quad \text{при} \quad 1 \leq x; \quad \Gamma_i(x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x < 1; \quad (2)$$

$$L_i(x) = A_i > 2 \quad \text{при} \quad 0 \leq x < 1; \quad L_i(x) = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leq x; \quad (3)$$

$A_i = \text{const}$ . Возрастающие функции  $\Gamma_i$  описывают положительные обратные связи в моделируемых процессах, а убывающие функции  $L_i(x)$  соответствуют отрицательным обратным связям. Такие функции как предельные формы монотонных гладких функций  $f_i$  использовались в [5, 7, 9]. Основные результаты этой заметки, описанные подробно для функций (2) и (3), переносятся и на такие гладкие функции  $f_i$ , см. теорему 2 и замечание к ней. Для простоты изложения мы ограничиваемся описанием безразмерного случая:  $m_i = 1$  при всех  $i = 1, 2, \dots$

Следуя [5], рассмотрим систему (1) в безразмерном виде при  $n = 4$ :

$$\frac{dx_1}{dt} = L_1(x_4) - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = \Gamma_2(x_1) - x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = \Gamma_3(x_2) - x_3; \quad \frac{dx_4}{dt} = \Gamma_4(x_3) - x_4; \quad (4)$$

и при  $n = 5$ :

$$\frac{dx_1}{dt} = L_1(x_5) - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = \Gamma_2(x_1) - x_2; \quad \dots \quad \frac{dx_4}{dt} = \Gamma_4(x_3) - x_4; \quad \frac{dx_5}{dt} = \Gamma_5(x_4) - x_5. \quad (5)$$

В фазовых портретах этих кусочно линейных динамических систем важную роль играют точки  $E_4 = (1, 1, 1, 1)$  и  $E_5 = (1, 1, 1, 1, 1)$ , в которых правые части всех уравнений имеют разрывы, однако, нас интересуют лишь те их траектории, которые в эти точки не попадают.

Несложные вычисления показывают, что все траектории системы (4), начинающиеся в открытом параллелепипеде  $\Pi^4 = (0, A_1) \times (0, A_2) \times (0, A_3) \times (0, A_4)$ , с ростом  $t$  не выходят из него, то есть, что  $\Pi^4$  и его замыкание являются положительно инвариантными множествами этой системы (см., например, [2]). Такая инвариантность имеет место и для системы (5), и для подобных динамических систем произвольных размерностей, что позволяет перенести на них все проводимые нами построения, см. [1, 3, 4].

Для описания фазового портрета системы (4) разобьем параллелепипед  $\Pi^4$  плоскостями  $\{x_i = 1\}$ , параллельными координатным и проходящими через точку  $E_4$ . Получающиеся 16 блоков разбиения перенумеруем бинарными индексами  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{0, 1\}$  :

$$\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4\} = \{\mathbf{X} \in Q \mid x_1 \geq_{\varepsilon_1} 1, x_2 \geq_{\varepsilon_2} 1, x_3 \geq_{\varepsilon_3} 1, x_4 \geq_{\varepsilon_4} 1\}. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , и отношения порядка определяются, как и в [1], следующим образом: символ  $\geq_0$  означает  $\leq$  (ближе к началу координат вдоль соответствующей координатной оси, чем точка  $E_4$ ), а символ  $\geq_1$  означает  $\geq$  (дальше от начала координат вдоль соответствующей оси, чем точка  $E_4$ ). Точно

таким же образом разбивается и параллелепипед  $\Pi^5$ , являющийся инвариантной областью многомерной системы (5). Такое разбиение очевидным образом конструируется и для подобных динамических систем других размерностей, см. [4].

Простые вычисления показывают, что в каждом из блоков разбиения (6) и его многомерных аналогов уравнения соответствующих динамических систем принимают вид

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i - x_i, \quad \text{или} \quad \frac{dx_i}{dt} = -x_i,$$

откуда

$$x_i = A_i - (A_i - x_i^0) \cdot \exp(-t), \quad \text{или} \quad x_i = x_i^0 \cdot \exp(-t), \quad \text{соответственно,}$$

и поэтому имеет место следующее утверждение:

**Лемма 1.** *I. Внутри каждого блока  $B = \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4\}$  разбиения (6) траектории системы (4) прямолинейны, и их продолжения пересекаются в одной точке  $U_B$ .*

*II. В целом эти траектории кусочно-линейны, их угловые точки находятся на гиперплоскостях  $x_i = 1$ , разделяющих блоки разбиения (6).*

**Замечания.** *I. Это утверждение справедливо для динамических систем любых размерностей с пороговыми правыми частями вида (2) или (3).*

*II. Здесь для каждой из динамических систем зависимость точки  $U_B$  от блока  $B$  определяется по-своему. Например, для системы (5) имеем  $U_B = (A_1, 0, A_3, 0, A_5)$  при  $B = \{01010\}$ , и  $U_B = (0, A_2, 0, A_4, 0)$  при  $B = \{10101\}$ .*

*III. В качестве параметра, который описывает положение точек на прямолинейных участках траекторий, удобно выбирать  $\exp(-t)$ . Внутри каждого блока  $B$  движение точек по траекториям удобно представлять в виде гомотетии с центром в точке  $U_B$ .*

Отметим также, что для всякой точки  $P \neq E_4$ , лежащей на грани между двумя любыми соседними блоками разбиения (6), её траектория конструируется однозначно. Рассмотрим, например, точку  $P_1 \in \{1101\} \cap \{1111\} = F_1$ , у которой координаты имеют вид  $1 < x_1 < A_1$ ,  $1 < x_2 < A_2$ ,  $x_3 = 1$ ,  $1 < x_4 < A_4$ . Прямые вычисления показывают, что через все точки грани  $F_1 = \{x_3 = 1\}$  траектории системы (4) переходят из блока  $\{1101\}$  в блок  $\{1111\}$  и никак иначе. Следовательно, траектория точки  $P_1$  однозначно продолжается вовнутрь этих двух блоков прямолинейными отрезками вплоть до первого пересечения с гиперплоскостями  $x_1 = 1$  или  $x_2 = 1$ , или  $x_4 = 1$ , где эта траектория имеет угловые точки. Обозначим это первое пересечение через  $P_*$ . Далее траектория эта однозначно продолжается в обе стороны тем же способом. Отображение  $P_1 \rightarrow P_*$  является проективным преобразованием и описывается дробно-линейными функциями, см. [3].

## Геометрия фазового портрета динамической системы (4)

В работе [5] Гласс и Пастернак рассматривали динамические системы вида (4) и (5) произвольных размерностей, и для четырехмерного случая ими была

построена диаграмма (state transition diagram)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{0000\} & \longrightarrow & \{1000\} & \longrightarrow & \{1100\} & \longrightarrow & \{1110\} \\
 \uparrow & & & & & & \downarrow \\
 \{0001\} & \longleftarrow & \{0011\} & \longleftarrow & \{0111\} & \longleftarrow & \{1111\}
 \end{array} \tag{7}$$

вложенная в ориентированный граф с вершинами, соответствующими всем 16 блокам разбиения (6).

В терминах работы [2] все восемь блоков, перечисленных в диаграмме (7), имеют потенциальный уровень *один*. Это означает, что из каждого из них траектории системы (4) могут переходить в точности в **один** соседний блок, в который указывает стрелка диаграммы. Обозначим через  $G_8$  объединение всех этих восьми блоков. Из предыдущих рассуждений следует, что  $G_8$  является инвариантной областью для системы (4). В работе [5] были установлены условия существования пробегающего по области  $G_8$  согласно диаграмме (7) устойчивого цикла системы (4). Эта область является невыпуклым многогранником, звездным относительно точки  $E_4$ .

**Лемма 2.** *Все точки открытой области  $\Pi^4$ , у которых описанные в Лемме 1 сегменты траекторий динамической системы (4) не проходят через точку  $E_4$ , образуют область  $\Pi^4 \setminus E_4 \approx S^3 \times D^1$  гомеоморфную произведению трехмерной сферы на одномерный диск.*

Здесь и далее через  $D^m$  обозначается открытый  $m$ -мерный диск.

Доказательство леммы вытекает из проверки того, что для любого блока  $B$  разбиения (6) выпуклая оболочка объединения  $B \cup U_B$  не содержит в своей внутренности точку  $E_4$ . Это справедливо и для любой четномерной динамической системы, аналогичной (4).

В других размерностях подобная диаграмма и области  $G_{2N}$  конструируются дословно так же, и поэтому мы ограничимся подробным описанием случая  $G_4$ .

Для динамической системы (4) все восемь блоков разбиения (6), образующих область  $\Pi^4 \setminus G_8$ , имеют потенциальный уровень *три* относительно этой системы, и из них может быть составлена диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 \{1101\} & \longrightarrow & \{0101\} & \longrightarrow & \{0100\} & \longrightarrow & \{0110\} \\
 \uparrow & & & & & & \downarrow \\
 \{1001\} & \longleftarrow & \{1011\} & \longleftarrow & \{1010\} & \longleftarrow & \{0010\}
 \end{array} \tag{8}$$

Обозначим объединение перечисленных здесь восьми блоков через  $\widehat{G}_8$ . Комбинаторные структуры областей  $G_8$  и  $\widehat{G}_8$  центрально-симметричны относительно точки  $E_4$ . Внутренности областей  $\text{int}(G_8 \setminus E_4)$  и  $\text{int}(\widehat{G}_8 \setminus E_4)$  гомеоморфны произведению  $S^1 \times D^3$ . Как было показано в [5], инвариантная область  $\text{int}(G_8 \setminus E_4)$  содержит устойчивый цикл системы (4) при подходящих значениях параметров  $A_1, A_2, A_3, A_4$ .

**Теорема 1.** *В области  $\Pi^4 \setminus G_8 \approx \widehat{G}_8 \setminus E_4$  существует хотя бы одна траектория, которая бесконечно долго остается в области  $\text{int}(\widehat{G}_8 \setminus E_4)$  и проходит через ее блоки согласно диаграмме (8).*

*Доказательство.* Предположим, что такой траектории нет, тогда существует ретракция  $r$  вдоль траекторий системы (4) области  $\Pi^4 \setminus E_4 \approx S^3 \times D^1$  на область  $G_8 \setminus E_4 \approx S^1 \times D^3$ , что противоречит известному утверждению о поведении фундаментальных групп  $\pi_1(G_8 \setminus E_4) \approx \mathbb{Z}$  и  $\pi_1(\Pi^4 \setminus E_4) \approx 0$  этих областей при композиции естественного вложения  $G_8 \setminus E_4 \subset \Pi^4 \setminus E_4$  и ретракции  $r$ . Следовательно, такая траектория существует.

Проверка того, что эта траектория проходит по блокам диаграммы (8) проводится прямыми вычислениями. Например, из блока  $\{1101\}$  траектории могут переходить только в блоки  $\{0101\}$ ,  $\{1111\}$  и в  $\{1100\}$ . Первый из этих трех блоков следует за  $\{1101\}$  в диаграмме (8), а остальные блоки перечислены в диаграмме (7), то есть лежат в области  $G_8$ . Точно так же проверяется и прохождение этой траектории согласно остальным стрелкам диаграммы (8). ■

Обозначим через  $\Delta_4$  диагональ  $\{x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$  четырехмерного куба. В работе [1] мы рассматривали симметричную четырехмерную динамическую систему вида (1), в которой все функции  $f_i$  в правых частях имели вид (3) и совпадали, то есть  $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$ . Сопоставление теоремы 1 и наших результатов из этих работ показывает, что в фазовых портретах такой динамической системы и системы (4) траектории ведут себя по разному ввиду различия гомотопических типов областей  $\Pi^4 \setminus E_4 \approx S^3 \times D^1$  и  $\Pi^4 \setminus \Delta_4 \approx S^2 \times D^2$ .

В работе [10] изучались динамические системы вида (4), (5) и их многомерные аналоги в случае гладких монотонных функций  $L_1$  и  $\Gamma_i$  и были установлены условия существования цикла, проходящего по блокам диаграммы (7) и ее многомерных аналогов. Следующая теорема доказывается дословно так же, как и теорема 1.

**Теорема 2.** *Для четырехмерной динамической системы вида (4) с гладкими монотонными функциями  $L_1$  и  $\Gamma_i$  в области  $\Pi^4 \setminus G_8 \approx \widehat{G}_8 \setminus E_4$  существует хотя бы одна траектория, которая бесконечно долго остается в области  $\text{int}(\widehat{G}_8 \setminus E_4)$  и проходит через ее блоки согласно диаграмме (8).*

**Замечание.** *Подобным же образом переносится на случай гладких частей и теорема 3, см. ниже.*

## Динамические системы других размерностей

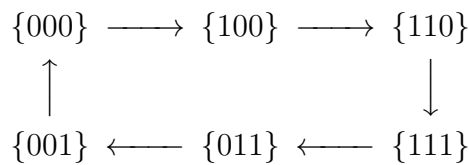
Для многомерных аналогов системы вида (4) комбинаторно-геометрическая структура фазовых портретов оказывается намного сложнее, хотя в работе [5] для любых размерностей  $N$  были построены области  $G_{2N} \subset \Pi^N$ , в которых (при подходящих значениях параметров системы) содержится цикл, притягивающий траектории всех точек из  $G_{2N}$ . Эти области  $G_{2N}$  и соответствующие им диаграммы, аналогичные диаграмме (7), конструируются так же, как и в четырехмерном случае. Их комбинаторные структуры так же центрально-симметричны относительно точек  $E_N$ . Можно проверить, что для системы (5) блоки  $\{10101\}$  и  $\{01010\}$  имеют потенциальные уровни *пять*, десять блоков, перечисленных в диаграмме, аналогичной (7), имеют потенциальный уровень *один*, оставшиеся 20 блоков имеют потенциальный уровень *три*.

Обозначим через  $\Delta_5$  диагональ параллелепипеда  $\Pi^5$ . В каждом из двух блоков  $\{10101\}$  и  $\{01010\}$  с максимальным потенциальным уровнем содержится отрезок с концом в точке  $E_5$ , являющийся объединением траекторий своих точек, и траектории эти притягиваются к точке  $E_5$ . Объединение этих двух отрезков стандартным образом деформируется в диагональ  $\Delta_5$ , соединяющую вершины  $U_1 = (A_1, 0, A_3, 0, A_5)$  и  $U_2 = (0, A_2, 0, A_4, 0)$  параллелепипеда  $\Pi^5$ , заполняя при этом треугольник  $U_1 E_5 U_2$ . Вершины  $U_1$  и  $U_2$  остаются при этой деформации неподвижными. Напомним, что для четномерных динамических систем вида (4) траектории всех отличных от  $E_{2N}$  точек области  $\Pi^{2N}$  не проходят через точку  $E_{2N}$ , см. доказательство Леммы 2 и Замечание III к Лемме 1.

Таким образом, множество точек  $\Pi^5$ , у которых траектории не попадают в  $E_5$ , гомеоморфно  $\Pi^5 \setminus \Delta_5 \approx S^3 \times D^2$ , и в нем содержится инвариантная область  $G_{10}$  гомеоморфная  $S^1 \times D^4$  — аналог области  $G_8 \setminus E_4$ . Эта конструкция очевидным образом воспроизводится и в любой нечетной размерности. Например, в трехмерной динамической системе

$$\frac{dx_1}{dt} = L_1(x_3) - x_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = \Gamma_2(x_1) - x_2; \quad \frac{dx_3}{dt} = \Gamma_3(x_2) - x_3; \quad (9)$$

блоки  $\{101\}$  и  $\{010\}$  имеют потенциальный уровень *три*. Каждый из лучей, выходящих из двух точек  $(0, A_2, 0)$  и  $(A_1, 0, A_3)$  по направлениям к точке  $E_3$ , пересекается с противоположным к его началу блоком  $\{101\}$  и, соответственно,  $\{010\}$  по отрезку, являющемуся траекторией всех своих точек. Все такие траектории заканчиваются в точке  $E_3$ . Дополнение к этим двум отрезкам в параллелепипеде  $\Pi^3$  гомеоморфно  $\Pi^3 \setminus \Delta_3 \approx S^1 \times D^2$ , что в трехмерном случае согласуется со строением области притяжения устойчивого цикла. Здесь диагональ  $\Delta_3$  определяется точно так же, как  $\Delta_5$  для системы (5). Со временем траектории всех точек этого дополнения попадают в блоки, перечисленные в следующей диаграмме



и далее согласно направлению ее стрелок перемещаются из блока в блок. Как было показано в [5], при подходящих значениях параметров  $A_1, A_2, A_3$  все такие траектории притягиваются к устойчивому циклу, и других циклов система (9) не имеет. В старших размерностях все устроено гораздо сложнее. Например, имеет место

**Теорема 3.** Для всех  $N \geq 4$  область  $\Pi^N \setminus G_{2N}$  содержит траекторию, которая остается в ней бесконечно долго.

Этот аналог первой части утверждения теоремы 1 доказывается в точности так же, как и в четырехмерном случае. Отметим, что идеи конструирования ретракций вдоль траекторий динамических систем восходят к теории индекса Конли, см., в частности, [6, 8] и цитированную там литературу. Анализ строения фазовых портретов многомерных систем вида (4), (5) в зависимости от их

параметров представляет, по-видимому, более сложную задачу, чем в случаях младших размерностей.

Авторы искренне благодарны и признательны А.А. Акиньшину, Н.Б. Аюповой и В.А. Лихошвай за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 12-01-00074 и междисциплинарного гранта 80 СО РАН.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Акиньшин А.А., Голубятников В.П., Голубятников И.В. О некоторых многомерных моделях функционирования генных сетей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 3–9.
2. Акиньшин А.А., Голубятников В.П. Циклы в симметричных динамических системах // Вестник НГУ, серия Математика, Механика, Информатика. 2012. Т. 12, № 2. С. 3–12.
3. Аюпова Н.Б., Голубятников В.П. О единственности цикла в несимметричной трехмерной модели молекулярного репрессилатора // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 3–7.
4. Golubyatnikov V.P., Golubyatnikov I.V. On periodic trajectories in odd-dimensional gene networks models // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2011. V. 28, N. 4. P. 397–412.
5. Glass L., Pasternack J.S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // Journal of Mathematical Biology. 1978. V. 6. P. 207–223.
6. Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS. Reg. Conf. Ser. Math. V. 38. Amer. Math. Soc. 1978. 89 p.
7. Лихошвай В.А., Голубятников В.П., Демиденко Г.В., Евдокимов А.А., Фадеев С.И. Теория генных сетей / В кн.: Системная компьютерная биология. Под ред. Н.А.Колчанова и С.С.Гончарова. Новосибирск: СО РАН. 2008. С. 395–480.
8. Mischaikov K., Mrozek M., Reineck J.F. Singular index pair // Journ. of Dynamics and Differential Equations. 1999. V. 11, N. 3. P. 399–425.
9. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Ижевск: РХД. 2011. 560 с.
10. Hastings S., Tyson J., Webster D. Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control systems // Journ. of Differential Equations. 1977. V. 25. P. 39–64.

**GEOMETRY AND TOPOLOGY OF PHASE PORTRAITS OF  
GLASS-PASTERNAK DYNAMICAL SYSTEMS IN SMALL DIMENSIONS**

**V.P. Golubyatnikov**<sup>1,2</sup>

Doctor of Mathematics, Professor, Chief Researcher, e-mail: glbtn@math.nsc.ru

**I.V. Golubyatnikov**<sup>1</sup>

Engineer, e-mail: a@a.ru

<sup>1</sup>Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

<sup>2</sup>Novosibirsk State University

**Abstract.** We consider questions of non-uniqueness of cycles in phase portraits of some non-linear dynamical systems of (bio)chemical kinetics, which were studied by L. Glass and J.S. Pasternack who have established conditions of existence of a stable cycle for these systems. We show existence of trajectories which do not enter the attraction basin of this stable cycle.

**Keywords:** Nonlinear dynamical systems, phase portraits, cycles, state transition diagrams, retraction.