Математические
структуры и моделирование
2014. №4(32). С. 77–82

УДК 517.977

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ПОТОКОВ В МОДЕЛЯХ ПЕРЕБРОСКИ РЕСУРСОВ

Б.К. Нартов
канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник,
e-mail: nartov@ofim.oscsbras.ru

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Омск

Аннотация. В работе представлен метод расчёта перераспределения начальных и/или текущих ресурсов в широком классе практических задач оптимального управления. Представляемый метод основан на специальном расширении уравнений динамической системы, формализующей исходную задачу. Дополнительные слагаемые правых частей уравнений описывают управляемый коммутатор потоков, связывающий составляющие вектора состояния системы. В пределах заданной интенсивности обмена коммутатор допускает произвольное перераспределение модулей составляющих (ресурсов) при сохранении их текущей суммы. При этом вид функции, мажорирующей интенсивности потоков, определяется типом задачи. В задачах первого типа размещение начальных ресурсов является частью оптимизируемых начальных условий, а перераспределение ресурсов на интервале управления запрещено или физически неосуществимо. В задачах второго типа начальные условия жёстко заданы, но разрешено перераспределять текущие суммарные ресурсы на интервале управления. В задачах третьего типа разрешены как оптимизация начального размещения ресурсов, так и оптимизация перераспределения ресурсов на интервале управления.

Ключевые слова: размещение, перераспределение, ресурсы, потоки, коммутация, динамические системы, нейронные сети.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 14-08-01132 и № 14-07-00272

Введение

В настоящей работе предложенный в [1-4] «метод фиктивных потоков» распространён на три основные группы практических задач оптимального управления ресурсами. При этом предполагается, что исходные задачи сведены или могут быть сведены к задачам оптимального управления гладкими динамическими системами. Для наглядности мы ограничились исходными задачами, в которых функционал качества управления является функцией вектора состояния динамической системы. При этом под ресурсами понимается сумма модулей составляющих вектора состояния.

Используемый подход основан на специальном расширении уравнений динамической системы, формализующей исходную задачу. Дополнительные слагаемые правых частей уравнений описывают управляемый коммутатор потоков, связывающий составляющие вектора состояния системы. В пределах заданной интенсивности обмена коммутатор допускает произвольное перераспределение модулей составляющих вектора состояния (ресурсов) при сохранении их текущей суммы. При этом вид функции, мажорирующей интенсивности потоков, определяется типом задачи.

1. Задачи первого типа: оптимизация начального размещения ресурсов

Рассмотрим гладкую управляемую систему

$$\dot{P}_k(t) = f_k(P_1(t), ..., P_N(t), x(t), t), 1 \le k \le N, \tag{1}$$

где $x(t)$ — вектор управления.

Задав далее начальные условия, интервал управления (O, T) и множество управлений X, запишем исходную задачу:

$$J(x^*) = \inf_{x \in X} J(x), \tag{2}$$

$$J(x) = F(P_1(T), ..., P_N(T)), \tag{3}$$

где F — непрерывно дифференцируема.

Решаемая далее задача состоит в отыскании оптимальных в смысле (1) — (3) значений $\mathrm{P}_k(0)$ при типичном ограничении $\sum\limits_{k=1}^{N} P_k(0) = C$, где C — заданное число.

Рассмотрим предварительно вспомогательную динамическую систему

$$\dot{Z}_k(t) = -U_k(t) \cdot Z_k(t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i(t) \cdot Z_i(t),\ 1 \le k \le N, \tag{4}$$

с заданными начальными условиями $Z_k(0)$, где $U_k(t)$ — задаваемые непрерывные функции.

Обозначим:

$$U(t) = \{U_k(\tau), 1 \le k \le N, 0 \le \tau \le t\};$$

$$U^+(t) = \{U_k(\tau)/U_k(\tau) \ge 0, 1 \le k \le N, 0 \le \tau \le t\};$$

$$Z(t) = \{Z_k(t), 1 \le k \le N\};$$

$$Z^+(t) = \{Z_k(t)/Z_k(t) \ge 0, 1 \le k \le N\};$$

$$Z^-(t) = \{Z_k(t)/Z_k(t) < 0, 1 \le k \le N\}.$$

Если $Z_k(t)$ есть характеристики некоторых объектов, то система уравнений (4) описывает управляемый «коммутатор» потоков характеристик из объекта в объект. Первое слагаемое в (4) — поток из k-го объекта в коммутатор, второе слагаемое — поток из коммутатора в k-й объект.

При этом (4) обладает следующими полезными свойствами:

1. При любых начальных условиях $Z(0)$ произвольное управление $U(t)$ сохраняет начальный ресурс C, то есть

$$\sum_{k=1}^{N} Z_k(t) \equiv \sum_{k=1}^{N} Z_k(0) = C.$$

2. Любое управление $U^+(t)$ отображает произвольный набор неотрицательных начальных характеристик в некоторый набор неотрицательных конечных характеристик, то есть

$$U^+(t)\colon Z^+(0) \to Z^+(t),$$

и, более того, для любых двух наборов Z_{1+} и Z_{2+} с совпадающими суммами характеристик и любого t найдётся

$$U^+(t)\colon Z^{1+}(0) \to Z^+(t) = Z^{2+},$$

то есть для любого заданного времени управления и любых двух заданных наборов неотрицательных характеристик найдётся неотрицательное управление, приводящее первый набор ко второму.

3. Любое управление $U^+(t)$ отображает произвольный набор отрицательных начальных характеристик в некоторый набор отрицательных конечных характеристик, то есть

$$U^+(t) : Z^-(0) \to Z^-(t),$$

и, более того, для любых двух наборов Z^{1-} и Z^{2-} с совпадающими суммами характеристик и любого t найдётся

$$U^+(t)\colon Z^{1-}(0) \to Z^-(t) = Z^{2-},$$

то есть для любого заданного времени управления и любых двух заданных наборов отрицательных характеристик найдётся неотрицательное управление, приводящее первый набор ко второму.

Рассмотрим теперь следующую модификацию исходной системы уравнений (2):

$$\dot{\widetilde{P}}_k(t) = f_k(\widetilde{P}_1(t), ..., \widetilde{P}_1(t), x(t), t) - U_k \widetilde{P}_k(t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i(t)\widetilde{P}_i(t), 1 \le k \le N, \quad (5)$$

с начальными условиями и интервалом управления (O, T) из задачи (1) – (3) и множеством управлений $\widetilde{X} = X \otimes U$, где $U = \{U^+(t)/0 \le U_k(t) \le \varphi(t), 1 \le k \le$ $\le N, 0 \le t \le T\}$, где $U_k(0)$ заданы; $\varphi(t)$ — заданная непрерывно убывающая функция.

При этом $H_1 = \inf \varphi(t)$ на интервале $(0, \Delta t)$, $H_2 = \sup \varphi(t)$ на интервале $(\Delta t + \delta, T)$, Δt и δ — регулируются параметрами φ(t) независимо. Конкретный вид φ(t) вполне произволен.

Рассмотрим далее для системы (5) задачу

$$J(\widetilde{x}^*) = \inf_{\widetilde{x} \in \widetilde{X}} J(\widetilde{x}), \tag{6}$$

где

$$J(\widetilde{x}) = F(\widetilde{P}_1(T), ..., \widetilde{P}_N(T)), \tag{7}$$

(см. (3), (4)).

Используя теперь гладкость исходной системы (1) и исходного функционала качества (3) и свойства вспомогательной системы (4), можно показать, что при исходном ограничении $P_k(0) \geq 0,\ 1 \leq k \leq N$ или $P_k(0) < 0,\ 1 \leq k \leq N$ для любой исходной задачи вида (1) – (3), соответствующей вспомогательной задачи (5) – (7) и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая $\varphi(t)$, что

$$|P_k^*(0) - \widetilde{P}_k(\varDelta t + \delta)| < \varepsilon,\ 1 \leq k \leq N,$$

где $P_k(0)$ — искомые оптимальные начальные характеристики исходной задачи (1) – (3); $\widetilde{P}_k(\varDelta t + \delta)$ — характеристики из решения задачи (5) – (7), взятые в момент Δ t+δ.

Мы рассмотрели задачи первого типа, в которых размещаемые начальные ресурсы являются частью оптимизируемых начальных условий, а перераспределение ресурсов на интервале управления запрещено или физически неосуществимо [4, 5].

В этом случае мажорирующая функция $\varphi(t)$ допускает произвольный обмен ресурсами в начальном интервале времени $(0, \Delta t)$, малом по сравнению с интервалом управления $(0, T)$, а затем блокирует обмен. В результате решение модифицированной исходной задачи, взятое в конце малого начального интервала $(\Delta t + \delta, T)$, содержит вектор состояния, сколь угодно близкий к искомому оптимальному начальному вектору состояния исходной задачи.

2. Задачи второго типа: перераспределение ресурсов на интервале управления

В задачах второго типа начальные условия жёстко заданы, но разрешено перераспределять текущие суммарные ресурсы на интервале управления. В этом случае мажорирующие функции постоянны на всём интервале управления, а их значения определяются физическими ограничениями на интенсивности потоков. Таким образом, решение модифицированной исходной задачи содержит, дополнительно, план оптимального перераспределения ресурсов на интервале управления, фактически реализуемый затем в реальном масштабе времени. Так, при расширении метода на некоторые транспортные задачи линейного программирования вспомогательная задача модифицирует матрицу перевозок в течение $(0, \mathrm{T})$ при $\varphi(t) = const$.

3. Смешанные задачи третьего типа

В задачах третьего типа разрешены как оптимизация начального размещения ресурсов, так и оптимизация перераспределения ресурсов на интервале управления. В этом случае мажорирующая функция $\varphi(t)$ является комбинацией мажорирующих функций задач первого и второго типов (на интервалах $(0, \Delta t)$ и $(\Delta t + \delta, T)$, соответственно). При этом итоговое управление исходной задачи реализуется по следующей схеме:

1. В начальные условия подставляются значения $\widetilde{P}_k(\Delta t + \delta)$ из решения вспомогательной задачи (5)–(7).

2. Затем на интервале $(0, T - \Delta t - \delta)$ реализуется управление из интервала $(\Delta t + \delta, T)$ вспомогательной задачи (5)–(7).

Заключение

1. Решение вспомогательной задачи (5)–(7) позволяет получить оптимальные начальные характеристики $P_k^*(0)$ исходной задачи (1)–(3) за один шаг, однако цена дополнительных ограничений и численного представления функции $\varphi(t)$ в реализующем алгоритме может в конкретном случае оказаться неприемлемой.

2. Представленный метод распространяется и на задачи оптимального размещения начальных ресурсов неуправляемых гладких систем. При этом функционал качества (3) записывается в виде

$$J(x) = F(P_1(T), ..., P_N(T)) = \widetilde{F}(P_1(0), ..., P_N(0), T).$$

3. Во многих исходных задачах управления часть начальных составляющих вектора состояния в (1) является неоптимизируемыми параметрами. В этом случае в системе (5) вспомогательной задачи (5)–(7) модифицируются дифференциальные уравнения лишь тех составляющих, начальные значения $P_k(0)$ которых могут оптимизироваться.

4. Предлагаемый подход использовался нами в моделировании конфликтов управляемых подвижных объектов. В числе других возможных приложений можно указать транспортные задачи линейного программирования, задачи планирования и управления физическими экспериментами и управление вычислительными ресурсами. Так, например, он обсуждался применительно к имитации и управлению физическими экспериментами в контексте работ [6-8]. При этом было отмечено, что простейший коммутатор (4) можно интерпретировать как замкнутую нейронную сеть непрерывного функционирования с весами синапсов, оптимизируемыми внешней задачей.

5. Хотя представленный приём назван «методом фиктивных потоков», он позволяет оптимизировать управление как фиктивными (в задачах оптимизации начальных условий), так и реальными физическими потоками ресурсов (материальных, энергетических, информационных).

Литература

1. Nartov B.K. Conflict of Moving Systems. France: AMSE-Press, 1994. 87 p.
2. Нартов Б.К., Чуканов С.Н. Модели траекторного управления. Омск: Изд-во ОмГУ, 2001. 95 с.
3. Нартов Б.К. Методы траекторного управления. Новосибирск: Наука, 2003. 104 с.
4. Нартов Б.К. Метод фиктивных потоков // Математические структуры и моделирование. Омск: ОмГУ. 2001. Вып. 8. С. 40–43.
5. Нартов Б.К. Оптимальное размещение управляемых подвижных объектов на заданных начальных позициях // Мехатроника, автоматизация, управление. 2004. № 2. С. 14–19.
6. Barabanov M.Yu., Vodop'yanov A.S., Chukanov S.N., Nartov B.K., Yamaleev R.M. and Babkin V.A. A search for radially excited charmonium states in experiments with low-energy antiproton beams // Russian Physics Journal. 2007. V. 50, N. 12. P. 1243–1250.
7. Barabanov M.Y., VodopianovA.S., Dodokhov V.Kh., Chukanov S.N., Nartov B.K., Yamaleev R.V. Application of lov energy antiproton beams for charmonium hubrid studies // Hadronic Journal. 2009. V. 32, N. 2. P. 159–179.
8. Barabanov M.Y., Vodopyanov A.S., Dodokhov V.K. Seach for higher laying charmonium states and charmed hybrids in experiments using antiproton beam with momentum ranging from 1 gev/c to 15 gev/c // Physics of Particles and Nuclei Letters. 2011. V. 8, N. 10. P. 1069–1072.

THE METHOD OF FICTITIOUS FLOW IN MODELS OF TRANSFER OF RESOURSES

B.K. Nartov

Ph.D. (Math.), Associate Professor, Senior Researcher, e-mail: nartov@ofim.oscsbras.ru

Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Omsk

Abstract. This paper presents a method for calculating the redistribution of the initial and / or ongoing resources in a wide range of practical problems optimal control. The presented method is based on a special extension of the dynamic equations of the system, formalizes the original problem. — Additional terms of the right sides of the equations describing the managed switch in currents linking the components of the system state. Within a given intensity-sharing switch allows arbitrary reallocation of module components (resources) while maintaining their current amount. The form of the function, majorizing flow rate, determined by the type of task. In problems of the first type of accommodation is a part of the initial resources op timiziruemyh initial conditions, and the reallocation of resources to the control interval is prohibited or physically impossible. In problems of the second type of initial conditions are hard coded, but allowed to ne-reraspredelyat current total resources to control interval.. In problems of the third type are allowed as the initial optimization of resource allocation and reallocation of resources to optimize the range of management.

Keywords: accommodation, allocation, resources, streams, switching, dynamic systems, neural networks.

This work supported by RFBR, projects N 14-08-01132, N 14-07-00272