*Математические
структуры и моделирование
2014. №4(32). С. 23–26*

УДК 517.95

ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.И. Никитин
аспирант, e-mail: ip.alexnikitin@gmail.com

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

Аннотация. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы реакции-диффузии с нелинейными нелокальными граничными условиями и неотрицательными начальными данными. Приведём достаточные условия отсутствия глобальных решений для случая $\min(m, n) > 1$.

Ключевые слова: параболические уравнения, нелинейность, нелокальность, реакции-диффузии.

В этой работе рассматривается задача для системы полулинейных уравнений с нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_t = \triangle u + c_1(x,t)v^p, v_t = \triangle v + c_2(x,t)u^q, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \int_\Omega k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ v(x,t) = \int_\Omega k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где p, q, m, n — положительные константы, $\min(pq, m, n) > 1$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $c_1(x,t), c_2(x,t)$ — неотрицательные локально непрерывные по Гельдеру функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \geq 0$, $k_1(x,y,t), k_2(x,y,t)$ — неотрицательные непрерывные функции, определенные при $x \in \partial\Omega$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \geq 0$, $u_0(x), v_0(x)$ — неотрицательные непрерывные функции, удовлетворяющие граничным условиям при $t = 0$.

Система (1) сформулирована из физических моделей, возникающих в различных областях прикладной науки. Например, она может быть интерпретирована как задача о теплопроводности с нелинейными нелокальными источниками на границе материального тела. В этом случае $u(x,t), v(x,t)$ представляют температуру взаимодействующих компонентов в процессе их изменения.

Локальное существование, вопросы единственности решения, а также принцип сравнения решений начально-краевой задачи (1) были рассмотрены в [1].

Будем говорить, что решение $(u(x,t), v(x,t))$ задачи (1) разрушается за конечное время, если существует такая положительная константа $T < \infty$, что

$$\lim_{t \to T-} \left(|u(\cdot,t)|_{L^\infty(\Omega)} + |v(\cdot,t)|_{L^\infty(\Omega)} \right) = +\infty.$$

В этом случае T называют временем разрушения решения.

Пусть φ — собственная функция задачи $\triangle\varphi + \lambda\varphi = 0$, $x \in \Omega$, $\varphi = 0$ для $x \in \partial\Omega$, соответствующая первому собственному значению λ, которая выбрана из условия $\int_\Omega \varphi(x)dx = 1, \varphi(x) > 0$ для $x \in \Omega$. Обозначим

$$\varphi_s = \max_{\overline{\Omega}} \varphi(x), \tag{2}$$

$$\underline{c}_1(t) = \min_{\overline{\Omega}} c_1(x,t), \underline{c}_2(t) = \min_{\overline{\Omega}} c_2(x,t), \tag{3}$$

$$\underline{k}_1(t) = \frac{\lambda}{\varphi_s} \min_{\partial\Omega \times \overline{\Omega}} k_1(x,y,t), \underline{k}_2(t) = \frac{\lambda}{\varphi_s} \min_{\partial\Omega \times \overline{\Omega}} k_2(x,y,t). \tag{4}$$

Пусть

$$W_1(t) = \int_\Omega u(x,t)\varphi(x)dx, W_2(t) = \int_\Omega v(x,t)\varphi(x)dx. \tag{5}$$

Продифференцировав $W_1(t)$ по t и воспользовавшись формулой Грина, получим

$$\begin{aligned} W_1'(t) &= \int_\Omega u_t(x,t)\varphi(x)dx = \int_\Omega (\triangle u + c_1(x,t)v^p)\varphi dx = \\ &= \int_\Omega \triangle\varphi u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\varphi ds - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} u ds + \int_\Omega c_1(x,t)v^p\varphi dx. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\varphi(x) = 0$ для $x \in \partial\Omega$, равенство $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = -\lambda$ и граничные условия в (1), имеем

$$\begin{aligned} W_1'(t) &= -\int_\Omega \lambda u\varphi dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \left(\int_\Omega k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy \right) ds + \int_\Omega c_1(x,t)v^p\varphi dx \geq \\ &\geq \int_\Omega (-\lambda u + \underline{k}_1(t)u^m + \underline{c}_1(t)v^p)\varphi dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Проведя аналогичные преобразования, можно получить, что

$$W_2'(t) \geq \int_\Omega (-\lambda v + \underline{k}_2(t)v^n + \underline{c}_2(t)u^q)\varphi dx. \tag{7}$$

Для $\max(p,q,m,n) \geq 1$ рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} f'(t) = -\lambda f(t) + \underline{k}_1^*(t)f^m(t) + \underline{c}_1^*(t)g^p(t), & t > 0, \\ g'(t) = -\lambda g(t) + \underline{k}_2^*(t)g^n(t) + \underline{c}_2^*(t)f^q(t), & t > 0, \\ f(0) = \int_\Omega u_0(x)\varphi(x)dx, g(0) = \int_\Omega v_0(x)\varphi(x)dx, \end{cases} \tag{8}$$

где $\underline{k}_1^*(t) = \underline{k}_1(t)$ при $m \geq 1$ и $\underline{k}_1^*(t) = 0$ при $m < 1$, $\underline{k}_2^*(t) = \underline{k}_2(t)$ при $n \geq 1$ и $\underline{k}_2^*(t) = 0$ при $n < 1$, $\underline{c}_1^*(t) = \underline{c}_1(t)$ при $p \geq 1$ и $\underline{c}_1^*(t) = 0$ при $p < 1$, $\underline{c}_2^*(t) = \underline{c}_2(t)$ при $q \geq 1$ и $\underline{c}_2^*(t) = 0$ при $q < 1$.

Теорема 1. *Пусть* $p \geq 1, q \geq 1, pq > 1$ *или* $\max(m, n) > 1$ *и задача Коши* (8) *не имеет глобального решения. Тогда задача* (1) *не имеет нетривиального глобального решения.*

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай $p, q, m > 1, n < 1$. Доказательство для остальных случаев аналогично. Применив неравенство Йенсена к (6), (7), получим

$$W_1'(t) \geq \int_\Omega (-\lambda u + \underline{k}_1(t)u^m + \underline{c}_1(t)v^p)\varphi dx \geq -\lambda W_1(t) + \underline{k}_1(t)W_1^m(t) + \underline{k}_2(t)W_2^p(t),$$

$$W_2'(t) \geq \int_\Omega (-\lambda v + \underline{k}_2(t)v^n + \underline{c}_2(t)u^q)\varphi dx \geq -\lambda W_1(t) + \underline{c}_2(t)W_1^q(t).$$

Тогда из принципа сравнения решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и условий теоремы следует, что задача (1) не имеет нетривиального неотрицательного глобального решения. ■

Замечание 1. Из Теоремы 1 мы можем получить условия отсутствия глобального решения задачи (1) для достаточно больших начальных данных. Например, легко увидеть, что при $m > 1$ и выполненном условии

$$W_1(\tau) > \left((m-1)exp(-\lambda(1-m)\tau)\int_\tau^\infty k_1(t)exp[(1-m)\lambda t]dt\right)^{-\frac{1}{m-1}}, \quad (9)$$

или $n > 1$ и

$$W_2(\tau) > \left((n-1)exp(-\lambda(1-n)\tau)\int_\tau^\infty k_2(t)exp[(1-n)\lambda t]dt\right)^{-\frac{1}{n-1}}, \quad (10)$$

где τ — некоторая неотрицательная константа, задача (1) не имеет нетривиального глобального решения.

Из (9) и (10) следует, что при $m > 1$ и

$$\int_0^\infty \underline{k}_1(t)exp(\lambda(1-m)t)dt = \infty, \quad (11)$$

или при $n > 1$ и

$$\int_0^\infty \underline{k}_2(t)exp(\lambda(1-n)t)dt = \infty, \quad (12)$$

задача (1) не имеет нетривиального глобального решения.

Литература

1. Gladkov A.A Reaction-Diffusion System with Nonlinear Nonlocal Boundary Conditions // International Journal of Partial Differential Equations. 2014. V. 2014. Article ID 523656. 10 p.

THE NONEXISTENCE OF GLOBAL SOLUTIONS OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF SEMILINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLINEAR NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

A.I. Nikitin
graduate student, e-mail: ip.alexnikitin@gmail.com

Vitebsk State University n.a. P.M. Masherov

Abstract. We consider initial boundary value problem for a reaction-diffusion system with nonlinear and nonlocal boundary conditions and nonnegative initial data. We give sufficient conditions of nonexistence of global solutions for the case $\min(m, n) > 1$.

Keywords: parabolic equations, nonlinearity, nonlocality, reaction-diffusion.