Математические структуры и моделирование
2014. № 4(32). С. 27–31

УДК 517.9

О ПОСТРОЕНИИ НОВОГО КЛАССА КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Ю.В. Трубников
профессор, д.ф.-м.н, e-mail: yurii_trubnikov@mail.ru
И.А. Орехова
аспирант, e-mail: orehova85@gmail.com

ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Аннотация. Построен класс формул квадратуры, основанный на построении многочлена наилучшего приближения в пространстве L_1. Полином наилучшего приближения в пространстве L_1 является интерполяционным, а узлами интерполяции являются корни полиномов Чебышёва второго рода.

Ключевые слова: аппроксимация в пространстве L_1, многочлены Чебышёва, квадратурные формулы.

При изучении вопроса о построении оптимальных квадратурных формул можно выделить две основные концепции К.Ф. Гаусса и А.Н. Колмогорова. Одна из основных идей большинства методов численного интегрирования состоит в замене подынтегральной функции каким-либо интерполяционным многочленом. Авторами данной статьи построен класс квадратурных формул, основанный на построении полинома наилучшего приближения в пространстве L_1. Полином наилучшего приближения в пространстве L_1 является интерполяционным, а узлами интерполяции являются корни полиномов Чебышёва второго рода.

Целью настоящей работы является нахождение экстремальных полиномов $P_n(x)$ для значений $n = 2, 3, ..., 7$ и построение класса квадратурных формул

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} P_n(x)dx.$$

Рассмотрим пространство $L_1 = L_1[a, b]$ суммируемых на промежутке $[a, b]$ функций с нормой

$$||f|| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Пусть G — некоторое конечномерное подпространство пространства L_1. Элементы этого подпространства будем называть полиномами.

Лемма 1. Пусть функции $f \in L_1$ и полином $\varphi \in G$ таковы, что равенство

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{sign}[f(x) - \varphi(x)]dx = 0 \tag{1}$$

выполняется для любой функции $h \in G$. Тогда φ есть полином наилучшего приближения (экстремальный полином) функции f в подпространстве G. Доказательство имеется в [1].

Факт, сформулированный в лемме 1, вытекает из того, что интеграл в левой части равенства (1) является значением субградиента нормы $||f-\varphi||$ на любом элементе $h \in G$.

Таким образом, для того чтобы эффективно применять для построения экстремального полинома равенство (1), необходимо знать (или уметь находить) чередование знаков такой функции, для которой равенство (1) выполнялось бы на G.

Если G — подпространство в $L_1[-1,1]$, образованное функциями $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, то такой функцией является полином Чебышёва второго рода

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{2}$$

Точками перемены знака полинома $U_n(x)$ являются значения

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Лемма 2 [2]. Справедливы равенства

$$\int_{-1}^{1} x^m \mathrm{sign}(U_n(x)) d(x) = 0 \, (m = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Равенства (4) означают, что чередование знаков в точках x_k $(k = 1, 2, ..., n)$ обеспечивает равенство (1) на подпространстве G, образованном функциями $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$.

Приведём для удобства читателя следующую теорему.

Теорема [1]. Пусть $f \in L_1[-1,1]$ и P_{n-1} — полином степени не выше $n-1$. Если точки

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

— это все точки перемены знака разности $f - P_{n-1}$ на $(-1,1)$, то P_{n-1} — есть полином наилучшего приближения в пространстве L_1 функции f.

Таким образом, для применения данной теоремы требуется находить интерполяционный полином

$$P_{n-1}(x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{5}$$

Тогда точки x_k являются корнями разности $f(x) - P_{n-1}(x)$. Если окажется, что они являются точками перемены знака этой разности и других точек перемены знака на $(-1,1)$ нет, то $P_{n-1}(x)$ и есть экстремальный полином.

Основные результаты работы отражены в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы из [1, с.40]. Тогда справедливы следующие равенства

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(2)}x + 2x^2\right) f_1 + (1 - 2x^2) f_2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{(2)}x - 2x^2\right) f_3,$$

где

$$f_k = f\left[\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right] \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$P_3(x) = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4,$$

где

$$c_1 = \frac{1}{160}[(\sqrt{5} - 5)(1 + \sqrt{5} + 4x)(\sqrt{5} - 1 - 4x)(\sqrt{5} - 1 + 4x)],$$

$$c_2 = \frac{1}{160}[(\sqrt{5} + 5)(1 + \sqrt{5} - 4x)(\sqrt{5} - 1 + 4x)(\sqrt{5} + 1 + 4x)],$$

$$c_3 = \frac{1}{160}[(\sqrt{5} + 5)(1 + \sqrt{5} + 4x)(\sqrt{5} - 1 - 4x)(\sqrt{5} + 1 - 4x)],$$

$$c_4 = \frac{1}{160}[(\sqrt{5} - 5)(1 + \sqrt{5} - 4x)(\sqrt{5} - 1 + 4x)(\sqrt{5} - 1 - 4x)],$$

$$f_k = f\left[\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)\right] \qquad (k = 1, 2, 3, 4)\,;$$

$$P_4\,(x) = f_3 + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(-f_1 + 3\sqrt{3}f_2 - 3\sqrt{3}f_4 + f_5\right)x +$$

$$+\left(-\frac{1}{3}f_1 + 3f_2 - \frac{16}{3}f_3 + 3f_4 - \frac{1}{3}f_5\right)x^2 -$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(-f_1 + \sqrt{3}f_2 - \sqrt{3}f_4 + f_5\right)x^3 + \left(\frac{4}{3}f_1 - 4f_2 + \frac{16}{3}f_3 - 4f_4 + \frac{4}{3}f_5\right)x^4;$$

$$f_k = f\left[\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)\right] \qquad (k = 1, 2, ..., 5)\,;$$

$$P_5\,(x) = 0,0298f_1 - 0,1401f_2 + 0,6102f_3 + 0,6102f_4 -$$

$$-0,1401f_5 + 0,0298f_6 - 83,592(-0,0004f_1 +$$

$$+0,0027f_2 - 0,0328f_3 + 0,0328f_4 - 0,0027f_5 +$$

$$+0,0004f_6)x - 83,592(-0,0359f_5 + 0,0277f_3 +$$

$$+0,0277f_4 - 0,0359f_2 + 0,0081f_1 + 0,0081f_6)x^2 -$$

$$-83,5918(0,009f_1 - 0,0576f_2 + 0,1248f_3 -$$

$$-0,1248f_4 + 0,0575f_5 - 0,009f_6)x^3 -$$

$$-83,5918(-0,0231f_4 - 0,0231f_3 + 0,0416f_5 +$$

$$+0,0417f_2 - 0,0185f_6 - 0,0185f_1)x^4 -$$

$$-83,592(-0,0206f_1 + 0,0669f_2 - 0,1039f_3 +$$

$$+0,1039f_4 - 0,0668f_5 + 0,0205f_6)x^5;$$

$$P_6(x) = f_4 + \frac{\sqrt{2}-1}{2}[\sqrt{2-\sqrt{2}}(f_1 - f_7) +$$

$$+\left(\sqrt{2}-2\right)\left(2\sqrt{2}+3\right)(f_2 - f_6) + \sqrt{2-\sqrt{2}}\times$$

$$\times\left(5\sqrt{2}+7\right)(f_3 - f_5)]x + [\left(3-2\sqrt{2}\right)(f_1 + f_7) - f_2 +$$

$$+\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(12\sqrt{2}+17\right)(f_3 + f_5) - 10f_4 - f_6]x^2 +$$

$$+\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(12\sqrt{2}+17\right)(f_3 + f_5) - 10f_4 - f_6]x^2 +$$

$$+\left(2\sqrt{2}-1\right)[-\sqrt{2-\sqrt{2}}(f_1 - f_7) + \frac{4}{7}\left(2-\sqrt{2}\right)\times$$

$$\times\left(3\sqrt{2}+5\right)(f_2 - f_6) - \frac{1}{7}\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(13\sqrt{2}+17\right)(f_3 - f_5)]x^3 +$$

$$+[\left(6\sqrt{2}-10\right)(f_1 + f_7) + 8(f_2 + f_6) + \frac{2}{7}\left(3\sqrt{2}-5\right)\times$$

$$\times\left(30\sqrt{2}+43\right)(f_3 + f_5) + 24f_4]x^4 +$$

$$+[2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}(f_1 - f_7) - 4\sqrt{2}(f_2 - f_6) +$$

$$+2\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)(f_3 - f_5)]x^5 + [\left(8-4\sqrt{2}\right)\times$$

$$\times(f_1 + f_7) - 8(f_2 + f_6) + 4\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+3\right)(f_3 + f_5)]x^6,$$

где

$$f_k = f\left[\cos\left(\frac{k\pi}{8}\right)\right] \qquad (k = 1, 2, ..., 7).$$

Заметим, что, так как

$$f\left[\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)\right] \quad (k = 1, 2, ..., 6)$$

не выражаются в радикалах, то коэффициенты полинома $P_5(x)$ получаются весьма громоздкими или могут быть выражены в численном виде.

Доказательство теоремы 1 состоит в явном решении соответствующих систем линейных уравнений для построения интерполяционного полинома.

Теорема 2. Справедливы равенства

$$\int_{-1}^{1} P_2(x)\,dx = \frac{2}{3}(f_1 + f_2 + f_3);$$

$$\int_{-1}^{1} P_3(x)\,dx = -\frac{1}{30}[(\sqrt{5}-15)(f_1+f_4)-(\sqrt{5}+15)(f_2+f_3)];$$

$$\int_{-1}^{1} P_4(x)\,dx = \frac{2}{45}[7(f_1+f_5)+9(f_2+f_4)+13f_3];$$

$$\int_{-1}^{1} P_5(x)\,dx = 0,2269(f_1+f_6)+0,3268(f_2+f_5)+0,4463(f_3+f_4);$$

$$+(257+120\sqrt{2})(f_3+f_5)+(285+76\sqrt{2})f_4].$$

В качестве оценки выступает

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{sign}\,U_{n+1}(x)\,dx\right|.$$

где U_{n+1} — полиномы Чебышева 2-го рода.

Основным результатом работы являются сформулированные: теорема 1 о виде полинома наилучшего приближения в пространстве L_1 и теорема 2 о виде соответствующей квадратурной формулы.

Литература

1. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функции. Ленинград: Изд. Ленинградского ун-та, 1977. 183 с.
2. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.

ON THE CONSTRUCTION OF A NEW CLASS OF QUADRATURE FORMULAS

Y.V. Trubnikov
Professor, Doctor of Mathematics, e-mail: yurii_trubnikov@mail.ru
I.A Orekhova
Graduate student, e-mail: orehova85@gmail.com

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

Abstract. The class of quadrature formulas based on the construction of the polynomial of best approximation in the space L_1 is constucted. Polynomial of best approximation in the space L_1 is an interpolation and interpolation nodes are the roots of the Chebyshev polynomials of the second kind.

Keywords: approximation in the space L_1, Chebyshev polynomials, roots of the Chebyshev polynomials of the second kind, formulas of quadrature.