Математические структуры и моделирование
2015. № 1(33). С. 4–17

УДК 519.214

МИНИМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ В СХЕМЕ ОБОБЩЁННОГО СУММИРОВАНИЯ

А.Г. Гринь
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Получены предельные теоремы и минимальные условия слабой зависимости в предельных теоремах для так называемых обобщённых сумм случайных величин, образующих стационарную последовательность.

Ключевые слова: стационарные последовательности, минимальные условия слабой зависимости, предельные теоремы, обобщённое суммирование.

Введение

В работах [1–3] получены минимальные в некотором смысле условия слабой зависимости в предельных теоремах для сумм и для максимумов случайных величин, образующих стационарную последовательность. При этом обращает на себя внимание то, что в предельных теоремах о сходимости к устойчивым законам с показателем $\alpha \in (0, 2)$ и в предельных теоремах для максимумов эти минимальные условия выглядят, по существу, одинаково. Этот факт, а также так называемые экстремальные критерии в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин (см., например [4, с. 328]) наводят на мысль о существовании класса бинарных операций, предельные теоремы и минимальные условия слабой зависимости для которых будут иметь сходную структуру. В данной работе введён класс таких операций (обобщённое суммирование), доказаны предельные теоремы для обобщённых сумм независимых случайных величин, описан класс предельных распределений и получены минимальные условия слабой зависимости в предельных теоремах для обобщённых сумм.

Пусть $x \oplus y$ — бинарная операция на $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$, о которой мы будем предполагать, что она удовлетворяет условиям $A_1 - A_4$ (условия $(\mathbf{A})$):

A_1. Ассоциативность: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,\ x, y, z \in \mathbb{D}$;

A_2. Коммутативность: $x \oplus y = y \oplus x,\ x, y \in \mathbb{D}$;

A_3. $x \oplus 0 = x,\ x \in \mathbb{D}$;

A_4. Равномерная непрерывность в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что из $|y| < \delta$ следует $|x \oplus y - x| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{D}$.

Этим условием удовлетворяют, например, $x \oplus y = x + y,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$, $x \vee y = \max\{x, y\}, \mathbb{D} = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $x \wedge y = \min\{x, y\},\ \mathbb{D} = \mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, а не удовлетворяют, скажем, $x \oplus y = xy$, (не выполняются A_3 и A_4) и $x \oplus y = x + y\ (mod\ d),\ d > 0,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$ (не выполняется A_4).

Если бинарная операция $x \otimes y$ удовлетворяет условиям ($\mathbf{A}$), а $f(x)$ возрастающая выпуклая (вниз) функция такая, что $f(0) = 0$, $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, то бинарная операция $x \oplus y = f^{-1}(f(x) \otimes f(y))$ также удовлетворяет условиям ($\mathbf{A}$). Пояснения требует только условие A_4.

Функция f^{-1} возрастает и выпукла вверх, а, следовательно, полуаддитивна, то есть $f^{-1}(x+y) \leq f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$. Если, скажем, $f(x) \otimes f(y) \geq f(x)$, то с помощью полуаддитивности получаем

$$|x \oplus y - x| = f^{-1}(f(x) \otimes f(y)) - f^{-1}(f(x)) \leq f^{-1}(f(x) \otimes f(y) - f(x)).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $|y| < \delta$ ($|f(y)| < f(\delta)$) влечёт $f(x) \otimes f(y) - f(x) < f(\varepsilon)$ при любом $x \in \mathbb{D}$ и, значит, $|x \oplus y - x| < \varepsilon$ при любом $x \in \mathbb{D}$.

Например, бинарные операции $x \oplus y = (x^p + y^p)^{1/p}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$, $x \oplus y = \ln(e^x + e^y - 1)$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$ и т. п. удовлетворяют условиям ($\mathbf{A}$).

1. Предельные распределения в схеме обобщённого суммирования

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых величин. Будем обозначать

$$X_{k,m}(b) = \left(\frac{\xi_k}{b}\right) \oplus \ldots \oplus \left(\frac{\xi_m}{b}\right), \quad X_n(b) = X_{1,n}(b),$$

$$X_n = X_n(1), \quad \overline{X}_n(b) = \max_{1 \leq k \leq n} |X_k(b)|, \ k, m, n \in \mathbb{N}, \ b > 0,$$

$$\delta_n = \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geq \delta\}.$$

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta > 0$ *такое, что при* $x > 0$, $m \leq n$

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1}(c_n) \geq x + \varepsilon\} \leq (1 - \delta_n)^{-1} \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \geq x\}.$$

Доказательство. В силу свойства A_4 для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при любом $x > 0$

$$\{\xi \geq x + \varepsilon, \ |\eta| < \delta\} \subseteq \{\xi \oplus \eta \geq x\}, \quad \{|\xi| \geq x + \varepsilon, \ |\eta| < \delta\} \subseteq \{|\xi \oplus \eta| \geq x\}. \quad (1)$$

Аналогично из свойств $A_1 - A_4$ выводится

$$\{\xi \geq x + \varepsilon, \ |\eta| < \delta, \ |\zeta| < \delta\} \subseteq \{\xi \otimes \eta \oplus \zeta \geq x\},$$
$$\{|\xi| \geq x + \varepsilon, \ |\eta| < \delta, \ |\zeta| < \delta\} \subseteq \{|\xi \otimes \eta \oplus \zeta| \geq x\}. \quad (2)$$

Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1}(c_n) < x + \varepsilon \leq |X_k(c_n)|\}$, $k = 1, \ldots, m$. Тогда $E_i E_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup_{k=1}^{m-1} E_k = \{\overline{X}_{m-1}(c_n) \geq x + \varepsilon\}$, а в силу (1) найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$\{|X_k(c_n)| \geq x + \varepsilon, \ |X_{k+1,m}(c_n)| < \delta\} \subseteq \{|X_m(c_n)| \geq x\},$$

то есть

$$\{|X_m(c_n)| < x\} \subseteq \{|X_k(c_n)| < x+\varepsilon\} \cup \{|X_{k+1,m}(c_n)| \geq \delta\},$$

откуда

$$\{|X_m(c_n)| < x,\ E_k\} \subseteq \{|X_{k+1,m}(c_n)| \geq \delta,\ E_k\},\ k=1,...,m-1. \tag{3}$$

С помощью (3) получаем

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1}(c_n) \geq x+\varepsilon\} \leq \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \geq x\} + \sum_{k=1}^{m-1}\mathbf{P}\{|X_m(c_n)| < x,\ E_k\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \geq x\} + \sum_{k=1}^{m-1}\mathbf{P}\{|X_{k+1,m}(c_n)| \geq \delta,\ E_k\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \geq x\} + \max_{1\leq k\leq n}\mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geq \delta\}\sum_{k=1}^{m-1}\mathbf{P}\{E_k\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\{|X_m(c_n)| \geq x\} + \delta_n \cdot \mathbf{P}\{\overline{X}_{m-1}(c_n) \geq x+\varepsilon\},$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Лемма 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta > 0$ *такое, что при любом* $x > 0$

$$\mathbf{P}\{\pm X_n(c_n) \geq x\} \geq n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \geq (x+\varepsilon)c_n\}(1-3(1-\delta_n)^{-1}\delta_n).$$

Неравенство с плюсом доказывается, когда $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{D}$*, а с минусом, — когда* $\mathbb{R}_- \subseteq \mathbb{D}$.

Доказательство. Пусть $A_0 = \varnothing,\ A_n = \{\overline{X}_{n-1}(c_n) < \delta,\ \xi_n \geq (x+\varepsilon)c_n\}$

$$A_k = \{\overline{X}_{k-1}(c_n) < 2\delta,\ \xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n,\ |X_{k+1,n}(c_n)| < \delta\},\ 1 \leq k \leq n-1.$$

В силу (2) и (3) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x\} \geq \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\} = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{\overline{A}_1 \cdot ... \cdot \overline{A}_{k-1}A_k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{A_k\} - \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left\{A_k \cdot \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right\}. \tag{4}$$

При $1 \leq k \leq n-1$ получаем

$$\mathbf{P}\{A_k\} = \mathbf{P}\left\{\xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n\right\} -$$

$$-\mathbf{P}\left\{(\xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n) \cdot \left(\left\{\overline{X}_{k-1}(c_n) \geq 2\delta\right\} \cup \{|X_{k+1,n}(c_n)| \geq \delta\}\right)\right\} \geq$$

$$\geq \mathbf{P}\left\{\xi_k \geq (x+\varepsilon)c_n\right\}\left(1 - \mathbf{P}\{|X_{k+1,n}(c_n)| \geq \delta\} - \mathbf{P}\{\overline{X}_{k-1}(c_n) \geq 2\delta\}\right). \tag{5}$$

$\mathbf{P}\{A_n\}$ оценивается аналогично. Без ограничения общности $\delta > 0$ можно считать таким, что

$$\{|X_{j-1}(c_n)| < 2\delta,\ \xi_j \ge (x+\varepsilon)c_n\} \subseteq \{|X_{j-1}(c_n)| < 2\delta,\ X_j(c_n) \ge x\},$$

так что если $2\delta < x$, то

$$\mathbf{P}\left\{A_k \cdot \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right\} \le \mathbf{P}\left\{\xi_k \ge (x+\varepsilon)c_n,\ \bigcup_{j=1}^{k-1}\left(\overline{X}_{j-1}(c_n) < 2\delta, \xi_j \ge (x+\varepsilon)c_n\right)\right\} \le$$

$$\le \mathbf{P}\{\xi_k \ge (x+\varepsilon)c_n\}\,\mathbf{P}\{\overline{X}_{k-1}(c_n) \ge 2\delta\}, \qquad (6)$$

и тогда из (4), (5) и (6) и леммы 1 следует

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n) \ge x\} \ge \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi_k \ge (x+\varepsilon)c_n\}\left(1 - 3(1-\delta_n)^{-1}\delta_n\right).$$

Вероятность $\mathbf{P}\{-X_n(c_n) \ge x\}$ оценивается аналогично.

Лемма доказана. ■

Следующее предложение — это модификация леммы 3.1 из [5].

Лемма 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при достаточно больших n*

$$\mathbf{P}\{\pm X_n(c_n) \ge x+\varepsilon\} \le (1-\delta_n)^{-1}\delta_n \mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \ge \delta\} + n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \ge xc_n\}.$$

(Предположения об области $\mathbb{D}$ те же, что и в лемме 2.)

Доказательство. Пусть $E_k = \{\overline{X}_{k-1}(c_n) < 2\delta \le |X_k(c_n)|\}, k = 1, ..., n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing,\ i \ne j,\ \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k = \{\overline{X}_{n-1}(c_n) \ge 2\delta\}$. В силу (3) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что при $1 \le k \le n-1$

$$\{|X_{k+1,n}(c_n)| < \delta,\ E_k,\ \max_{1\le k\le n}\xi_k < xc_n\} \subseteq \{X_n(c_n) < x+\varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\le k\le n}\xi_k < xc_n\},$$

откуда

$$\{X_n(c_n) \ge x+\varepsilon,\ E_k,\ \max_{1\le k\le n}\xi_k < xc_n\} \subseteq \{E_k,\ |X_{k+1,n}(c_n)| \ge \delta\}. \qquad (7)$$

Аналогично выводится

$$\{X_n(c_n) \ge x+\varepsilon, \max_{1\le k\le n}\xi_k < xc_n\} \subseteq \{\overline{X}_{n-1}(c_n) \ge 2\delta,\ \max_{1\le k\le n}\xi_k < xc_n\}.$$

Отсюда

$$\{X_n(c_n) \ge x+\varepsilon,\ \max_{1\le k\le n}\xi_k < xc_n\} = \{X_n(c_n) \ge x+\varepsilon,\ \overline{X}_{n-1}(c_n) \ge 2\delta,\ \max_{1\le k\le n}\xi_k < xc_n\}. \qquad (8)$$

С помощью (7) и (8) получаем

$$\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x+\varepsilon\} \leq \mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x+\varepsilon, \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\} + \mathbf{P}\{\max_{1\leq k\leq n} \xi_k \geq xc_n\} =$$

$$= \mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x+\varepsilon, \overline{X}_{n-1}(c_n) \geq 2\delta, \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\} +$$

$$+\mathbf{P}\{\max_{1\leq k\leq n} \xi_k \geq xc_n\} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x+\varepsilon, E_k, \max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xc_n\} +$$

$$+\mathbf{P}\{\max_{1\leq k\leq n} \xi_k \geq xc_n\} \leq n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xc_n\} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{|X_{k+1,n}(c_n)| \geq \delta, E_k\} \leq$$

$$\leq n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xc_n\} + \max_{1\leq k\leq n} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geq \delta\} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}\{E_k\} =$$

$$= \delta_n \mathbf{P}\{\overline{X}_{n-1}(c_n) \geq 2\delta\} + n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xc_n\}.$$

Отсюда с помощью леммы 1 выводится оценка для $\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x+\varepsilon\}$ в формулировке леммы. Оценка для $\mathbf{P}\{-X_n(c_n) \geq x+\varepsilon\}$ доказывается аналогично. ■

Замечание 1. Из лемм 2 и 3 вытекает следующее утверждение: если последовательность положительных чисел $\{c_n\}$ такова, что при любом $\delta > 0$

$$\delta_n = \max_{1\leq k\leq n} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \geq \delta\} \to 0,\ n \to \infty$$

и при любых $x > 0,\ \delta > 0$ и при этом выполняется одно из следующих предположений:

$$\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geq \delta\} = O\left(\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geq x\}\right),\ n \to \infty, \tag{9}$$

$$\delta_n \mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \geq \delta\} = o\left(n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \geq xc_n\}\right),\ n \to \infty, \tag{10}$$

то

$$\mathbf{P}\{\pm X_n(c_n) \geq x\} \sim n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \geq xc_n\},\ n \to \infty. \tag{11}$$

Замечание 2. Соотношение (11) означает, что в указанных предположениях хвосты распределений величин X_n имеют одинаковую, не зависящую от вида операции $\oplus$ асимптотику.

Замечание 3. Если $x \oplus y \leq x \vee y$, то $\mathbf{P}\{X_n(c_n) \geq x\} \leq n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xc_n\}$, что вместе с леммой 2 обеспечивает выполнение (11) без предположений (9) или (10).

В дальнейшем мы будем доказывать предельную теорему для распределений $X_n(c_n)$ с использованием предположения следующего типа: существует непрерывная функция $\varphi(x) \uparrow +\infty,\ x \to \infty$ такая, что при любых $x > 0,\ y_i \in \mathbb{D}$, $i = 1, ...n,\ n \geq 2$

$$(xy_1) \oplus ... \oplus (xy_n) = \varphi(x)(y_1 \oplus ... \oplus y_n). \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что из (12) и условий (A) следует, что $\varphi(x) = x$. Действительно,

$\varphi(x)(y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4) = (xy_1) \oplus (xy_2) \oplus (xy_3) \oplus (xy_4) = (\varphi(x)(y_1 \oplus y_2)) \oplus (\varphi(x)(y_3 \oplus y_4)) = \varphi(\varphi(x))(y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4)$, откуда $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$, то есть $\varphi(x) = x$.

Будем говорить, что выполнено условие A_5, если имеет место (12) с $\varphi(x) = x$.

Например, $x \oplus y = x + y$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $x \oplus y = (x^p + y^p)^{1/p}$, $p \geq 1$, $x \oplus y = x \vee y$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$, удовлетворяют условию A_5.

Пусть $\delta > 0$ таково, что $|y| \leq \delta$ влечет $|x \oplus y - x| < 1$, $\forall x \in \mathbb{D}$. Из условий A_4 и A_5 получаем при $x_i \neq 0$, $i = 1, ...n$

$$|x_1 \oplus ... \oplus x_n)| = \frac{|x_1|}{\delta} \left| \delta \frac{x_1}{|x_1|} \oplus \left(\frac{\delta x_2}{|x_1|} \right) ... \oplus \left(\frac{\delta x_n}{|x_1|} \right) \right| \leq$$

$$\leq \delta^{-1}|x_1| + |x_2 \oplus ... \oplus x_n)| \leq \delta^{-1}(|x_1| + ... + |x_n|). \tag{13}$$

Если же при некотором $1 \leq i \leq n$ $x_i = 0$, то в силу A_3 мы просто исключаем его из соотношения (13). Из (13) следует, например, что если $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty$, то $\mathbf{E}|\xi_1 \oplus ... \oplus \xi_n|^p < \infty$.

Будем обозначать

$$a_n = \sup \{x : n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq x\} \geq 1\}.$$

Пусть при любых $n \in \mathbb{N}$ и $z > 0$ $\mathbf{E}|X_n(z)|^p < \infty$. Положим

$$b_n(p) = \inf \left\{ z > 0 : \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E}|X_k(z)|^p \leq 1 \right\}.$$

Если имеет место A5 и $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty$, то $b_n^p(p) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E}|X_k|^p$, в частности, если $x \oplus y = x + y$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, то

$$b_n^p(p) = \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E}|S_k|^p, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i,$$

а если $x \oplus y = x \vee y$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$ то $b_n^p(p) = \mathbf{E} \max\limits_{1 \leq k \leq n} \xi_k^p$.

Принципиальное различие ситуаций, когда

$$\lim_{n \to \infty} n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq \varepsilon b_n(p)\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{14}$$

и

$$\liminf_{n \to \infty} n\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq \varepsilon b_n(p)\} > 0, \quad \text{при некотором } \varepsilon > 0 \tag{15}$$

поясним на примере, когда $x \oplus y = x + y$, в этом случае $X_n(b) = b^{-1}S_n$. Приводимые ниже результаты можно найти, например, в [6], где они получены для последовательностей с φ-перемешиванием, $\varphi(1) < 1$.

Будем предполагать, что величины ξ_n центрированы подходящими константами (см., например, [9, с.649]) и $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty$, $p > 0$.

Распределения величин $b_n^{-1}S_n$ слабо сходятся к нормальному (и, следовательно, предельное распределение не зависит от распределения ξ_1) тогда и только тогда, когда выполняется (14).

Распределения величин $b_n^{-1}S_n$ слабо сходятся к устойчивому распределению с показателем $\alpha \in (0,2)$ тогда и только тогда, когда выполняется (15) и распределение ξ_1 принадлежит области притяжения устойчивого распределения с показателем $\alpha \in (0,2)$. При этом $b_n^p \sim C\mathbf{E}|S_n|^p,\ C > 0$ и b_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\alpha$, и без ограничения общности ее можно считать неубывающей [7, с.26], так что $b_n \sim C'b_n(p)$.

Сказанное можно сформулировать так: соотношение (15) выделяет ситуацию, когда предельное распределение величин $X_n(b_n) = b_n^{-1}S_n$ определяется асимптотикой «хвостов распределения» величины ξ_1, а поскольку ранее мы вывели универсальную (то есть, не зависящую от вида операции $\oplus$) асимптотику этих «хвостов» (следствие 1), мы будем исследовать поведение распределения величин $X_n(b_n)$ при $n \to \infty$, используя предположение (15).

Ниже приводится пример предельной теоремы, основанной на универсальной асимптотике (11).

Распределение ξ_1 принадлежит области притяжения устойчивого распределения с показателем $\alpha \in (0,2)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\alpha$ и

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\}}{\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq x\}} \to a, \quad \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 < -x\}}{\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq x)\}} \to 1-a,\ x \to +\infty,\ 0 \leq a \leq 1 \tag{16}$$

[9, с.646]. Если $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho,\ \rho > 0$ и выполнено (16), то будем говорить, что хвосты распределения ξ_1 имеют согласованное правильное изменение порядка ρ. В этом случае $\{a_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\rho$ [8, стр. 111],

$$n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xa_n\} \to \frac{a}{x^\rho}, \quad n\mathbf{P}\{\xi_1 < -xa_n\} \to \frac{1-a}{x^\rho}, \quad n \to \infty \tag{17}$$

[8, стр. 94] и $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty,\ 0 < p < \rho$ [8, стр. 103].

Пусть

$$F_\rho(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a}{x^\rho}, & x \geq 1; \\ 1-a, & -1 < x < 1; \\ \dfrac{1-a}{|x|^\rho}, & x \leq -1. \end{cases}$$

Если ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения F_ξ и F_η, то будем обозначать $F_\xi * F_\eta = F_{\xi\oplus\eta}$.

Предположим, что при каждом $x \in \mathbb{R}$ существует

$$H_\rho(x) = \lim_{k\to\infty} F_\rho^{*k}\left(k^{1/\rho}x\right). \tag{18}$$

Замечание 4. Если $x \oplus y = x \vee y,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}_+,\ a = 1$, то $F_\xi * F_\eta = F_\xi \cdot F_\eta$ и

$$H_\rho(x) = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{x^{-\rho}}{k}\right)_+^k = \exp\left\{-x^{-\rho}\right\},\ a_+ = a \vee 0,\ x > 0.$$

Если же $x \oplus y = x + y$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $0 < \rho < 2$, то $H_\rho(x)$ является функцией распределения *строго устойчивого* распределения с показателем ρ [10]. При этом если $0 < \rho < 1$, то предел (18) существует при любом $0 \le a \le 1$ (в предельной теореме для сумм величин с функцией распределения $F_\rho(x)$ не требуется центрирование), а если $1 < \rho < 2$, то для того, чтобы выполнялось (18) нужно, чтобы указанные величины были центрированы математическими ожиданиями, то есть, чтобы $a = 1/2$ [9, с.649].

Замечание 5. Нетрудно видеть, что если $H_\rho(x)$ определяется соотношением (18) то

$$H_\rho(x) = H_\rho(\alpha x) * H_\rho(\beta x), \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha^{-\rho} + \beta^{-\rho} = 1. \tag{19}$$

Сформулируем здесь свойство согласованного правильного изменения функции $H_\rho(x)$, которое будет использоваться в дальнейшем

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - H_\rho\left(k^{1/\rho}x\right)\right) = \frac{a}{x^\rho}, \quad \lim_{k\to\infty} kH_\rho\left(-k^{1/\rho}x\right) = \frac{1-a}{x^\rho},\ x > 0. \tag{20}$$

Теорема 1. *Пусть операция $\oplus$ удовлетворяет условиям $A_1 - A_5$ на $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Для того, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n(a_n) < x\} = H_\rho(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

где $H_\rho(x)$ удовлетворяет (20) необходимо и достаточно, чтобы хвосты распределения ξ_1 имели согласованное правильное изменение порядка ρ и при любых $0 < p < \rho$ выполнялось (15).

Доказательство. Достаточность.

Пусть $\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge x\}$ правильно меняющаяся функция порядка $-\rho$, $\rho > 0$. Если выполняется (15), то $b_n(p) = O(a_n)$, $n \to \infty$. Пусть $k = k(n) \to \infty$. Если $k(n)$ растет достаточно медленно, то

$$\max_{1\le m\le n} \mathbf{P}\{|X_m(a_{nk})| \ge \delta\} \le \frac{\max\limits_{1\le m\le n} \mathbf{E}|X_m|^p}{\delta^p a_{nk}^p} = O(a_n^p a_{nk}^{-p}) = O\left(k^{-p/\rho}\right). \tag{22}$$

Отсюда

$$\max_{1\le m\le n} \mathbf{P}\{|X_m(a_{nk})| \ge \delta\}\mathbf{P}\{|X_n(a_{nk})| \ge \delta\} = O\left(k^{-2p/\rho}\right),$$

и так как в силу (17) $n\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge xa_{nk}\} \sim (kx^\rho)^{-1}$, то при $p > \rho/2$ выполняется условие (10), и из следствия 1 и (17) получаем

$$\mathbf{P}\{X_n(a_{nk}) \ge x\} \sim n\mathbf{P}\{\xi_1 \ge xa_{nk}\} \sim \frac{a}{kx^\rho} = 1 - F_\rho(k^{1/\rho}x),$$

$$\mathbf{P}\{X_n(a_{nk}) < -x\} \sim n\mathbf{P}\{\xi_1 < -xa_{nk}\} \sim \frac{1-a}{kx^\rho} = F_\rho(-k^{1/\rho}x), \tag{23}$$

$x > 0$, $n \to \infty$. Поэтому, если последовательность $k = k(n)$ растёт достаточно медленно, то

$$\mathbf{P}\{X_{nk}(a_{nk}) < x\} = (\mathbf{P}\{X_n(a_{nk}) < x\})^{*k} = F_\rho^{*k}(k^{1/\rho}x(1+o_n(1))) \to H_\rho(x),\ \ n \to \infty.$$

Далее, поскольку $a_{nk} \sim k^{1/\rho} a_n,\ n \to \infty$, то с помощью (21), (23) и условия A_5 выводим

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - H_\rho(k^{1/\rho}x)\right) = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} k\mathbf{P}\{X_n(a_{nk}) \ge x\} = \frac{a}{x^\rho},$$

$$\lim_{k\to\infty} kH_\rho(-k^{1/\rho}x) = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} k\mathbf{P}\{X_n(a_{nk}) < -x\} = \frac{1-a}{x^\rho},$$

то есть имеет место (20).

Необходимость. Пусть имеет место (21), где $H_\rho(x)$ удовлетворяет (20) и $\chi_\rho(x) = 1 - H_\rho(x) + H_\rho(-x)$. Последовательность $\{a_n\}$ по определению является неубывающей, так что если $m = m(n) < n,\ m(n) \to \infty,\ n \to \infty$, то

$$\max_{m\le k\le n} \mathbf{P}\{|X_k| \ge Na_n\} \le \max_{m\le k\le n} \mathbf{P}\{|X_k| \ge Na_k\} = \chi_\rho(N) + o_n(1).$$

Если же $m(n)$ таково, что $a_m = o(a_n)$ и $k < m$, то $X_k(a_n) \to 0$ по вероятности и

$$\max_{1\le k\le m} \mathbf{P}\{|X_k| \ge Na_n\} = o_n(1),$$

так что

$$\max_{1\le k\le n} \mathbf{P}\{|X_k| \ge Na_n\} = o_n(1) + o_N(1). \tag{24}$$

Пусть $a_n = o(c_n),\ n \to \infty$. Из (24) получаем

$$\max_{1\le k\le n} \mathbf{P}\{|X_k(c_n)| \ge \delta\} \to 0,\ n \to \infty,$$

и если $k(n) = c_n/a_n$ стремится к бесконечности достаточно медленно, то в силу (20) и (21)

$$\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \ge \delta\} \sim \chi_\rho(k(n)\delta) \sim \left(\frac{x}{\delta}\right)^\rho \mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \ge x\},$$

то есть, имеет место (9) и, следовательно, (11). Пусть $k = k(n) = c_n/a_n$ — монотонная последовательность такая, что $k(n+1)/k(n) \to 1,\ n \to \infty$. Тогда последовательность $\lambda(n) = n/\chi_\rho(k(n))$ удовлетворяет условию $\dfrac{\lambda(n+1)}{\lambda(n)} \to 1,\ n \to \infty$, и если $k(n)$ растёт достаточно медленно, то из (11) выводим

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(n)\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge xc_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{|X_n(c_n)| \ge x\}}{\chi_\rho(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi_\rho(kx)}{\chi_\rho(k)} = x^{-\rho},$$

что имеет место только тогда, когда $\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$ при $x \to \infty$ ([9, с.318]). Далее, пусть $a_{nk} \le x \le a_{nk+1}$.

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi_1 \ge a_{nk+1}\}}{\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge a_{nk}\}} \le \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 \ge x\}}{\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge x\}} \le \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 \ge a_{nk}\}}{\mathbf{P}\{|\xi_1| \ge a_{nk+1}\}}.$$

В силу (20) и (21) левая и правая части этого неравенства стремятся к

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1 - H_\rho(k^{1/\rho}x)}{\chi_\rho(k^{1/\rho}x)} = a,$$

так что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{P}\{\xi_1\geq x\}}{\mathbf{P}\{|\xi_1|\geq x\}}=a.$$

Аналогично рассмотрев асимптотику $\mathbf{P}\{\xi_1<-x\}$ при $x\to+\infty$, мы получим второе соотношение в (16).

Пусть $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ удовлетворяют условиям леммы (3), а $N>0$ с помощью (24) выберем таким, чтобы при достаточно больших n

$$\delta_n=\max_{1\leq k\leq n}\mathbf{P}\{|X_k|\geq\delta Na_n\}<\frac{\delta^p}{4(1+\varepsilon)^p},\ p<\rho.$$

Из леммы (3) при $y\geq N$ и при достаточно больших n получаем

$$\mathbf{P}\{|X_n(a_n)|\geq(1+\varepsilon)y\}\leq 2\delta_n\mathbf{P}\{|X_n(a_n)|\geq\delta y\}+n\mathbf{P}\{|\xi_1|\geq ya_n\},$$

откуда

$$(1+\varepsilon)^{-p}\mathbf{E}\left\{|X_n(a_n)|^p,|X_n(a_n)|\geq(1+\varepsilon)N\right\}\leq$$
$$\leq\frac{2\delta_n}{\delta^p}\mathbf{E}\left\{|X_n|(a_n)|^p,|X_n(a_n)|\geq\delta N\right\}+na_n^{-p}\mathbf{E}\left\{|\xi_1|^p,\xi_1\geq Na_n\right\}\tag{25}$$

$\left(\mathbf{E}\{\xi,A\}=\int\limits_A\xi\mathbf{P}(d\omega)\right)$. Так как $\mathbf{P}\{|\xi_1|\geq y\}$ — правильно меняющаяся функция порядка $-\rho$, $\rho>0$, то

$$\mathbf{E}\left\{|\xi_1|^p,\xi_1\geq y\right\}\sim Cy^p\mathbf{P}\{|\xi_1|\geq y\},\ y\to\infty,\ C>0,\ p<\rho\tag{26}$$

[9, с.324]. Отсюда

$$na_n^{-p}\mathbf{E}\left\{|\xi_1|^p,\xi_1\geq Na_n\right\}\sim CN^pn\mathbf{P}\{|\xi_1|\geq Na_n\}\to CN^{p-\rho}=o_N(1).\tag{27}$$

Обозначим

$$A=\lim_{N\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{E}\left\{|X_n(a_n)|^p,|X_n(a_n)|\geq N\right\}.$$

Из (25) и (27) следует теперь $A\leq\dfrac{2\delta_n(1+\varepsilon)^p}{\delta^p}A<\dfrac{A}{2}$. Следовательно $A=0$, то есть последовательность $\{|X_n(a_n)|^p\}$ равномерно интегрируема, что вместе с (21) даёт

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{-p}\mathbf{E}|X_n|^p=B=\int_{-\infty}^{\infty}x^pdH_\rho(x).$$

В силу монотонности последовательности $\{a_n\}$

$$b_n^p(p)=\max_{1\leq k\leq n}\mathbf{E}|X_k|^p\sim Ba_n^p,$$

так что в силу (17)

$$\lim_{n\to\infty}n\mathbf{P}\{|\xi_1|\geq\varepsilon b_n(p)\}=\lim_{n\to\infty}n\mathbf{P}\{|\xi_1|\geq\varepsilon B^{1/p}a_n\}=\varepsilon^{-\rho}B^{-\rho/p}>0,$$

то есть, имеет место (15). ■

Замечание 6. В формулировке теоремы 1 условие (15) можно заменить на $\sup\limits_n \mathbf{E}|X_n(a_n)|^p < \infty$.

Действительно, в доказательстве необходимости в теореме 1 из (21) выведено $\mathbf{E}|X_n|^p \sim Ba_n^p$, а в доказательстве достаточности указывалось, что из (15) следует $b_n(p) = O(a_n)$.

Пусть, например, $\mathbf{P}\{|\xi_1| \geq x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Тогда распределения величин $a_n^{-1}T_n$, $T_n = |\xi_1| + ... + |\xi_n|$ слабо сходятся к устойчивому распределению с показателем α [9, с. 319] и $\sup\limits_n a_n^{-p}\mathbf{E}T_n^p < \infty$, $0 < p < \alpha$ (это доказано в теореме 1). В силу (13) $\sup\limits_n a_n^{-p}\mathbf{E}|X_n|^p < \infty$, следовательно имеет место (15).

Если $x \oplus y = x \vee y$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$, и $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$, $\rho > 0$, то с помощью (26) при $p < \rho$ получаем

$$\mathbf{E} \max_{1\leq k\leq n} \xi_k^p \leq a_n^p + n\mathbf{E}\left\{\xi_1^p, \xi_1 \geq a_n\right\} \sim (C+1)a_n^p,$$

мы снова имеем (15) и в силу теоремы 1, и замечания 3

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n} \xi_k < xa_n\right\} = \exp\left\{-x^{-\rho}\right\}, \ x > 0$$

(ср. [9, с. 319]).

2. Минимальные условия слабой зависимости

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин. Будем писать $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, $\xi_n \stackrel{d}{\to} \eta$ и $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [4, § 28.1]). Через $\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что $\hat{\xi}_k \stackrel{d}{=} \xi_k$, $k = 1, 2, ..., n$.

Теорема 2. *Пусть $\{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная последовательность, у которой хвосты распределения ξ_1 имеют согласованное правильное изменение порядка ρ, а операция $\oplus$ удовлетворяет условиям $A_1 - A_5$ на $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Для того, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n(a_n) < x\} = H_\rho(x), \ x \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

где $H_\rho(x)$ удовлетворяет (20) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие утверждения

a)

$$X_{n+m}(a_{n+m}) \stackrel{d}{\sim} \widehat{X}_n(a_{n+m}) \oplus \widehat{X}_m(a_{n+m}), \quad n + m \to \infty \tag{R$_1$}$$

(здесь символ $n + n \to \infty$ означает, что (R_1) *выполняется при $n \to \infty$ и при любой последовательности $m = m(n)$);*

б) при любом $x > 0$ и при любой достаточно медленно растущей последовательности $k = k(n) \to \infty, \ n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\pm X_n(a_{kn}) \geq x\} \sim n\mathbf{P}\{\pm\xi_1 \geq xa_{kn}\}, \ n \to \infty. \qquad (\mathrm{R}_2)$$

Замечание 7. Как в [1–3] теорему 2 можно интерпретировать так: условия (R_1) и (R_2) являются минимальными условиями слабой зависимости, при которых выполняется (28), при этом вид этих условий такой же, что и в предельных теоремах для сумм (о сходимости к устойчивым распределениям), и в предельных теоремах для максимумов (см. [2], [3]).

Доказательство. Пусть $F_n(x) = \mathbf{P}\{X_n(a_n) < x\}$,

$$\Delta_n(x) = \left| F_{n+m}(x) - F_n\left(\frac{a_{n+m}}{a_n}x\right) * F_m\left(\frac{a_{n+m}}{a_m}x\right)\right|.$$

Если мы покажем, что $\Delta_n(x) \to 0, \ x > 0$ при $n \to \infty$ и при любой последовательности $m = m(n)$, то будет выполнено (R_1) [4, с. 393].

Как указывалось в доказательстве теоремы 1, $\{a_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\rho$, и тогда

$$a^\rho_{n+m} \sim a^\rho_n + a^\rho_m, \quad n + m \to \infty$$

[2], так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leq c \leq 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что

$$a^{-\rho}_{n_2+m_2}a^\rho_{n_2} \to c, \quad a^{-\rho}_{n_2+m_2}a^\rho_{m_2} \to 1 - c, \quad n \to \infty, \qquad (29)$$

где $m_2 = m(n_2)$. Пусть сначала $0 < c < 1$. Имеем $F_{n_2+m_2}(x) \to F_\rho(x)$,

$$F_{n_2}\left(\frac{a_{n_2+m_2}}{a_{n_2}}x\right) \to F_\rho(c^{-1/\rho}x), \ F_{m_2}\left(\frac{a_{n_2+m_2}}{a_{m_2}}x\right) \to F_\rho((1-c)^{-1/\rho}x)$$

и в силу (19) $\Delta_{n_2}(x) \to 0, \ n \to \infty$.

Из свойства (A_4) легко выводится, что если $\eta_n \to 0$ по вероятности, то $\xi_n \oplus \eta_n \stackrel{d}{\sim} \xi_n, \ n \to \infty$. Поэтому, если, скажем, $c = 0$, то $a^{-1}_{n_2+m_2}X_{n_2} \to 0$ по вероятности, и мы снова получаем $\Delta_{n_2}(x) \to 0$. Аналогично рассматривается случай $c = 1$. Таким образом, из любой последовательности $\{\Delta_{n_1}(x)\}$ мы можем выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность, а это означает, что $\Delta_n(x) \to 0, \ n \to \infty$. Условие (R_1) доказано.

Далее, функция $H_\rho(x)$ удовлетворяет соотношению (20), так что если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно, то

$$\lim_{n\to\infty} k\mathbf{P}\{X_n(a_{nk}) \geq x\} = \lim_{n\to\infty} k(1 - H_\rho(k^{1/\rho}x)) = ax^{-\rho} = \lim_{n\to\infty} nk\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xa_{kn}\}.$$

Второе утверждение в (R_2) доказывается совершенно аналогично.

Пусть теперь выполнены условия (R_1) и (R_2). Если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно, то (R_2) и (17) следуют соотношения (23), а из (R_1) –

$$X_{kn}(a_{kn}) \stackrel{d}{\sim} \widehat{X}_{1,n}(a_{kn}) \oplus \widehat{X}_{n+1,2n}(a_{kn}) \oplus ... \oplus \widehat{X}_{(k-1)n+1,kn}(a_{kn}),$$

где $\widehat{X}_{(l-i)n+1,ln}(a_{kn}) \stackrel{d}{=} X_n(a_{kn}),\ l = 1, ..., k$. Отсюда

$$\mathbf{P}\{X_{nk}(a_{nk}) < x\} \sim (\mathbf{P}\{X_n(a_{nk}) < x\})^{*k} =$$
$$= F_\rho^{*k}(k^{1/\rho}x(1 + o_n(1))) \to H_\rho(x), \quad n \to \infty. \tag{30}$$

Если же $m = kn + r,\ 0 \le r < n$, то $m \sim kn,\ a_m \sim a_{kn},\ a_r a_m^{-1} \to 0$,

$$X_m(a_{kn}) \stackrel{d}{\sim} \widehat{X}_{1,n}(a_m) \oplus \widehat{X}_{n+1,2n}(a_m) \oplus ... \oplus \widehat{X}_{(k-1)n+1,kn}(a_m) \oplus \widehat{X}_{kn+1,m}(a_m),$$

где $\widehat{X}_{kn+1,m}(a_m) \to 0$ по вероятности, откуда с помощью (30) выводим

$$\mathbf{P}\{X_m(a_m) < x\} \sim \mathbf{P}\{X_n(a_{kn}) < x\}^{*k} \to H_\rho(x).$$

Теорема доказана. ∎

Литература

1. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т. 47, № 3. С. 554–558.
2. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в предельных теоремах для стационарных последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. 2009. Т. 54, № 2. С. 344–354.
3. Гринь А.Г. Минимальные условия слабой зависимости в предельных теоремах для максимумов // Математические структуры и моделирование. 2006. в. 17, с. 21–25.
4. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962. 719 с.
5. Peligrad M. An invariance principle for φ– mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, № 4. P. 1304–1313.
6. Гринь А.Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин // Теория вероятностей и её применения. 1991. Т. 36, № 2. С. 285–300.
7. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985. 141 с.
8. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М. : Мир, 1984. 751 с.
10. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М. : Наука, 1983. 304 с.
11. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М : Наука, 1977. 351 с.

MINIMAL CONDITIONS OF THE WEAK DEPENDENCE IN THE SCHEME OF GENERALIZED SUMMATION

A.G. Grin
Professor, Doctor of Mathematics, e-mail: griniran@gmail.com

Omsk State University n.a. F.M. Dostoevskiy

Abstract. Limit theorems for the so-called generalized sums and minimal conditions for the weak dependence of these theorems obtained in this article.

Keywords: stationary sequences, minimal conditions of the weak dependence, limit theorems, generalized summation.