Математические структуры и моделирование
2015. № 3(35). С. 21–33

УДК 372.851

О НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЯХ ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Б. Б. Банчев[1]
гл. асс., к. инф. н., e-mail: boykobb@gmail.com
Н. А. Пронина[2]
ст. н. с., к. пед. н., e-mail: ninavid@mail.ru

[1]Институт математики и информатики — БАН, София, Болгария
[2]Центр стратегических разработок ГБОУ ВПО МО «Академия социального управления», Москва

Аннотация. Терминология школьной геометрии выглядит устоявшейся, но её нельзя признать совершенной. К этому выводу приводит внимательное рассмотрение некоторых понятий и именующих их терминов. Наша цель здесь — выявить некоторые из возможных типов проблем с понятиями и терминами, указать на действительные примеры проявления таких проблем и там, где нам кажется уместным, предложить решения.

Ключевые слова: понятия, геометрия, значение, величина, равенство фигур, перпендикулярность, направленность, вектор.

«Вряд ли есть что-либо более вредное для духовного — умственного и морального — развития, чем приучать человека произносить слова, смысл которых он толком не понимает . . . »

А. Д. Александров. «О геометрии», Математика в школе, 1980, №3.

Введение

Для обозначения рассматриваемых в ней объектов и отношений математика, особенно геометрия, пользуется большим количеством специфических понятий. Обнаружение содержательных понятий и уточнение связей между ними не менее важно для математики, чем доказывание утверждений. Но обилие понятий, вместе с той или иной степенью их абстрактности, иногда приводит к проблемам с их именованием, определением или применением.

Может, например, быть так, что одно и то же слово-термин применяется для разных понятий, а из-за этого смысл определений и суждений размывается. Может и, наоборот, для обозначения одного и того же понятия оказаться в употреблении несколько разных слов. Это приводит к неуверенности: одно и то же ли всё-таки понятие или есть несколько разных? Если одно, то почему несколько имён и нужно ли как-то их различать, скажем, сообразно контексту?

Близость между собой различных понятий может привести к ошибкам и путанице в формулировках, когда одно из них употребляется вместо другого.

Какое-то отдельное слово-термин может ввести в заблуждение из-за того, что за ним имеется устоявшийся смысл в другом употреблении.

Наконец, проблемным может оказаться само определение понятия. Это может иметь место из-за допущенной неточности, неполноты, неправильности, методологической непродуманности или других вызываемых определением затруднений.

Примеры таких случаев рассматриваются ниже. Также рассмотрен пример необособленного в распространённой геометрической терминологии понятия, которое, тем не менее, является полезным и поэтому его следовало бы ввести в употребление.

Нужно особо отметить, что, по нашему мнению, источником терминологических проблем может являться и чрезмерное использование в качестве терминов слов иностранного происхождения — обычно латинского и греческого — вместо отечественных. Такие слова, как правило, без перевода или объяснения непонятны.

Можно возразить, что если данный термин определён достаточно точно и строго, то не имеет значения, отечественное слово или нет. Это не совсем справедливо. Метко подобранное слово на родном языке — например, точка, отрезок, прямая, плоскость, расстояние, угол, круг — облегчает понимание уже тем, что оно просто и понятно само по себе, его не спутать с другим. Такое слово используется в обыденной жизни со смыслом, очень близким геометрическому, поэтому уточнение его содержания для целей геометрии не составляет большого труда и происходит практически незаметно. Родное, знакомое слово способствует пониманию и благодаря бесчисленным подсознательным связям с другими словами, понятиями и смысловыми цепочками, через которые уже накопленный опыт переносится в контекст новой предметной области — в данном случае математики.

Чтобы не казалось, что проблема со злоупотреблением словами иностранного происхождения является надуманной, приведём достаточно показательный пример.

Известные из начальных классов алгебраические свойства — переместительное, сочетательное и распределительное — где-то в старших классах зачем-то превращаются в коммутативное, ассоциативное и дистрибутивное. Но последние три слова, в отличие от отечественных, запоминаются уже механически, и их иногда путают. Например, «коммутативный» путают с «коммуникативным». Оба слова латинского происхождения, внешне схожи, но не имеют между собой ничего общего, даже их корни различные. Незнакомому с их этимологией легко спутать одно с другим, и это факт — причём путают не только дети, а и взрослые люди! Поэтому «коммуникативный закон» сложения можно найти и в напечатанном учебнике («Путеводитель по компьютеру для школьника», http://books.google.ru/books?id=k6v7el-SBTEC), и на федеральном веб-сайте образовательных ресурсов (http://school-collection.edu.ru/dlrstore/36a99985-62f4-43ab-8e9a-9ce521445012/index.html), и даже в действующем документе Минобрнауки (http://dokipedia.ru/document/5149023).

1. Величины, значения и числа

Рассмотрим в подробностях несколько понятий и термины для них. Слова «величина», «значение», «число» и некоторые другие близки по смыслу, что, возможно, является причиной их кажущейся взаимозаменяемости. В действительности они соответствуют разным понятиям, и небрежное пользование ими приводит к размыванию смысла, неточностям и ошибкам в формулировках определений, утверждений и рассуждений.

В качестве примера рассмотрим типичное в школьных учебниках (например, Л. Атанасяна или А. Александрова) утверждение: «Вектор характеризуется численным значением и направлением». На первый взгляд с ним как будто всё в порядке. На самом деле оно ошибочно, а чтобы понять почему, выясним смысл перечисленных выше слов в их математическом употреблении. Это тем более важно ввиду того, что, как оказывается, и в общих, и в математических словарях указанные термины недостаточно или никак не освещены.

Что обозначается словом «величина»? Оно происходит от слова «великий», в смысле большого, и поначалу величиной в математике действительно называли то, что может быть больше или меньше, т. е. *количество или размер*. Примерами таких величин в геометрии являются длина отрезка, размер угла, площадь фигуры и объём тела: все они являются количествами. Вне геометрии то же понятие величины применимо к количественному выражению возраста, веса, массы, электрического заряда, громкости, цены и пр.

Величина в смысле количества, размера — среди самых основных понятий в геометрии и вообще в математическом понимании физического мира. Ведь упрощённо можно сказать, что пространство «сделано» из сочетания направлений и ориентации, с одной стороны, и величин, в количественном смысле, протяжённости, площади и объёма, с другой. В «Началах» Евклида то же понятие величины ($\mu\acute{\epsilon}\gamma\epsilon\theta o\varsigma$) является основополагающим.

Соизмерение величин, а точнее — соизмерение с некоторой величиной, выбранной единицей измерения, приводит к однообразному, а таким образом — более абстрактному по отношению к величинам, представлению о количестве. Оно воплощается в понятии «число», выражающее количество независимо от других свойств величин.[1] Термином «число» сначала обозначалось то, что теперь называем целым положительным числом. Положительными соответственно считались и величины (количества).

Благодаря развитию арифметики, сегодня числа бывают не только целыми положительными, но также дробными, отрицательными, вещественными, комплексными и т. д. Вообще, числом принято считать то, для чего определены арифметические операции, возможно наряду с другими, например, сравнения. Смысл чисел заметно сдвинулся от выражения количеств к возможности производить вычисления. Числа становились всё менее связанными с величинами,

[1] В древнегреческой математике, например, в тех же «Началах», наряду с понятиями *величина* и *число* ($\grave{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$) различаются как самостоятельные понятия также *мера* ($\mu\acute{\epsilon}\tau\rho o\nu$), *отношение* ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$) и *пропорция* ($\grave{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$). Со временем последние утратили самостоятельность почти полностью.

когда-то их породившими.

Далее произошло ещё большее обобщение, приведшее к обособлению понятия «значение». Этим словом в математике называют любой результат измерения или исчисления. Значения есть у постоянных и переменных, у выражений, у аргументов функций и у самих функций. Таким образом, число — лишь один вид значения. В современном понимании значения могут быть не только числовыми, но и совсем непохожими на числа. Становится всё более привычным (в этом немалую роль сыграла и информатика) в качестве значений рассматривать и такие, которые сами составлены из атомарных или других составных значений. Примерами составных значений являются координатные пары, тройки и пр. кортежи, а также векторы (состоящие из длины и направления). В подходящем контексте значениями являются даже вполне абстрактные объекты, такие как, например, функции.

Возвращаясь к примеру из начала этого раздела, теперь можно понять, почему утверждение «вектор характеризуется численным значением ...» неправильное. Прежде всего, вектор характеризуется не численным значением, а *размером* (для геометрического вектора являющегося *длиной*). Размер и число — понятия разных уровней. Число является лишь конкретным, сообразно выбранной единице измерения, представлением размера, но не сам размер. Размер как понятие не имеет отношения ни к какому конкретному числу, и именно поэтому размер, а не число, является свойством вектора. Можно было бы сказать, и что вектор характеризуется величиной. Далее, любое численное представление величины (длины) вектора будет не каким-либо, а конкретно неотрицательным числом. Поэтому говорить о числе в связи с величиной (длиной) вектора неточно: число может быть отрицательным или комплексным, что к длине неприменимо.

Относящиеся к понятиям «величина», «значение» и «число» проблемы усугубляются тем, что как часть процесса становления и развития понятий изменялось и само понятие «величина». Хотя этим словом всё также пользуемся в чисто количественном смысле, например, говоря о величине угла, площади и т. д., величинами стали называть и объекты или характеристики объектов, рассматриваемых в геометрии или же в физике. Например, говорят, что площадь или вектор — величины, имея ввиду не конкретные площадь или вектор, а обозначаемые этими терминами абстрактные понятия. Заметим, что такое употребление всё же связано с понятием значения: у величин имеются значения, числовые или какие-то ещё.

Наконец, через обобщение последнего понимания слова «величина», этим термином обозначают всё то, что обладает, или характеризуется, значением. Например, понятие физической величины соответствует выражаемой значением стороне некоторого свойства физического мира. Любой обозначаемый математический объект, у которого имеется значение, также принято называть величиной в таком смысле слова. (Грубо говоря, любая переменная — величина.) В этом третьем понимании величина — уже вещь вполне абстрактная! Она может быть лишена любых содержательных свойств, а обладать только значением и возможностью ссылаться на него.

Каждой величине приписывается значение, но не всякое значение соответствует величине. Например, части в скобках в выражении $(x - a^2)(y - b)$, как и выражение в целом, имеют значения, но не являются величинами.

В итоге, имеется обособлено несколько терминов — величина, значение и число — соответствующих разным, хотя и тесно связанным, понятиям. Более того, у самого слова «величина» можно различить три значения, первое — исконное — из которых существенно отличается по смыслу от остальных. Нужно проявлять осторожность, и это тем более важно делать в учебниках, чтобы избежать размытости, неточностей и ошибок в употреблении этих терминов.

Особая проблема — отсутствие разграничения при помощи различных слов исконного, чисто количественного и фундаментального для математики, понятия величины от возникших впоследствии. Факт, что количественное употребление слова «величина» оказалось сильно вытесненным более общим и уже почти не встречается. Таким образом понятийный аппарат геометрии лишается ценнейшего достояния.

2. О «равенстве» фигур

О фигурах или телах, которые могут быть наложены одно на другое так, чтобы они совпали, в школьной геометрии принято говорить, что они равные. Слово «равные» вошло в употребление в этом смысле уже давно (данное употребление восходит к Евклиду), но стоит задуматься, а вполне ли оно уместно? Чтобы ответить на этот вопрос, полезно задаться дополнительным вопросом: что в принципе означает слово «равный» в математике? Отставляя в сторону геометрические фигуры и тела, к чему ещё применимо понятие равенства?

Нетрудно заметить, что, говоря о равенстве, всегда имеют в виду значения: равными считаются именно значения. Так, мы говорим, например, «x равно 5», имея в виду, что значение переменной x — 5, или равно 5. Или же, под выражением «a равно b» подразумеваем, что значения величин a и b равны друг другу.

Далее, заметим, что равенство значений в действительности есть их *тождественность*: равные значения — это фактически одно и то же значение. Не бывает равных между собой значений, например, чисел, которые были бы не тождественны друг другу (существует единственное число 1, единственное число 2 и т. д.). Обратим внимание, что это свойство именно значений. Разные же величины всегда являются не тождественными, даже если их значения равные. В вышеприведённом выражении «a равно b» отождествляются только значения величин a и b, но не сами величины.

Итак, получается, что слово «равенство» для фигур (и тел) мы заимствуем у мира чисел и более общо — значений. Но, с другой стороны, две разные фигуры, хоть и совпадающие при наложении, а значит «равные», вовсе не тождественны — они могут находиться, скажем, в разных местах плоскости. Тогда смысл понятия равенства совсем не один и тот же в исходном понимании для значений и для фигур. В таком случае, может, стоит перейти к более подходящему термину: фигуры, совпадающие при наложении, можем называть *одинаковыми.*

Посмотрим на вопрос и так. Геометрические фигуры и тела — абстракция фигур и тел вещественных. Разные действительные вещи — стулья, ручки, автомашины — могут выглядеть совершенно одинаково, но они тем не менее разные, состоят из разных частиц и занимают разные части пространства. О таких вещах мы не говорим «они равные». Почему тогда их абстракции, геометрические фигуры и тела, называют равными? Разные действительные предметы приемлемо называть одинаковыми, и лучше всего так же поступать и с идеализирующими их геометрическими объектами. Тем более, что фигуры и тела никак нельзя уподобить участвующим в вычислениях и являющимся их результатами значениям.

Различием между равенством и одинаковостью можно всё же пренебрегать, когда речь идёт об отрезках или углах. Дело в том, что отрезки являются одинаковыми в точности тогда, когда их длины равные (в отличие от фигур, чьи площади могут быть равными, но они не одинаковые). По существу, равенство отрезков и равенство их длин — одно и то же, и значит, равенство отрезков можно всё-таки понимать как равенство значений. Также и с углами: углы одинаковы в точности тогда, когда их размеры равны, поэтому равенство углов есть фактически равенство значений.

В математической литературе для равенства чисел и для «равенства» фигур принято использовать и разные знаки, и разные термины. Для «равенства» фигур используется слово *конгруэнтность*, означающее соответственность. Это же слово пытались внедрять и в школу во время колмогоровской реформы в 1970-е, но оно не прижилось. В учебнике *И. Шарыгин, «Геометрия. 7–9 кл.», М.: «Дрофа», 2014*, указывая на факт отличия понятия «геометрического равенства» от равенства чисел, упоминают, что между фигурами фактически имеет место одинаковость.

3. О перпендикулярности и вертикальности

Удивительно, что простое геометрическое отношение — находиться под прямым углом — присутствует в языке математики в обличии нескольких разных слов, и при этом все они иностранные. Постараемся разобраться, что это за слова.

Чаще всего в школьной геометрии встречаются слова «перпендикуляр» и «перпендикулярный». Быть перпендикулярным, например, к прямой или плоскости значит быть расположенным под прямым углом к ней. Это прилагательное восходит к латинскому *perpendicularis*, являющемуся производным от существительного *perpendiculum*, которое переводится как «отвес». Итак, перпендикуляр — это отвес, а перпендикулярный — отвесный. Поэтому можно строить, проводить, опускать, восставлять отвес вместо перпендикуляра, также как и рассматривать отвесные вместо перпендикулярных друг к другу отрезки — так было бы и проще, и короче, и непосредственно понятно даже без объяснений. Почему это не делается, нам неясно: ведь длина и громоздкость слова «перпендикуляр» не делают его ни более точным, ни более учёным. (Впрочем, можно возразить, что «отвесный» означает составляющий прямой угол конкретно к горизонтали. Это одно из толкований, но словари и Ушакова, и Ожегова заверяют, что отвесное положение может иметь место и к «какой-нибудь плоскости, линии» (словарь Ушакова).)

Этимологически ещё более непосредственно, чем через «перпендикуляр», отношение «быть расположенным под прямым углом» выражается словом «ортогональный»: оно происходит от греческих слов *ορθός* (прямой) и *γωνία* (угол). В школьной геометрии ортогональным называют проектирование под прямым углом на прямой или плоскости.

В связи с расположением под прямым углом встречаются также термины «нормаль» и «нормальный». «Нормой» (*norma*) на латинском называли плотничий угольник — древнейший инструмент из двух скрепленных под прямым углом реек, исполняющий роль стандартного образца такого угла: им пользуются плотники и другие рабочие для проверки или обеспечения прямоугольности соединения частей конструкции. В связи с этим в математике стали называть направление под прямым углом к линии или поверхности «нормальным». «Нормалью» же называют вектор или прямую с таким направлением.

Подчеркнём, что, хотя у слов «ортогональный», «нормаль» и «нормальный» более узкая область употребления, они выражают не более, чем то же самое отношение взаимной прямоугольности.

Для расположения под прямым углом в обычной, нематематической речи наиболее широко применяется слово «вертикальный». Вертикальным в русском и в других языках считается объект, который находится под прямым углом относительно горизонта. Этот общий смысл слова хорошо понятен ученикам. Однако в школьной геометрии слово «вертикальный» используется не только и не столько в указанном общем смысле, а прежде всего в словосочетании «вертикальные углы», не имеющего ничего общего ни с прямоугольностью, ни с вертикальным положением. В самом деле, почему данное отношение между углами названо вертикальным? Сколько учителей смогли бы ответить на такой вопрос со стороны учеников? По-нашему мнению, почти никто. Получается так, что понятие названо непонятным термином, и мы миримся с этой непонятностью, не устраняя её. Нужно либо объяснить термин, либо, что ещё лучше, заменить его на более подходящий.

Слово «вертикальный» происходит от латинского прилагательного *verticalis*, а оно, в свою очередь, — от существительного *vertex*, одно из значений которого — «верх», «вершина» и т. п. Таким образом, *verticalis* означает буквально «вершинный» и может ничего общего с вертикальным положением не иметь. В зависимости от контекста, это слово нужно переводить либо как «вертикальный», либо как «вершинный». Когда в русский язык вводили термин для «вертикальных углов», скорее всего, просто сделали неудачный перевод с латинского или с другого языка — правильнее было бы «вершинные углы», ведь речь идёт об углах с общей вершиной. Отметим, что в ряде языков сохранились варианты латинских слов и *vertex*, и *verticalis*, так что в этих языках второе из слов остается двусмысленным как в латинском — вертикальный либо вершинный — что, должно быть, и способствовало путанице при переводе.

Итак, вертикальные углы вовсе не вертикальные. Что касается остальных трёх рассмотренных терминов для отношения «под прямым углом», нам кажется, для школы они являются лишними. Выражая всё то же отношение в разных контекстах разными словами, они лишь создают пустую наукообразность речи — тем более, что все они иностранного происхождения и в учебниках не переводятся на русский — и озадачивают немотивированным терминологическим разнообразием. Есть соображения, которыми присутствие данных слов в языке «серьёзной» математики всё же можно оправдать, но к школьному образованию эти соображения не относятся. Лучше всего, по-нашему, свести все три термина к одному. Как было отмечено, отечественное слово «отвес» с его производными являются вполне подходящими для этой роли.

4. О направленности

Теперь обратимся к понятию, термин для которого отсутствует, и не только в школьной геометрии. Чтобы обосновать необходимость в обособлении самого понятия, рассмотрим такую геометрическую ситуацию.

Параллельное проектирование — чрезвычайно важный вид геометрических отображений. А как оно определяется? Не будем обращать внимания на что проектируется — на прямой, на плоскости или где-то ещё. Существенно то, что образ каждой точки находится путём параллельного перенесения этой точки до объекта, на котором проектируется. Но параллельно чему?

Чаще всего говорят, что параллельно прямой: выбрана некоторая прямая и проектируется параллельно ей. Однако сказать, что проекция определяется прямой неточно, так как для того же можно было бы выбрать любую параллельную ей прямую. Иногда говорят, что проектируется параллельно направлению прямой; в связи с этим применяется выражение «направление проектирования». Это тоже неточно, так как перенос идёт не по одному направлению, а по каждому из двух взаимно противоположных — для разных переносимых точек применимы разные направления (рис. 1).

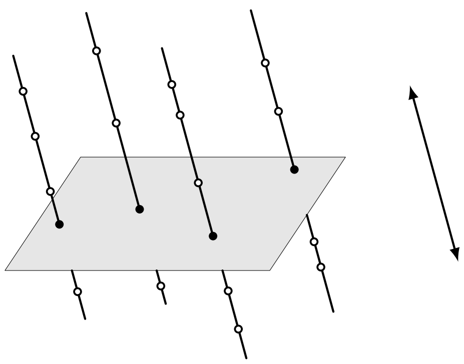

Рис. 1. При параллельном проектировании точки переносятся вдоль двух противоположных направлений.

Поэтому правильнее всего сказать, что параллельное проектирование определяется парой взаимно противоположных направлений. А ещё удобнее для такой пары иметь слово-термин, тем самым признавая геометрическую содержательность и полезность понятия. За неимением более подходящего слова, назовём это понятие *направленностью*.

Наблюдение о параллельном перенесении, подобное сделанному в связи с параллельным проектированием, можно отнести и к, скажем, симметрии — прямоугольной или косой — относительно прямой или плоскости. В этих случаях точки также переносятся параллельно некоторой направленности, либо в одном, либо в противоположном направлении.

Из уже сказанного понятно, что направленность однозначно определяет любой пучок параллельных прямых. Кроме прямых, ту же направленность будут иметь и им параллельные лучи, отрезки и векторы. В этом смысле направленность является свойством любой прямой или отрезка на плоскости или в пространстве: она задаёт, как прямая или отрезок «повёрнуты», т. е. положение этой фигуры «с точностью до параллельного переноса». Объектам же, характеризующимся направлением — лучи, векторы — тоже свойственна направленность, поскольку любое направление можно мыслить как состоящее из направленности и выбора одной из двух её «сторон».

Самостоятельность значения направленности относительно понятия «направление» можно показать на множестве примеров. Именно с помощью понятия направленности многие геометрические объекты и понятия можно задавать более свойственным, менее произвольным образом, чем это обычно делают. Например, отрезок чаще всего задаётся через его концевые точки. Но если при этом точки упорядочиваются — что, как правило, явно или неявно и происходит — то этим самым в задание отрезка привносится несущественная для него информация. Более симметрическим и чуть более экономным образом (с точки зрения количества информации) отрезок можно задать, указав его серединную точку, направленность и длину.

Прямую также часто определяют заданием двух точек. Но выбор точек произволен: бесконечное множество других пар соответствует той же прямой. Произвольность задания уменьшается, если оно состоит в указании точки на прямой и направленности. При некоторых дополнительных предположениях произвольность можно даже совсем устранить.

Упорядоченной парой направленностей можно однозначно определить величину угла, а также поворот — от первой направленности ко второй. Обычно для этой цели используют лучи, векторы, реже — прямые, но при этом ни направления, ни размеры (векторов), ни конкретные прямые не являются существенными, а достаточно именно направленностей. Это справедливо и на плоскости, и в пространстве. В пространстве пара направленностей определяет и пучок плоскостей, параллельных между собой и обеим направленностям.

На рис. 2 показано задание пространственного поворота. Ось поворота определяется своей перпендикулярностью к данным двум направленностям и прохождением через начало координат. Чтобы однозначно указать и собственно поворот, выбрана одна из двух сторон оси и считается, что направленность 1 переходит в 2 движением против часовой стрелки, если смотреть с этой стороны оси (в любом случае поворот происходит под углом меньше развёрнутого).

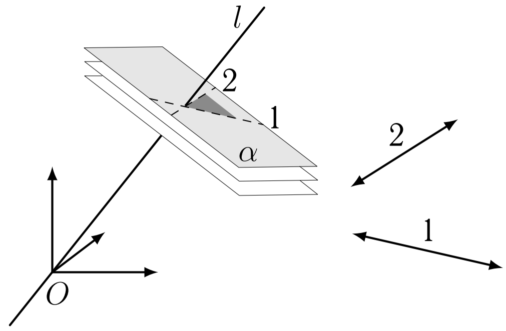

Рис. 2. В любой плоскости α пучка содержатся представители данных двух направленностей. Поворот происходит в каждой такой плоскости, вокруг оси $l:\ l \ni O,\ l \perp \alpha$.

Рассмотрим ещё один пример применения понятия направленности. Любая тройка попарно различных направленностей определяет ориентацию поворотов на плоскости — по или против направления часовой стрелки. Чтобы убедиться в этом, возьмём три прямые с данными направленностями. Если двигаться по окружности, содержащей внутри себя точки пересечения прямых (их либо три, либо только одна), то порядок 1—2—3 пересечения прямых с окружностью возможен в направлении либо по, либо против часовой стрелки (рис. 3). При этом порядок не изменится, если любую прямую заменить на параллельную ей, т. е. он не зависит от выбора конкретных прямых, а только от их направленностей. Тем более он не зависит от выбора окружности. Итак, ориентация, т. е. направление поворотов на плоскости, задаётся не через конкретные прямые или какие-либо направления на них, а именно через направленности.

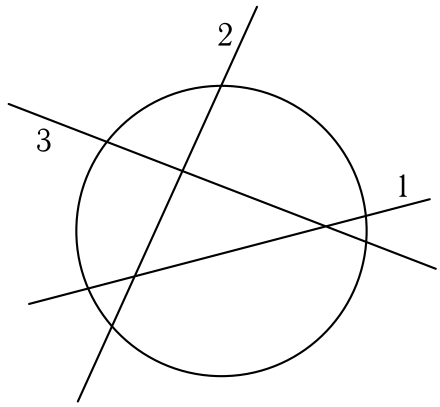

Рис. 3. Круговая упорядоченность прямых зависит только от их направленностей.

В историческом плане содержательность понятия направленности нельзя считать вполне обделённой вниманием. Попытка введения равнозначного понятия была сделана, по крайней мере, раз: в учебнике для вуза [2]. В этом учебнике направленность именуется «направлением», а то, что сегодня называется направлением, названо «стороной направления».

5. О векторах

Наконец, сделаем несколько замечаний в связи с понятием вектора. Проблема с этим понятием не в его именовании, а в том, во-первых, как оно определяется, и во-вторых, насколько успешно применяется.

Парадоксально, что наиболее распространённым определением вектора в школьных учебниках разных стран оказалось «вектор — направленный отрезок». Сразу заметно, что оно ошибочно. Согласно ему вектор является геометрической фигурой — отрезком — и ему должны быть присущи свойства фигуры. Точнее, он должен состоять из точек, иметь общие точки с другими фигурами и в частности векторами, принадлежать некоторой прямой и сам содержать в себе другие векторы того же и противоположного направления. Всё это, разумеется, абсурдно, и во избежании такого толкования нужно как минимум оговорить, что направленный отрезок, являясь новым понятием, уже не есть отрезок и вообще не фигура. Или что он всё-таки фигура, но мы должны не обращать внимания на факт принадлежности точек отрезку и т. п.

Недостатком определения является и то, что им обособляются у вектора начальная и конечная точки, а в то же время утверждается, что вектор характеризуется (только) длиной и направлением. Типичная ситуация в учебнике: для введения понятия вектора объясняют, что это — величина с длиной и направлением, приводятся примеры из физики (сила, скорость) и вдруг начинают говорить об отрезках с началом и концом. Напрашивается вопрос, а что у, скажем, скорости является началом и концом?

Если векторы — направленные отрезки, то странно выглядит и определение коллинеарности векторов, такое как «... векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых» (*Л. С. Атанасян и др., «Геометрия. 7—9 классы», М.: «Просвещение», 2014*). Так как «коллинеарные» означает буквально «лежащие на одной прямой», такое определение получается бессмысленным.

На самом деле, какое бы определение векторов ни было принято, правильнее будет говорить не о коллинеарности, а о *параллельности* векторов.

Само по себе слово «коллинеарный» — одно из тех, которыми можно было и не нагружать язык школьной геометрии; на его месте подошло бы непосредственно понятное «солинейный». При этом о солинейности более уместно говорить в связи с точками, а не векторами. Солинейность (коллинеарность) точек является важнейшим геометрическим понятием, но в школе его почему-то не вводят ни под каким именем: вместо этого всегда говорят «находятся на одной прямой». Мы считаем, что солинейность точек вполне оправданно ввести как термин. Векторы же одинаковой направленности (в обсуждаемом выше смысле последнего слова), лучше называть параллельными — тем более, что данное отношение вполне аналогично параллельности прямых и отрезков.

Отождествление вектора с направленным отрезком порождает, кроме упомянутых выше, и некоторые другие методологические неудобства и затруднения. Впрочем, те или иные неудобства свойственны и большинству других возможных определений. Несколько подробнее этот вопрос рассматривается в [1]. Там же предложено, ввиду того, что и исторически, и практически понятие вектора имеет корни и в геометрии, и в алгебре, определять вектор как «геометрическое число». Действительно, подобно обычным, хорошо знакомым числам, векторы — величины, над которыми проводятся вычисления, и эти вычисления имеют геометрическую природу: и данные, и результаты несут геометрический смысл. В этом плане, кстати, нетрудно увидеть сходство между векторами и комплексными числами.

Также в [1] указывается на то, что присутствие векторов в школьной геометрии неубедительно с точки зрения его полезности: будучи слабо связанным с остальным материалом, это присутствие является в значительной мере самоцельным.

Полезность векторов для решения задач, притом не только в школьной геометрии, сильно возрастает путём расширения арифметики векторов операциями поворота на прямой угол и косого произведения, и на этой основе — выражения весьма важных, но ошибочно игнорируемых школьной геометрией свойств и отношений, таких как ориентация на плоскости, относительное расположение точек и других объектов и ряд других.

Множество содержательных задач нелегко даже сформулировать на обычном языке школьной геометрии. В действительности же они должны быть не только решаемы, а решаемы *систематическим* способом. В частности, разлагаемость любого вектора по двум непараллельным векторам должна непосредственно применяться для нахождения точек, отрезков и отношений в треугольниках, но изложение векторов как оно есть сегодня не позволяет этого. На ряде примеров в [1] показано, что расширенная арифметика векторов позволяет справиться с этими проблемами, гармонично дополняя традиционный для школьной геометрии классический подход к решению задач.

6. Заключение

В статье рассмотрен вопрос усовершенствования понятийной базы и терминологии школьной геометрии на примере нескольких понятий, являющихся на наш взгляд источниками проблем разного вида. Мы надеемся, что привлечение внимания к проблемам и предлагаемые решения будут содействовать улучшению будущих учебников и другой школьной литературы по геометрии.

Часть обсуждаемого специфически связана с русским языком. Это относится, например, к названию «вертикальные углы», которое является неудачным именно в русском. Совмещение отчётливо разных смыслов в одном слове (как рассмотренное здесь «величина») также имеет место не во всех языках. Другие затронутые вопросы, прежде всего, определение и полезное применение понятия «вектор», от языка не зависят и действительно относятся к школьной математике, независимо от того, где она изучается.

Литература

1. Банчев Б.Б. Снова о векторах // Математические структуры и моделирование. 2014. №.2 (30), С. 32–47.
2. Минорский В.П., Улановский В.П. Векторная алгебра, 2-е изд. М., Л. : Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1951. 80 с. URL: `http://books.google.com/books?id=nkX6AgAAQBAJ`.

ON SOME CONCEPTS IN SECONDARY SCHOOL GEOMETRY

B. B. Bantchev[1]
Assist. Prof., Ph.D. in informatics, e-mail: boykobb@gmail.com
N. A. Pronina[2]
Senior Scientist Researcher, Ph.D. in pedagogy, e-mail: ninavid@mail.ru

[1]Institute of Mathematics and Informatics — BAS, Sofia, Bulgaria
[2]Centre of Strategic Developments, SEI HPE MR "Academy of Social Management", Moscow

Abstract. The terminology of secondary school geometry seems well-established, but it is imperfect, as evidenced by careful examination of certain concepts and the terms that denote them. Our purpose here is to uncover some of the possible types of problems with the terminology, to point at actual examples of such problems, and to propose solutions where it seems appropriate.

Keywords: concepts, geometry, value, magnitude, equality of figures, perpendicularity, attitude, vector.