

СПИНОРНАЯ СТРУКТУРА И ПЕРИОДИЧНОСТЬ АЛГЕБР КЛИФФОРДА

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет

Аннотация. Исследуется периодичность Картана-Ботта спинорной структуры, ассоциированной с системой неприводимых конечномерных представлений группы Лоренца. Показывается, что периодичность по модулю 8 спинорной структуры генерирует периодические соотношения на системе представлений группы Лоренца, которые, в свою очередь, образуют фрактальную структуру с периодом, задаваемым циклом группы Брауэра-Уолла. Устанавливается, что периодическая симметрия спинорной структуры является прообразом суперсимметрии.

Ключевые слова: спинорная структура, группа Лоренца, периодичность Картана-Ботта, группа Брауэра-Уолла, суперсимметрия.

1. Введение

Фундаментальная двойственность природы, впервые обнаруженная в опыте Штерна-Герлаха, привела к введению спина в квантовой механике. В 1927г. Паули [1] дал строгий метод введения спина в квантовую механику посредством определения удвоенного гильбертова пространства $\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_\infty$. Отсюда берет начало понятие **спинорной структуры**, как структуры подлежащей (более фундаментальной) по отношению ко всем явлениям физического мира. В теории физических структур Ю.И. Кулакова [2] аналогичную роль играет понятие **бинарной структуры**, которая определяется двумя множествами \mathfrak{N} и \mathfrak{M} , связанными парными отношениями. Спинорная структура понимается как фундаментальный уровень реальности, относительно которого классическое пространство-время, размерность, сигнатура, метрика, взаимодействия, частицы и поля являются производными конструкциями. Эта точка зрения, восходящая к философии Лейбница, впервые получила строгую математическую формулировку в твисторной программе Пенроуза [3, 4]. Согласно Пенроузу [3] пространственно-временной континуум является вторичным понятием относительно **твисторной структуры**¹. Аналогичную концепцию развивает

¹Твистор \mathbf{Z}^α представляется парой 2-компонентных величин: спинором ω^s и ковариантным спинором π_s из сопряженного пространства, т.е. $\mathbf{Z}^\alpha = (\omega^s, \pi_s)$ (или $\mathbf{Z}^\alpha = (\xi^\mu, \xi_\mu)$). Твисторы можно рассматривать как «редуцированные спиноры» для псевдоунитарной группы $SO_0(2, 4)$, действующей в шестимерном пространстве. В этой статье мы выбираем $\mathbf{Spin}_+(1, 3) \simeq SL(2, \mathbb{C})$

Ю. С. Владимиров в своей реляционной теории пространства-времени и взаимодействий [5], в которой ключевую роль играет теория физических структур Кулакова.

Другими словами, в реляционной концепции пространство-время утрачивает статус фундаментальной субстанции, превращаясь в абсолютно производную конструкцию (систему отношений), генерируемую подлежащей спинорной (бинарной) структурой. В данном контексте пространственно-временные дискретные симметрии P (*инверсия пространства*), T (*обращение времени*) следует рассматривать как *проекции* фундаментальных автоморфизмов спинорной структуры. Такое рассмотрение было проведено в работах [6–11]. Более того, наряду с симметриями P и T данный подход позволяет рассматривать на равных основаниях другую важную дискретную симметрию C (*зарядовое сопряжение*), не являющуюся, как известно, пространственно-временной симметрией. Представляет интерес дальнейшее исследование симметрий спинорной структуры, задающих прообразы пространственно-временных (или внутренних) симметрий теоретической физики.

В данной статье, следуя логике реляционной концепции, исследуется симметрия спинорной структуры, являющаяся прообразом так называемой *суперсимметрии*, т.е. симметрии, связывающей между собой бозоны и фермионы. Эта симметрия непосредственно связана с периодичностью спинорной структуры (периодичность Картана-Ботта алгебр Клиффорда). Показывается, что группа Брауэра-Уолла $BW_{\mathbb{R}}$, связывающая между собой различные типы алгебр Клиффорда, индуцирует на системе спинтензорных представлений группы Лоренца действие, аналогичное действию суперсимметрии, т.е. действие, связывающее между собой бозонные и фермионные представления этой группы. При этом бозонные и фермионные представления понимаются как векторы абстрактного гильбертова пространства $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_{\infty}$ (это пространство является естественным обобщением пространства Паули $\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_{\infty}$). Показывается, что периодичность по модулю 8 подлежащей спинорной структуры генерирует периодические (по модулю 2) соотношения на системе представлений (вещественных и кватернионных) группы Лоренца. Более того, действие группы Брауэра-Уолла $BW_{\mathbb{R}}$ порождает на системе представлений группы Лоренца фракталоподобную структуру с периодом, задаваемым циклом группы $BW_{\mathbb{R}}$.

2. Периодичность алгебр Клиффорда

Как известно, для алгебры Клиффорда $\mathcal{C}_{p,q}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ имеются изоморфизмы $\mathcal{C}_{p,q} \simeq \text{End}_{\mathbb{K}}(I_{p,q}) \simeq \text{Mat}_{2^m}(\mathbb{K})$, где $m = (p + q)/2$, $I_{p,q} = \mathcal{C}_{p,q}f$ — минимальный левый идеал алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$, $\mathbb{K} = f\mathcal{C}_{p,q}f$ — кольцо деления алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$. Примитивный идемпотент алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$ имеет вид

$$f = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{e}_{\alpha_1}) \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{e}_{\alpha_2}) \cdots \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{e}_{\alpha_k}),$$

в качестве *генерирующего ядра* спинорной структуры. Однако группа $\mathbf{Spin}_+(2, 4) \simeq \text{SU}(2, 2)$ (универсальное накрытие конформной группы $\text{SO}_0(2, 4)$) также может быть выбрана в качестве такого ядра (в силу подобия комплексных оболочек групповых алгебр $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{su}(2, 2)$).

где $\mathbf{e}_{\alpha_1}, \mathbf{e}_{\alpha_2}, \dots, \mathbf{e}_{\alpha_k}$ — коммутирующие элементы с квадратом 1 канонического базиса алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$, генерирующие конечную группу порядка 2^k , т.е. $(\mathbf{e}_{\alpha_1}, \mathbf{e}_{\alpha_2}, \dots, \mathbf{e}_{\alpha_k}) \simeq (\mathbb{Z}_2)^{\otimes k}$, где $(\mathbb{Z}_2)^{\otimes k} = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}_2$ (k раз) — абелева группа. Значения числа k определяются формулой $k = q - r_{q-p}$, где r_i — числа Радона-Гурвица, значения которых образуют цикл с периодом 8: $r_{i+8} = r_i + 4$. Ниже приведены значения всех чисел Радона-Гурвица r_i :

$$\begin{array}{c} i \quad 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \\ \hline r_i \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \end{array}.$$

В терминах конечных групп мы имеем здесь *идемпотентную группу* $T_{p,q}(f) \simeq (\mathbb{Z}_2)^{\otimes(k+1)}$ порядка $2^{k+1} = 2^{1+q-r_{q-p}}$.

Алгебры Клиффорда $\mathcal{C}_{p,q}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ подразделяются на восемь различных типов со следующей структурой колец делений.

I. Центральные простые алгебры.

1. Два типа $p - q \equiv 0, 2 \pmod{8}$ с вещественным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$.
2. Два типа $p - q \equiv 3, 7 \pmod{8}$ с комплексным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$.
3. Два типа $p - q \equiv 4, 6 \pmod{8}$ с кватернионным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$.

II. Полупростые алгебры.

4. Тип $p - q \equiv 1 \pmod{8}$ с двойным вещественным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.
5. Тип $p - q \equiv 5 \pmod{8}$ с двойным кватернионным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

2.1. Периодичность по модулю 8

Спинорная шахматная доска [12] (см. рис. 1) является множеством, состоящим из 64 вещественных алгебр

$$\{\mathcal{C}_{p,q}, \mid 0 \leq p, q \leq 7\},$$

где $\mathcal{C}_{0,0} \simeq \mathbb{R}$.

Далее, алгебра \mathcal{C} естественным образом \mathbb{Z}_2 -градуирована. Пусть \mathcal{C}^+ (соответственно \mathcal{C}^-) множество, состоящее из всех чётных (соответственно нечётных) элементов алгебры \mathcal{C} . Очевидно, что $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \oplus \mathcal{C}^-$, а также $\mathcal{C}^+\mathcal{C}^+ \subset \mathcal{C}^+$, $\mathcal{C}^+\mathcal{C}^- \subset \mathcal{C}^-$, $\mathcal{C}^-\mathcal{C}^+ \subset \mathcal{C}^-$, $\mathcal{C}^-\mathcal{C}^- \subset \mathcal{C}^+$. Степень $\deg a$ чётного (соотв. нечётного) элемента $a \in \mathcal{C}$ равна 0 (соотв. 1). Пусть \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — две \mathbb{Z}_2 -градуированные алгебры над полем \mathbb{F} , тогда умножение однородных элементов $\mathbf{a}' \in \mathfrak{A}$ и $\mathbf{b} \in \mathfrak{B}$ в градуированном тензорном произведении $\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathfrak{B}$ определяется следующим образом: $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}') = (-1)^{\deg \mathbf{b} \deg \mathbf{a}'} \mathbf{a}\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}\mathbf{b}'$.

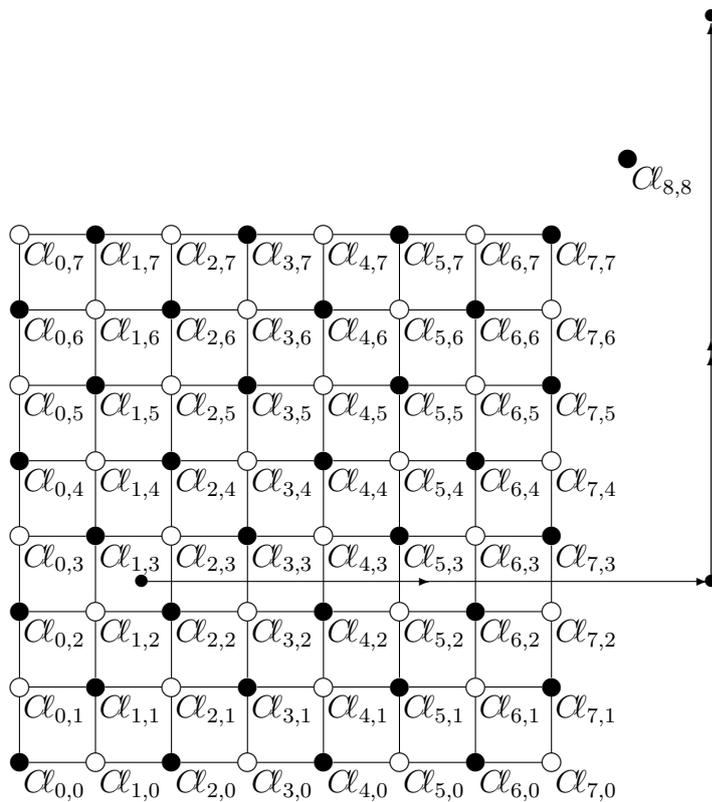


Рис. 1. Спинорная шахматная доска. Чётно- и нечётномерные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}l_{p,q}$, $0 \leq p, q \leq 7$ занимают, соответственно, чёрные и белые круги (клетки доски). Каждая вещественная алгебра Клиффорда может быть получена из алгебры на доске посредством движения вправо и вверх.

Теорема 1 (Шевалле [13]). Пусть V и V' — векторные пространства над полем \mathbb{F} и пусть Q и Q' — квадратичные формы для V и V' . Тогда алгебра Клиффорда $\mathcal{C}l(V \oplus V', Q \oplus Q')$ естественным образом изоморфна градуированному тензорному произведению $\mathcal{C}l(V, Q) \hat{\otimes} \mathcal{C}l(V', Q')$.

Далее, пусть $\mathcal{C}l(V, Q)$ — алгебра Клиффорда над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, где V — векторное пространство, снабжённое квадратичной формой $Q = x_1^2 + \dots + x_p^2 - \dots - x_{p+q}^2$. Если $p + q$ чётно и $\omega^2 = 1$, то $\mathcal{C}l(V, Q)$ называется *положительной* и, соответственно, *отрицательной*, если $\omega^2 = -1$, т.е. $\mathcal{C}l_{p,q} > 0$, если $p - q \equiv 0, 4 \pmod{8}$ и $\mathcal{C}l_{p,q} < 0$, если $p - q \equiv 2, 6 \pmod{8}$.

Теорема 2 (Каруби [14]). 1) Если $\mathcal{C}l(V, Q) > 0$ и $\dim V$ чётна, то

$$\mathcal{C}l(V \oplus V', Q \oplus Q') \simeq \mathcal{C}l(V, Q) \otimes \mathcal{C}l(V', Q').$$

2) Если $\mathcal{C}l(V, Q) < 0$ и размерность $\dim V$ чётна, то

$$\mathcal{C}l(V \oplus V', Q \oplus Q') \simeq \mathcal{C}l(V, Q) \otimes \mathcal{C}l(V', -Q').$$

Вещественная алгебра Клиффорда $\mathcal{C}_{p,q}$ является центрально-простой, если $p-q \not\equiv 1, 5 \pmod{8}$. Градуированное тензорное произведение двух градуированных центрально-простых алгебр также является градуированным центрально-простым [15, теорема 2]. Как известно, для алгебр Клиффорда нечётной размерности имеют место следующие изоморфизмы: $\mathcal{C}_{p,q+1}^+ \simeq \mathcal{C}_{p,q}$ и $\mathcal{C}_{p+1,q}^+ \simeq \mathcal{C}_{q,p}$ [16]. Таким образом, $\mathcal{C}_{p,q+1}^+$ и $\mathcal{C}_{p+1,q}^+$ являются центрально-простыми алгебрами. Далее, в согласии с теоремой Шевалле для градуированного тензорного произведения имеет место изоморфизм $\mathcal{C}_{p,q} \hat{\otimes} \mathcal{C}_{p',q'} \simeq \mathcal{C}_{p+p',q+q'}$. Алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$ и $\mathcal{C}_{p',q'}$ являются алгебрами одного класса, если $p+q' \equiv p'+q \pmod{8}$. Градуированные центрально-простые алгебры Клиффорда над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ образуют восемь подобных классов, которые, как легко видеть, совпадают с восемью типами алгебр $\mathcal{C}_{p,q}$ над \mathbb{R} в зависимости от структуры колец делений. Множество этих восьми типов (классов) образует группу Брауэра-Уолла $BW_{\mathbb{R}}$ [15, 17]. Очевидно, что действие группы $BW_{\mathbb{R}}$ имеет циклическую структуру, которая формально эквивалентна действию циклической группы \mathbb{Z}_8 . Циклическая структура группы $BW_{\mathbb{R}}$ может быть представлена на диаграмме Будинича-Траутмана («спинорные часы») [12] (рис. 2) посредством перехода $\mathcal{C}_{p,q}^+ \xrightarrow{h} \mathcal{C}_{p,q}$ (обход на диаграмме реализуется по часовой стрелке). При этом тип алгебры определяется на диаграмме равенством $q-p = h + 8r$, где $h \in \{1, \dots, 8\}$, $r \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что групповая структура над $\mathcal{C}_{p,q}$, определяемая группой $BW_{\mathbb{R}}$, непосредственно связана с периодичностью Картана-Ботта [18].

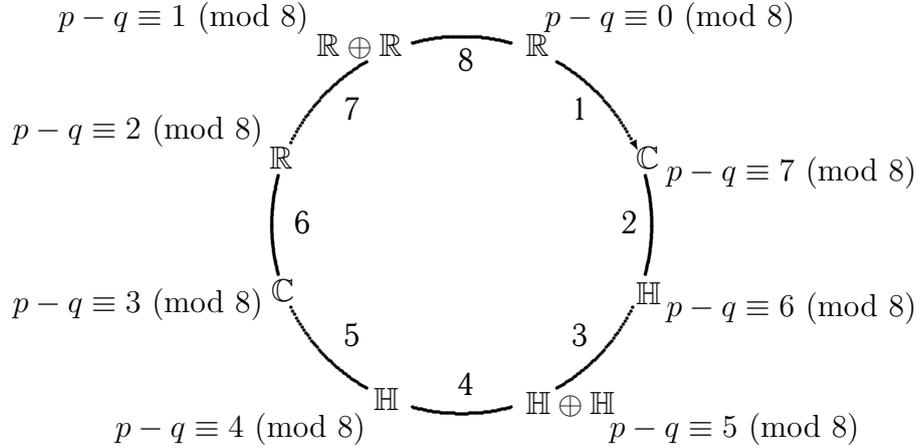


Рис. 2. Спинорные часы. Диаграмма Будинича-Траутмана для группы Брауэра-Уолла $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$.

С другой стороны, градуированные центрально-простые алгебры Клиффорда над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ образуют **градуированную группу Брауэра** $G(\mathcal{C}_{p,q}, \gamma, \circ)$ [15, 19], циклическая структура которой описывается группой Брауэра-Уолла $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ [17]. Следовательно, циклическая структура группы $G(\mathcal{C}_{p,q}, \gamma, \circ) \sim \sim BW_{\mathbb{R}}$ задаётся переходом $\mathcal{C}_{p,q}^+ \xrightarrow{h} \mathcal{C}_{p,q}$, где тип алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$ определяется

формулой $q - p = h + 8r$, здесь $h \in \{1, \dots, 8\}$, $r \in \mathbb{Z}$ [12]. Рассмотрим подробно несколько циклов действия группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$. В силу изоморфизма $\mathcal{A}_{0,1}^+ \simeq \mathcal{A}_{0,0}$ переход $\mathcal{A}_{0,1}^+ \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,1}$ приводит к переходу $\mathcal{A}_{0,0} \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,1}$, т.е. $\mathbb{R} \xrightarrow{1} \mathbb{C}$. При этом $h = 1$ и $r = 0$ (начальная точка первого цикла). Далее, в силу изоморфизма $\mathcal{A}_{0,2}^+ \simeq \mathcal{A}_{0,1}$ переход $\mathcal{A}_{0,2}^+ \xrightarrow{2} \mathcal{A}_{0,2}$ индуцирует переход $\mathcal{A}_{0,1} \xrightarrow{2} \mathcal{A}_{0,2}$ ($\mathbb{C} \xrightarrow{2} \mathbb{H}$), при этом $h = 2$ и $r = 0$. Следующий шаг $\mathcal{A}_{0,3}^+ \xrightarrow{3} \mathcal{A}_{0,3}$ ($\mathbb{H} \xrightarrow{3} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$) в силу $\mathcal{A}_{0,3}^+ \simeq \mathcal{A}_{0,2}$ приводит к переходу $\mathcal{A}_{0,2} \xrightarrow{3} \mathcal{A}_{0,3}$. При этом переходе имеем $h = 3$ и $r = 0$. В силу изоморфизма $\mathcal{A}_{0,4}^+ \simeq \mathcal{A}_{0,3}$ переход $\mathcal{A}_{0,4}^+ \xrightarrow{4} \mathcal{A}_{0,4}$ ($\mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \xrightarrow{4} \mathbb{H}$) индуцирует $\mathcal{A}_{0,3} \xrightarrow{4} \mathcal{A}_{0,4}$, при этом $h = 4$ и $r = 0$. Далее, в силу $\mathcal{A}_{0,5}^+ \simeq \mathcal{A}_{0,4}$ переход $\mathcal{A}_{0,5}^+ \xrightarrow{5} \mathcal{A}_{0,5}$ ($\mathbb{H} \xrightarrow{5} \mathbb{C}$) индуцирует $\mathcal{A}_{0,4} \xrightarrow{5} \mathcal{A}_{0,5}$. При этом переходе имеем $h = 5$ и $r = 0$. Следующий шаг $\mathcal{A}_{0,6}^+ \xrightarrow{6} \mathcal{A}_{0,6}$ ($\mathbb{C} \xrightarrow{6} \mathbb{R}$) в силу $\mathcal{A}_{0,6}^+ \simeq \mathcal{A}_{0,5}$ индуцирует $\mathcal{A}_{0,5} \xrightarrow{6} \mathcal{A}_{0,6}$, здесь имеем $h = 6$ и $r = 0$. В свою очередь, переход $\mathcal{A}_{0,7}^+ \xrightarrow{7} \mathcal{A}_{0,7}$ ($\mathbb{R} \xrightarrow{7} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$) в силу $\mathcal{A}_{0,7}^+ \simeq \mathcal{A}_{0,6}$ индуцирует $\mathcal{A}_{0,6} \xrightarrow{7} \mathcal{A}_{0,7}$. На этом шаге имеем $h = 7$ и $r = 0$. Наконец, переход $\mathcal{A}_{0,8}^+ \xrightarrow{8} \mathcal{A}_{0,8}$ ($\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{8} \mathbb{R}$) завершает первый цикл ($h = 8$, $r = 0$) и в силу изоморфизма $\mathcal{A}_{0,8}^+ \simeq \mathcal{A}_{0,7}$ индуцирует следующий переход $\mathcal{A}_{0,7} \xrightarrow{8} \mathcal{A}_{0,8}$. Полный обход первого цикла показан на рис. 3. Первый цикл генерирует первые восемь клеток ($\mathcal{A}_{0,q}$, $q = 0, \dots, 7$) спинорной шахматной доски (см. рис. 1). Следующие восемь клеток ($\mathcal{A}_{1,q}$, $q = 0, \dots, 7$) также генерируются первым циклом (согласно правилу $\mathcal{A}_{1,q} \simeq \mathcal{A}_{1,0} \otimes \mathcal{A}_{0,q}$, $q = 0, \dots, 7$) и т.д. ($\mathcal{A}_{2,q} \simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,q}$, $\mathcal{A}_{3,q} \simeq \mathcal{A}_{3,0} \otimes \mathcal{A}_{0,q}$, ..., $\mathcal{A}_{6,q} \simeq \mathcal{A}_{6,0} \otimes \mathcal{A}_{0,q}$, $q = 0, \dots, 7$). Подобным образом заполняются все остальные клетки спинорной шахматной доски, показанной на рис. 1.

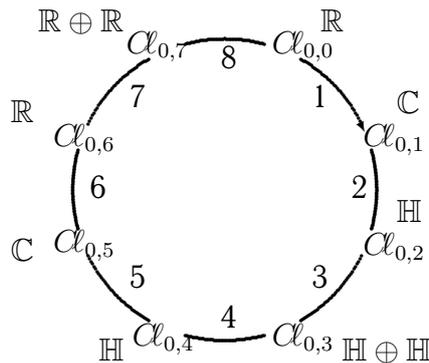


Рис. 3. Первый цикл группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$.

Второй цикл ($h = 1$, $r = 1$) стартует с перехода $\mathcal{A}_{0,9}^+ \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,9}$ ($\mathcal{A}_{0,8} \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,9}$) и так далее:

- 1) $\mathcal{A}_{0,9}^+ \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,9}$ ($\mathcal{A}_{0,8} \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,9}$), $h = 1$, $r = 1$, $\mathbb{R} \xrightarrow{1} \mathbb{C}$;

- 2) $\mathcal{A}_{0,10}^+ \xrightarrow{2} \mathcal{A}_{0,10} \ (\mathcal{A}_{0,9} \xrightarrow{2} \mathcal{A}_{0,10}), \ h = 2, \ r = 1, \ \mathbb{C} \xrightarrow{2} \mathbb{H};$
- 3) $\mathcal{A}_{0,11}^+ \xrightarrow{3} \mathcal{A}_{0,11} \ (\mathcal{A}_{0,10} \xrightarrow{3} \mathcal{A}_{0,11}), \ h = 3, \ r = 1, \ \mathbb{H} \xrightarrow{3} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H};$
- 4) $\mathcal{A}_{0,12}^+ \xrightarrow{4} \mathcal{A}_{0,12} \ (\mathcal{A}_{0,11} \xrightarrow{4} \mathcal{A}_{0,12}), \ h = 4, \ r = 1, \ \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \xrightarrow{4} \mathbb{H};$
- 5) $\mathcal{A}_{0,13}^+ \xrightarrow{5} \mathcal{A}_{0,13} \ (\mathcal{A}_{0,12} \xrightarrow{5} \mathcal{A}_{0,13}), \ h = 5, \ r = 1, \ \mathbb{H} \xrightarrow{5} \mathbb{C};$
- 6) $\mathcal{A}_{0,14}^+ \xrightarrow{6} \mathcal{A}_{0,14} \ (\mathcal{A}_{0,13} \xrightarrow{6} \mathcal{A}_{0,14}), \ h = 6, \ r = 1, \ \mathbb{C} \xrightarrow{6} \mathbb{R};$
- 7) $\mathcal{A}_{0,15}^+ \xrightarrow{7} \mathcal{A}_{0,15} \ (\mathcal{A}_{0,14} \xrightarrow{7} \mathcal{A}_{0,15}), \ h = 7, \ r = 1, \ \mathbb{R} \xrightarrow{7} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R};$
- 8) $\mathcal{A}_{0,16}^+ \xrightarrow{8} \mathcal{A}_{0,16} \ (\mathcal{A}_{0,15} \xrightarrow{8} \mathcal{A}_{0,16}), \ h = 8, \ r = 1, \ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{8} \mathbb{R}.$

Далее, восьмой цикл ($r = 7$) завершает построение первых восьми клеток новой спинорной шахматной доски (фрактальной самоподобной алгебраической структуры второго порядка):

- 1) $\mathcal{A}_{0,57}^+ \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,57} \ (\mathcal{A}_{0,56} \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,57}), \ h = 1, \ r = 7, \ \mathbb{R} \xrightarrow{1} \mathbb{C};$
- 2) $\mathcal{A}_{0,58}^+ \xrightarrow{2} \mathcal{A}_{0,58} \ (\mathcal{A}_{0,57} \xrightarrow{2} \mathcal{A}_{0,58}), \ h = 2, \ r = 7, \ \mathbb{C} \xrightarrow{2} \mathbb{H};$
- 3) $\mathcal{A}_{0,59}^+ \xrightarrow{3} \mathcal{A}_{0,59} \ (\mathcal{A}_{0,58} \xrightarrow{3} \mathcal{A}_{0,59}), \ h = 3, \ r = 7, \ \mathbb{H} \xrightarrow{3} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H};$
- 4) $\mathcal{A}_{0,60}^+ \xrightarrow{4} \mathcal{A}_{0,60} \ (\mathcal{A}_{0,59} \xrightarrow{4} \mathcal{A}_{0,60}), \ h = 4, \ r = 7, \ \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \xrightarrow{4} \mathbb{H};$
- 5) $\mathcal{A}_{0,61}^+ \xrightarrow{5} \mathcal{A}_{0,61} \ (\mathcal{A}_{0,60} \xrightarrow{5} \mathcal{A}_{0,61}), \ h = 5, \ r = 7, \ \mathbb{H} \xrightarrow{5} \mathbb{C};$
- 6) $\mathcal{A}_{0,62}^+ \xrightarrow{6} \mathcal{A}_{0,62} \ (\mathcal{A}_{0,61} \xrightarrow{6} \mathcal{A}_{0,62}), \ h = 6, \ r = 7, \ \mathbb{C} \xrightarrow{6} \mathbb{R};$
- 7) $\mathcal{A}_{0,63}^+ \xrightarrow{7} \mathcal{A}_{0,63} \ (\mathcal{A}_{0,62} \xrightarrow{7} \mathcal{A}_{0,63}), \ h = 7, \ r = 7, \ \mathbb{R} \xrightarrow{7} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R};$
- 8) $\mathcal{A}_{0,64}^+ \xrightarrow{8} \mathcal{A}_{0,64} \ (\mathcal{A}_{0,63} \xrightarrow{8} \mathcal{A}_{0,64}), \ h = 8, \ r = 7, \ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{8} \mathbb{R}.$

Очевидно, что процесс, приведший к фрактальной алгебраической структуре второго порядка (см. рис. 4), может быть продолжен до бесконечности. Следовательно, мы приходим здесь к фрактальной структуре аналогичной ковру Серпинского [20]. Фрактальная размерность (размерность Безиковича-Хаусдорфа) этой структуры равна $D = \ln 63 / \ln 8 \approx 1,9924$.

3. Спинорная структура и группа $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$

Как известно [21, 22], спинтензорные представления группы $SL(2; \mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1, 3)$ образуют основу всех конечномерных представлений группы Лоренца. Рассмотрим связь спинтензорных представлений с комплексными алгебрами Клиффорда. С каждой комплексной алгеброй Клиффорда $\mathbb{C}_n = \mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{p,q}$ ($n = p + q$) ассоциировано спинпространство $\mathbb{S}_{2^{n/2}}$, которое является комплексификацией минимального левого идеала вещественной подалгебры $\mathcal{A}_{p,q}$: $\mathbb{S}_{2^{n/2}} = \mathbb{C} \otimes I_{p,q} = \mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{p,q} f_{pq}$, где f_{pq} — примитивный идемпотент подалгебры $\mathcal{A}_{p,q}$. Далее, спинпространство, соответствующее бикватернионной алгебре \mathbb{C}_2 , имеет вид $\mathbb{S}_2 = \mathbb{C} \otimes I_{2,0} = \mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{2,0} f_{20}$ или $\mathbb{S}_2 = \mathbb{C} \otimes I_{1,1} = \mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{1,1} f_{11} (\mathbb{C} \otimes I_{0,2} = \mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{0,2} f_{02})$. Следовательно, тензорное произведение k алгебр \mathbb{C}_2 индуцирует тензорное произведение k спинпространств \mathbb{S}_2 :

$$\mathbb{S}_2 \otimes \mathbb{S}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_{2^k}.$$

Векторы спинпространства \mathbb{S}_{2^k} (или элементы минимального левого идеала ал-

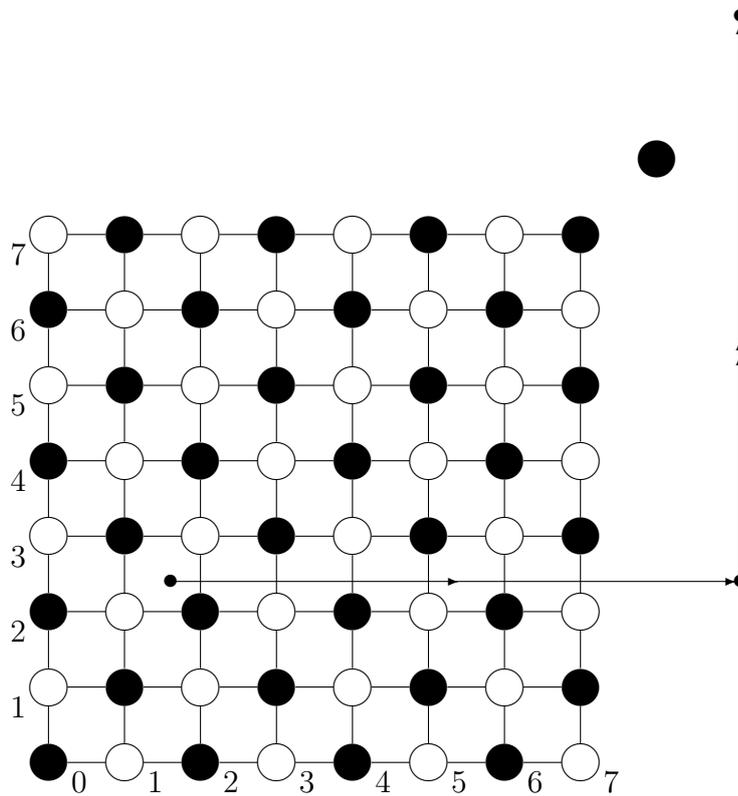


Рис. 4. Спинорная шахматная доска второго порядка. Чёрные и белые круги (клетки доски) представляют спинорные шахматные доски первого порядка (см. рис. 1). Эти шахматные доски отличаются друг от друга числом цикла ($r = 0, \dots, 7$) группы Брауэра-Уолла $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$.

гебры \mathbb{C}_{2k}) являются спинтензорами следующего вида:

$$s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = \sum s^{\alpha_1} \otimes s^{\alpha_2} \otimes \dots \otimes s^{\alpha_k}, \tag{1}$$

где суммирование производится по всем наборам индексов $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$, $\alpha_i = 1, 2$.

Далее, пусть \mathbb{C}_2^* — алгебра бикватернионов, коэффициенты которой комплексно сопряжены коэффициентам алгебры \mathbb{C}_2 . Тензорное произведение $\mathbb{C}_2^* \otimes \mathbb{C}_2^* \otimes \dots \otimes \mathbb{C}_2^* \simeq \mathbb{C}_{2^r}^*$ r алгебр \mathbb{C}_2^* индуцирует тензорное произведение r спинпространств $\dot{\mathbb{S}}_2$:

$$\dot{\mathbb{S}}_2 \otimes \dot{\mathbb{S}}_2 \otimes \dots \otimes \dot{\mathbb{S}}_2 = \dot{\mathbb{S}}_{2^r}.$$

Векторы спинпространства $\dot{\mathbb{S}}_{2^r}$ имеют вид

$$s^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dots \dot{\alpha}_r} = \sum s^{\dot{\alpha}_1} \otimes s^{\dot{\alpha}_2} \otimes \dots \otimes s^{\dot{\alpha}_r}. \tag{2}$$

В общем случае имеем тензорное произведение k алгебр \mathbb{C}_2 и r алгебр \mathbb{C}_2^* :

$$\underbrace{\mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{C}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}_2}_{k \text{ раз}} \otimes \underbrace{\mathbb{C}_2^* \otimes \mathbb{C}_2^* \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}_2^*}_{r \text{ раз}} \simeq \mathbb{C}_{2k} \otimes \mathbb{C}_{2r}^*, \quad (3)$$

которое индуцирует спинпространство

$$\underbrace{\mathbb{S}_2 \otimes \mathbb{S}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}_2}_{k \text{ раз}} \otimes \underbrace{\dot{\mathbb{S}}_2 \otimes \dot{\mathbb{S}}_2 \otimes \cdots \otimes \dot{\mathbb{S}}_2}_{r \text{ раз}} = \mathbb{S}_{2k+r} \quad (4)$$

с векторами

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dots \dot{\alpha}_r} = \sum \mathbf{s}^{\alpha_1} \otimes \mathbf{s}^{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{s}^{\alpha_k} \otimes \mathbf{s}^{\dot{\alpha}_1} \otimes \mathbf{s}^{\dot{\alpha}_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{s}^{\dot{\alpha}_r}. \quad (5)$$

Для каждого $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ определим линейное преобразование спинтензора \mathbf{s} посредством формулы

$$\mathbf{s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \dots \dot{\alpha}_r} \longrightarrow \sum_{(\beta)(\dot{\beta})} A^{\alpha_1 \beta_1} A^{\alpha_2 \beta_2} \dots A^{\alpha_k \beta_k} \overline{A}^{\dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1} \overline{A}^{\dot{\alpha}_2 \dot{\beta}_2} \dots \overline{A}^{\dot{\alpha}_r \dot{\beta}_r} \mathbf{s}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \dots \dot{\beta}_r}, \quad (6)$$

где символы (β) и $(\dot{\beta})$ означают $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ и $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dots, \dot{\beta}_r$. Спинтензорные представления группы $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, определяемые формулой (6), действуют в спинпространстве \mathbb{S}_{2k+r} размерности 2^{k+r} . Как правило, каждое из этих представлений редуцируется на симметричную и антисимметричную части. Выделим подпространства $\text{Sym}_{(k,r)} \subset \mathbb{S}_{2k+r}$ симметрических спинтензоров. Представления группы $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ в пространствах $\text{Sym}_{(k,r)}$ образуют *полную* систему неприводимых представлений этой группы. Итак, любая пара подстановок

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_2 & \dots & \dot{\alpha}_r \end{pmatrix}$$

определяет преобразование (α, β) , отображающее \mathbf{S} в следующий полином:

$$P_{\alpha\beta} \mathbf{S} = \mathbf{s}^{\alpha(\alpha_1)\alpha(\alpha_2)\dots\alpha(\alpha_k)\beta(\dot{\alpha}_1)\beta(\dot{\alpha}_2)\dots\beta(\dot{\alpha}_r)}.$$

Спинтензор \mathbf{S} называется *симметрическим спинтензором*, если при любых α, β выполняется равенство

$$P_{\alpha\beta} \mathbf{S} = \mathbf{S}.$$

Пространство $\text{Sym}_{(k,r)}$ симметрических спинтензоров имеет размерность

$$\dim \text{Sym}_{(k,r)} = (k+1)(r+1). \quad (7)$$

Размерность пространства $\text{Sym}_{(k,r)}$ называется *степенью* представления τ_{ij} группы $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Легко видеть, что группа $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ имеет представления *любой*

степени. Это представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ обозначим как $\tau_{\frac{k}{2}, \frac{r}{2}} = \tau_{li}$. Произведения (3) и (4) определяют *комплексную спинорную структуру*. Представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, генерируемые в рамках этой структуры, также являются комплексными. Каждое *неприводимое* конечномерное представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ эквивалентно одному из представлений $\tau_{k/2, r/2}$.

Далее, *любое* неприводимое конечномерное представление τ_{li} группы $SL(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1, 3)$ соответствует **частице спина** s , где $s = |l - i|$ (см. также [11]). Спин s принимает значения

$$-s, -s + 1, -s + 2, \dots, s$$

или

$$-|l - i|, -|l - i| + 1, -|l - i| + 2, \dots, |l - i|. \quad (8)$$

Обычное определение спина следует при ограничении $\tau_{li} \rightarrow \tau_{l,0}$ (или $\tau_{li} \rightarrow \tau_{0,i}$), т.е. при ограничении группы $SL(2, \mathbb{C})$ на ее подгруппу $SU(2)$. В этом случае последовательность значений (8) редуцируется к $-l, -l + 1, -l + 2, \dots, l$ (или $-i, -i + 1, -i + 2, \dots, i$). Все представления τ_{li} могут быть сгруппированы в спиновые мультиплеты в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_{2s+1}^S \otimes \mathbf{H}_\infty$. $\mathbf{H}_{2s+1}^S \otimes \mathbf{H}_\infty$ является подпространством более общего спин-зарядового гильбертова пространства $\mathbf{H}^S \otimes \mathbf{H}^Q \otimes \mathbf{H}_\infty$ [23]. Волновые уравнения для произвольных спиновых мультиплетов и их решения в виде рядов по гиперсферическим функциям даны в [24–28].

4. Периодичность по модулю 8 и представления группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$

В этом параграфе дадим определение *вещественной спинорной структуры*. Очевидно, что вещественная спинорная структура является подструктурой комплексной спинорной структуры, определяемой произведениями (3) и (4). Легко видеть, что при редукции комплексных представлений τ_{li}^c группы $SL(2, \mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1, 3)$ на вещественные представления мы приходим к редукции $\mathbb{C}_n \rightarrow \mathcal{A}_{p,q}$ в тензорном произведении (3). Далее, как известно, над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ при $p + q \equiv 0 \pmod{2}$ существуют четыре типа вещественных подалгебр $\mathcal{A}_{p,q}$: два типа $p - q \equiv 0, 2 \pmod{8}$ с вещественным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ и два типа $p - q \equiv 4, 6 \pmod{8}$ с кватернионным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$. Следовательно, вещественная спинорная структура индуцирует следующие четыре класса вещественных представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} 0\tau_{li}^r &\leftrightarrow \mathcal{A}_{p,q}, p - q \equiv 0 \pmod{8}, \mathbb{K} \simeq \mathbb{R}; \\ 2\tau_{li}^r &\leftrightarrow \mathcal{A}_{p,q}, p - q \equiv 2 \pmod{8}, \mathbb{K} \simeq \mathbb{R}; \\ 4\tau_{li}^q &\leftrightarrow \mathcal{A}_{p,q}, p - q \equiv 4 \pmod{8}, \mathbb{K} \simeq \mathbb{H}; \\ 6\tau_{li}^q &\leftrightarrow \mathcal{A}_{p,q}, p - q \equiv 6 \pmod{8}, \mathbb{K} \simeq \mathbb{H}. \end{aligned} \quad (9)$$

Будем называть представления ${}_4\tau_{ii}^q$ и ${}_6\tau_{ii}^q$ *кватернионными представлениями* группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. С другой стороны, над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ при $p + q \equiv 1 \pmod{2}$ существуют четыре типа вещественных подалгебр $\mathcal{A}_{p,q}$: два типа $p - q \equiv 3, 7 \pmod{8}$ с комплексным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$, один тип $p - q \equiv 1 \pmod{8}$ с двойным вещественным кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ и один тип $p - q \equiv 5 \pmod{8}$ с двойным кватернионным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Следовательно, имеем следующие четыре класса вещественных представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$:

$$\begin{aligned} {}_3\tau_{ii}^c &\leftrightarrow \mathcal{A}_{p,q}, p - q \equiv 3 \pmod{8}, \mathbb{K} \simeq \mathbb{C}; \\ {}_7\tau_{ii}^c &\leftrightarrow \mathcal{A}_{p,q}, p - q \equiv 7 \pmod{8}, \mathbb{K} \simeq \mathbb{C}; \\ {}_{0,2}\tau_{ii}^r \oplus {}_{0,2}\tau_{ii}^r &\leftrightarrow \mathcal{A}_{p,q}, p - q \equiv 1 \pmod{8}, \mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}; \\ {}_{4,6}\tau_{ii}^q \oplus {}_{4,6}\tau_{ii}^q &\leftrightarrow \mathcal{A}_{p,q}, p - q \equiv 5 \pmod{8}, \mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь ${}_{0,2}\tau_{ii}^r \oplus {}_{0,2}\tau_{ii}^r \simeq {}_1\tau_{ii}^r$ означает, что в силу изоморфизма $\mathcal{A}_{p,q} \simeq \mathcal{A}_{p,q-1} \oplus \mathcal{A}_{p,q-1}$ (или $\mathcal{A}_{p,q} \simeq \mathcal{A}_{q,p-1} \oplus \mathcal{A}_{q,p-1}$), где $p - q \equiv 1 \pmod{8}$ и алгебры $\mathcal{A}_{p,q-1}$ (или $\mathcal{A}_{q,p-1}$) имеют тип $p - q \equiv 0 \pmod{8}$ (или $p - q \equiv 2 \pmod{8}$), представление ${}_1\tau_{ii}^r$ эквивалентно ${}_0\tau_{ii}^r \oplus {}_0\tau_{ii}^r$ (или ${}_2\tau_{ii}^r \oplus {}_2\tau_{ii}^r$). Аналогично, имеем ${}_{4,6}\tau_{ii}^q \oplus {}_{4,6}\tau_{ii}^q \simeq {}_5\tau_{ii}^q$ для представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$ с двойным кватернионным кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Следовательно, все вещественные представления группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$ разделяются на два множества: \mathfrak{M}^+ ($p - q \equiv 0, 2, 4, 6 \pmod{8}$) и \mathfrak{M}^- ($p - q \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8}$), которые образуют полную систему $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^+ \oplus \mathfrak{M}^-$ вещественных представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$. Найдем связь числа l с размерностью вещественной алгебры $\mathcal{A}_{p,q}$. Используя теорему Каруби, получим для алгебры $\mathcal{A}_{p,q}$ ($p + q \equiv 0 \pmod{2}$) следующую факторизацию:

$$\mathcal{A}_{p,q} \simeq \underbrace{\mathcal{A}_{s_i,t_j} \otimes \mathcal{A}_{s_i,t_j} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{s_i,t_j}}_{r \text{ раз}}, \quad (11)$$

где $s_i, t_j \in \{0, 1, 2\}$. Алгебра (11) соответствует представлениям ${}_0\tau_{ii}^r, {}_2\tau_{ii}^r, {}_4\tau_{ii}^q, {}_6\tau_{ii}^q$ группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$. Очевидно, что $l = r/2$ и $n = 2r = p + q = 4l$, следовательно, $l = (p + q)/4$. При $p + q \equiv 1 \pmod{2}$ получим

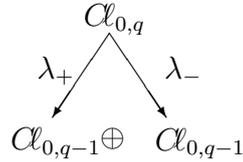
$$\mathcal{A}_{p,q} \simeq \underbrace{\mathcal{A}_{s_i,t_j} \otimes \mathcal{A}_{s_i,t_j} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{s_i,t_j}}_{r \text{ раз}} \oplus \underbrace{\mathcal{A}_{s_i,t_j} \otimes \mathcal{A}_{s_i,t_j} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{s_i,t_j}}_{r \text{ раз}}. \quad (12)$$

В свою очередь, алгебра (12) ассоциирована с двойными представлениями ${}_0\tau_{ii}^r \oplus {}_0\tau_{ii}^r, {}_2\tau_{ii}^r \oplus {}_2\tau_{ii}^r$ и ${}_4\tau_{ii}^q \oplus {}_4\tau_{ii}^q, {}_6\tau_{ii}^q \oplus {}_6\tau_{ii}^q$ группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$.

4.1. Группа Брауэра-Уолла и вещественные представления группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$

Теорема 3. Действие группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ индуцирует периодические по модулю 2 соотношения на системе вещественных представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3) \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Доказательство. Прежде всего, для алгебр типа $\mathcal{A}_{0,q}$ ($q \equiv 1 \pmod{2}$) существует разложение $\mathcal{A}_{0,q} \simeq \mathcal{A}_{0,q}^+ \oplus \mathcal{A}_{0,q}^-$, где $\mathcal{A}_{0,q}^+$ — четная подалгебра алгебры $\mathcal{A}_{0,q}$. В силу изоморфизма $\mathcal{A}_{0,q}^+ \simeq \mathcal{A}_{0,q-1}$ имеем $\mathcal{A}_{0,q} \simeq \mathcal{A}_{0,q-1} \oplus \mathcal{A}_{0,q-1}$. Это разложение может быть представлено следующей схемой:



Здесь *центральные идемпотенты*

$$\lambda^+ = \frac{1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_q}{2}, \quad \lambda^- = \frac{1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_q}{2}$$

удовлетворяют соотношениям $(\lambda^+)^2 = \lambda^+$, $(\lambda^-)^2 = \lambda^-$, $\lambda^+ \lambda^- = 0$. Далее, имеется гомоморфное отображение

$$\epsilon : \mathcal{A}_{0,q} \longrightarrow {}^\epsilon \mathcal{A}_{0,q-1}, \tag{13}$$

где

$${}^\epsilon \mathcal{A}_{0,q-1} \simeq \mathcal{A}_{0,q} / \text{Ker } \epsilon$$

— фактор-алгебра, $\text{Ker } \epsilon = \{\mathcal{A}^1 - \omega \mathcal{A}^1\}$ — ядро гомоморфизма ϵ , $\mathcal{A}^1 \in \mathcal{A}_{0,q-1}$ — произвольный элемент алгебры $\mathcal{A}_{0,q-1}$, $\omega = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_q \in \mathcal{A}_{0,q}$ — максимальный базисный элемент алгебры $\mathcal{A}_{0,q}$. Следовательно, в силу гомоморфного отображения (13) мы можем заменить двойные представления группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$ фактор-представлениями ${}^\epsilon \tau_{ii}^r$ и ${}^\epsilon \tau_{ii}^q$, где ${}^\epsilon \tau_{ii}^r$ — вещественное фактор-представление, а ${}^\epsilon \tau_{ii}^q$ — кватернионное фактор-представление. О подробной структуре фактор-представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$ см. [6, 7].

Следуя терминологии Вейля², можно сказать, что тензорные произведения (11) и (12) являются *субстратом* вещественных представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$. В зависимости от числа r (чётное или нечётное) произведения (11) и (12) изоморфны вещественным алгебрам Клиффорда $\mathcal{A}_{p,q}$ восьми различных типов, где $r = (p+q)/2$. В согласии с (9) и (10) имеем *восемь различных типов вещественных представлений* группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$. С другой стороны, группа Брауэра-Уолла $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ действует на множестве алгебр $\mathcal{A}_{p,q}$ посредством перехода $\mathcal{A}_{p,q}^+ \xrightarrow{h} \mathcal{A}_{p,q}$, где $h \in \{1, \dots, 8\}$, $r \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ *связывает различные типы вещественных алгебр Клиффорда*. Отсюда непосредственно следует, что действие группы $BW_{\mathbb{R}}$ на субстрате $\mathcal{A}_{p,q}$ индуцирует циклические соотношения на множестве вещественных представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$ посредством следующих отображений:

$$\mathcal{A}_{p,q} \xrightarrow{\gamma} \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}), \quad u \longrightarrow \gamma(u), \quad \gamma(u)\mathbf{s} = u\mathbf{s};$$

²Согласно Вейлю [29], симметрические и антисимметрические тензорные произведения являются *субстратом* всех представлений группы \mathfrak{c}_n (\mathfrak{c}_n — группа всех несингулярных линейных преобразований в n измерениях).

$$\mathcal{A}_{p,q} \xrightarrow{\gamma} \text{End}_{\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}}(\mathbb{S} \oplus \hat{\mathbb{S}}), \quad u \longrightarrow \gamma(u), \quad \gamma(u)s = us,$$

где $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{2r}(\mathbb{K}) \simeq I_{p,q} = \mathcal{A}_{p,q}f$ — вещественное спинпространство, $s = s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \in \mathbb{S}_{2r}$, $r = \frac{p+q}{2}$, $I_{p,q}$ — минимальный левый идеал алгебры $\mathcal{A}_{p,q}$, f — примитивный идемпотент алгебры $\mathcal{A}_{p,q}$. Далее, после симметризации имеем $\mathbb{S}_{2r} \rightarrow \text{Sym}_r = \text{Sym}_{(0,r)}$, где Sym_r — пространство симметрических спинтензоров $s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$. Следовательно, действие группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ связывает спинтензоры $s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$ различного ранга.

На уровне спинорной структуры первый шаг $\mathcal{A}_{0,1}^+ \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,1}$ ($\mathcal{A}_{0,0} \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,1}$) группы Брауэра-Уолла $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ генерирует переход $\tau_{0,0}^r \xrightarrow{1} \epsilon \tau_{0,0}^r$, где $\tau_{0,0}^r$ — вещественное представление группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$, ассоциированное с алгеброй $\mathcal{A}_{0,0}$ ($p - q \equiv 0 \pmod{8}$, $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$), $\epsilon \tau_{0,0}^r$ — вещественное фактор-представление группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$, ассоциированное с фактор-алгеброй $\epsilon \mathcal{A}_{0,0} \simeq \mathcal{A}_{0,1} / \text{Ker } \epsilon$, поскольку в силу изоморфизма $\mathcal{A}_{0,1}^+ \simeq \mathcal{A}_{0,0}$ имеет место $\mathcal{A}_{0,1} \simeq \mathcal{A}_{0,0} \oplus i\mathcal{A}_{0,0}$. Второй шаг $\mathcal{A}_{0,2}^+ \xrightarrow{2} \mathcal{A}_{0,2}$ ($\mathcal{A}_{0,1} \xrightarrow{2} \mathcal{A}_{0,2}$) генерирует переход $\epsilon \tau_{0,0}^r \xrightarrow{2} \tau_{0,\frac{1}{2}}^q$, где $\tau_{0,\frac{1}{2}}^q$ — кватернионное представление группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$, ассоциированное с алгеброй $\mathcal{A}_{0,2}$ ($p - q \equiv 6 \pmod{8}$, $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$). Третий шаг $\mathcal{A}_{0,2} \xrightarrow{3} \mathcal{A}_{0,3}$ группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ индуцирует переход $\tau_{0,\frac{1}{2}}^q \xrightarrow{3} \epsilon \tau_{0,\frac{1}{2}}^q$, где $\epsilon \tau_{0,\frac{1}{2}}^q$ — кватернионное фактор-представление, ассоциированное с фактор-алгеброй $\epsilon \mathcal{A}_{0,2} \simeq \mathcal{A}_{0,3} / \text{Ker } \epsilon$. Следующий шаг $\mathcal{A}_{0,3} \xrightarrow{4} \mathcal{A}_{0,4}$ генерирует переход $\epsilon \tau_{0,\frac{1}{2}}^q \xrightarrow{4} \tau_{0,1}^q$, где $\tau_{0,1}^q$ — кватернионное представление, ассоциированное с алгеброй $\mathcal{A}_{0,4}$ ($p - q \equiv 4 \pmod{8}$, $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$). Пятый шаг $\mathcal{A}_{0,4} \xrightarrow{5} \mathcal{A}_{0,5}$ первого цикла группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ приводит к переходу $\tau_{0,1}^q \xrightarrow{5} \epsilon \tau_{0,1}^q$, где $\epsilon \tau_{0,1}^q$ — кватернионное фактор-представление, ассоциированное с фактор-алгеброй $\epsilon \mathcal{A}_{0,4} \simeq \mathcal{A}_{0,5} / \text{Ker } \epsilon$. В свою очередь, шестой $\mathcal{A}_{0,5} \xrightarrow{6} \mathcal{A}_{0,6}$ и седьмой $\mathcal{A}_{0,6} \xrightarrow{7} \mathcal{A}_{0,7}$ шаги генерируют переходы $\epsilon \tau_{0,1}^q \xrightarrow{6} \tau_{0,\frac{3}{2}}^r$ и $\tau_{0,\frac{3}{2}}^r \xrightarrow{7} \epsilon \tau_{0,\frac{3}{2}}^r$, где $\tau_{0,\frac{3}{2}}^r$ — вещественное представление группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$, ассоциированное с алгеброй $\mathcal{A}_{0,6}$ ($p - q \equiv 2 \pmod{8}$, $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$), $\epsilon \tau_{0,\frac{3}{2}}^r$ — вещественное фактор-представление, ассоциированное с фактор-алгеброй $\epsilon \mathcal{A}_{0,6} \simeq \mathcal{A}_{0,7} / \text{Ker } \epsilon$. Восьмой шаг $\mathcal{A}_{0,7} \xrightarrow{8} \mathcal{A}_{0,8}$ завершает первый цикл ($r = 0$) of $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ и индуцирует переход $\epsilon \tau_{0,\frac{3}{2}}^r \xrightarrow{8} \tau_{0,2}^r$, где $\tau_{0,2}^r$ — вещественное представление, ассоциированное с алгеброй $\mathcal{A}_{0,8}$. Первый цикл генерирует первые восемь представлений $(\tau_{0,0}^r, \epsilon \tau_{0,0}^r, \tau_{0,\frac{1}{2}}^q, \epsilon \tau_{0,\frac{1}{2}}^q, \tau_{0,1}^q, \epsilon \tau_{0,1}^q, \tau_{0,\frac{3}{2}}^r, \epsilon \tau_{0,\frac{3}{2}}^r)$, соответствующие первым восьми клеткам $(\mathcal{A}_{0,q}, q = 0, \dots, 7)$ спинорной шахматной доски (см. рис. 1). Однако пары $(\tau_{0,0}^r, \epsilon \tau_{0,0}^r)$, $(\tau_{0,\frac{1}{2}}^q, \epsilon \tau_{0,\frac{1}{2}}^q)$, $(\tau_{0,1}^q, \epsilon \tau_{0,1}^q)$, $(\tau_{0,\frac{3}{2}}^r, \epsilon \tau_{0,\frac{3}{2}}^r)$ представляют частицы одинакового спина s , соответственно, $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$. Частицы внутри пары существуют в состоянии квантовой суперпозиции. Следовательно, пара $(\tau_{0,0}^r, \epsilon \tau_{0,0}^r)$ принадлежит линии спина 0, пара $(\tau_{0,\frac{1}{2}}^q, \epsilon \tau_{0,\frac{1}{2}}^q)$ принадлежит дуальной линии спина $1/2$ и т.д. Следующие восемь представлений $\tau_{\frac{1}{2},0}^r, \epsilon \tau_{\frac{1}{2},0}^r, \tau_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^r, \epsilon \tau_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^r, \tau_{\frac{1}{2},1}^q, \epsilon \tau_{\frac{1}{2},1}^q, \tau_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^q, \epsilon \tau_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^q$ генерируются также первым циклом посредством правила $\mathcal{A}_{2,q} \simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,q}$, $q = 0, \dots, 7$, здесь

$\mathcal{A}_{0,2} \rightsquigarrow \tau_{\frac{1}{2},0}^r$. Подобным образом (посредством действия первого цикла группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$) получаем первый блок представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$ (см. рис. 5), ассоциированный со спинорной шахматной доской. Из рис. 5 следует,

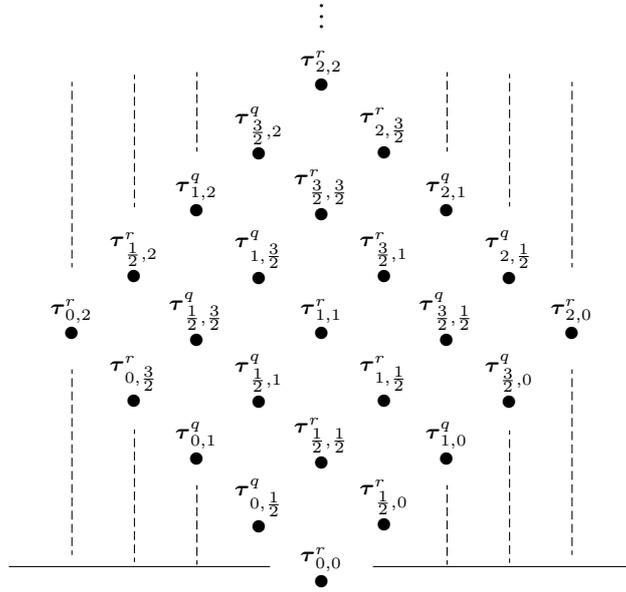


Рис. 5. Первый блок представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1,3)$, ассоциированный со спинорной шахматной доской первого порядка (см. рис. 1). Этот блок генерируется первым циклом группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$.

что спиновые линии внутри блока разделяются на вещественные и кватернионные линии.

Второй цикл ($r = 1$) группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ состоит из следующих восьми шагов:

- 1) $h = 1, r = 1, \mathcal{A}_{0,8} \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,9} \rightsquigarrow \tau_{0,2}^r \xrightarrow{1} \epsilon \tau_{0,2}^q$;
- 2) $h = 2, r = 1, \mathcal{A}_{0,9} \xrightarrow{2} \mathcal{A}_{0,10} \rightsquigarrow \epsilon \tau_{0,2}^r \xrightarrow{2} \tau_{0,\frac{5}{2}}^q$;
- 3) $h = 3, r = 1, \mathcal{A}_{0,10} \xrightarrow{3} \mathcal{A}_{0,11} \rightsquigarrow \tau_{0,\frac{5}{2}}^q \xrightarrow{3} \epsilon \tau_{0,\frac{5}{2}}^q$;
- 4) $h = 4, r = 1, \mathcal{A}_{0,11} \xrightarrow{4} \mathcal{A}_{0,12} \rightsquigarrow \epsilon \tau_{0,\frac{5}{2}}^q \xrightarrow{4} \tau_{0,3}^q$;
- 5) $h = 5, r = 1, \mathcal{A}_{0,12} \xrightarrow{5} \mathcal{A}_{0,13} \rightsquigarrow \tau_{0,3}^q \xrightarrow{5} \epsilon \tau_{0,3}^q$;
- 6) $h = 6, r = 1, \mathcal{A}_{0,13} \xrightarrow{6} \mathcal{A}_{0,14} \rightsquigarrow \epsilon \tau_{0,3}^q \xrightarrow{6} \tau_{0,\frac{7}{2}}^r$;
- 7) $h = 7, r = 1, \mathcal{A}_{0,14} \xrightarrow{7} \mathcal{A}_{0,15} \rightsquigarrow \tau_{0,\frac{7}{2}}^r \xrightarrow{7} \epsilon \tau_{0,\frac{7}{2}}^r$;
- 8) $h = 8, r = 1, \mathcal{A}_{0,15} \xrightarrow{8} \mathcal{A}_{0,16} \rightsquigarrow \epsilon \tau_{0,\frac{7}{2}}^r \xrightarrow{8} \tau_{0,4}^r$.

Далее, после восьмого цикла ($r = 7$), состоящего из последовательности шагов

- 1) $h = 1, r = 7, \mathcal{A}_{0,56} \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{0,57} \rightsquigarrow \tau_{0,14}^r \xrightarrow{1} \epsilon \tau_{0,14}^r$;
- 2) $h = 2, r = 7, \mathcal{A}_{0,57} \xrightarrow{2} \mathcal{A}_{0,58} \rightsquigarrow \epsilon \tau_{0,14}^r \xrightarrow{2} \tau_{0,\frac{29}{2}}^q$;

- 3) $h = 3, r = 7, \mathcal{A}_{0,58} \xrightarrow{3} \mathcal{A}_{0,59} \rightsquigarrow \tau_{0, \frac{29}{2}}^q \xrightarrow{3} \epsilon \tau_{0, \frac{29}{2}}^q;$
 4) $h = 4, r = 7, \mathcal{A}_{0,59} \xrightarrow{4} \mathcal{A}_{0,60} \rightsquigarrow \epsilon \tau_{0, \frac{29}{2}}^q \xrightarrow{4} \tau_{0,15}^q;$
 5) $h = 5, r = 7, \mathcal{A}_{0,60} \xrightarrow{5} \mathcal{A}_{0,61} \rightsquigarrow \tau_{0,15}^q \xrightarrow{5} \epsilon \tau_{0,15}^q;$
 6) $h = 6, r = 7, \mathcal{A}_{0,61} \xrightarrow{6} \mathcal{A}_{0,62} \rightsquigarrow \epsilon \tau_{0,15}^q \xrightarrow{6} \tau_{0, \frac{31}{2}}^r;$
 7) $h = 7, r = 7, \mathcal{A}_{0,62} \xrightarrow{7} \mathcal{A}_{0,63} \rightsquigarrow \tau_{0, \frac{31}{2}}^r \xrightarrow{7} \epsilon \tau_{0, \frac{31}{2}}^r;$
 8) $h = 8, r = 7, \mathcal{A}_{0,63} \xrightarrow{8} \mathcal{A}_{0,64} \rightsquigarrow \epsilon \tau_{0, \frac{31}{2}}^r \xrightarrow{8} \tau_{0,16}^r.$

приходим к фрактальной структуре второго порядка, которая индуцирует на системе вещественных представлений группы $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$ периодическую по модулю 2 структуру. Таким образом, имеем блок представлений второго порядка, который, очевидно, может быть расширен до бесконечности (до блоков любого порядка) посредством последовательных циклов группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$. Как было показано выше, действие группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ связывает спинтензоры $\mathbf{s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$ различного ранга, т.е., когда значения числа r различны (нечётно или чётно). Из соотношения $l = r/2$ имеем *фермионное представление* группы $SL(2, \mathbb{C})$, когда r нечётно, а также *бозонное представление*, когда r чётно. Следовательно, *действие группы $BW_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{Z}_8$ связывает фермионные и бозонные представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, т.е. действие этой группы эквивалентно действию суперсимметрии.* ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons // Z. Phys. 1927. V. 43. P. 601–623.
2. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. Новосибирск : Изд-во «Альфа Виста», 2004.
3. Penrose R. The twistor programme // Rep. Math. Phys. 1977. V. 12. P. 65–76.
4. Penrose R., MacCallum M.A.H. Twistor theory: an approach to the quantization of fields and space-time // Physics Reports. 1972. V. 6. P. 241–316.
5. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Ч. 2. Теория физических взаимодействий. М. : МГУ, 1998.
6. Варламов В.В. Дискретные симметрии на пространствах фактор-представлений группы Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2001. Вып. 7. С. 114–127.
7. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2004. V. 14. P. 81–168; arXiv:math-ph/0405040 (2004).
8. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // Int. J. Theor. Phys. 2001. V. 40. P. 769–805; arXiv:math-ph/0009026 (2000).
9. Varlamov V.V. The CPT Group in the de Sitter Space // Annales de la Fondation Louis de Broglie. 2004. V. 29. P. 969–987; arXiv:math-ph/0406060 (2004).
10. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // Phys. Lett. B. 2005. V. 631. P. 187–191; arXiv:math-ph/0508050 (2005).
11. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields // Int. J. Theor. Phys. 2012. V. 51. P. 1453–1481; arXiv: 1107.4156 [math-ph] (2011).

12. Budinich P., Trautman A. The Spinorial Chessboard. Springer, Berlin, 1988.
13. Chevalley C. The construction and study of certain important algebras. Publications of Mathematical Society of Japan № 1, Herald Printing, Tokyo, 1955.
14. Karoubi M. K-Theory. An Introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
15. Wall C.T.C. Graded Brauer Groups // J. Reine Angew. Math. 1964. V. 213. P. 187–199.
16. Рашевский П.К. Теория спиноров // УМН. 1955. Т. 10. С. 3–110.
17. Lounesto P. Scalar Products of Spinors and an Extension of Brauer-Wall Groups // Found. Phys. 1981. V. 11. P. 721–740.
18. Atiyah M.F., Bott R., Shapiro A. Clifford modules // Topology 1964. V. 3. Suppl. 1. P. 3–38.
19. Varlamov V.V. Cyclic structures of Cliffordian supergroups and particle representations of $\mathbf{Spin}_+(1, 3)$ // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2014. V. 24. P. 849–874; arXiv: 1207.6162 [math-ph] (2012).
20. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М. : Институт компьютерных исследований, 2002.
21. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М. : Физматлит, 1958.
22. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория групп и квантованные поля. М. : Наука, 1977.
23. Варламов В.В. Спинорная структура и SU(3)-симметрия // Математические структуры и моделирование. 2015. № 1(33). С. 18–33.
24. Varlamov V.V. General Solutions of Relativistic Wave Equations // Int. J. Theor. Phys. 2003. V. 42. P. 583–633; arXiv:math-ph/0209036 (2002).
25. Varlamov V.V. Relativistic wavefunctions on the Poincaré group // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. V. 37. P. 5467–5476; arXiv:math-ph/0308038 (2003).
26. Варламов В.В. Точное решение для поля $(1, 0) \oplus (0, 1)$ в терминах функций на группе Пуанкаре // Математические структуры и моделирование. 2005. Вып. 15. С. 74–91.
27. Varlamov V.V. Relativistic spherical functions on the Lorentz group // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 805–822; arXiv:math-ph/0507056 (2005).
28. Varlamov V.V. General Solutions of Relativistic Wave Equations II: Arbitrary Spin Chains // Int. J. Theor. Phys. 2007. V. 46. P. 741–805; arXiv:math-ph/0503058 (2005).
29. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. М. : Наука, 1986.

SPINOR STRUCTURE AND PERIODICITY OF CLIFFORD ALGEBRAS**V.V. Varlamov**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University

Abstract. Cartan-Bott periodicity of spinor structure, associated with the system of irreducible finite-dimensional representations of the Lorentz group, is studied. It is shown that modulo 8 periodicity of the real spinor structure generates periodic relations on the representation system of the Lorentz group, which, in turn, form a fractal structure with the period defined by the cycle of the Brauer-Wall group. It is proved that periodic symmetry of spinor structure is a pre-image of supersymmetry.

Keywords: spinor structure, Lorentz group, Cartan-Bott periodicity, Brauer-Wall group, supersymmetry.