*Математические структуры и моделирование*
*2015. № 4(36). С. 93–109*

УДК 316.4 + 515.12

# СОЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ И ТОПОСЫ ГРОТЕНДИКА

**А.К. Гуц**[1]
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru
**Л.А. Паутова**[2]
д.с.н., e-mail: pautoval@yandex.ru

[1]Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

[2]Москва, Фонд общественного мнения

**Аннотация.** Обсуждаются методология социальной топологии и наиболее общий подход к топологическому ви́дению пространства, предложенному Гротендиком. Описываются топология Гротендика и топосы Гротендика. Показано, как они способствуют «топологическому повороту» в современной социологии.

**Ключевые слова:** социальная топология, социология, топосы, топос Гротендика, топос пучков, формализация социального пространства.

## Введение

> Социология представляет собой социальную топологию
>
> П. Бурдьё

> Топология Гротендика представляется наиболее естественно как модальный оператор типа «локально имеет место...»
>
> Ф. У. Ловер

В теоретической социологии ещё в конце XX века оформилось направление так называемой социальной топологии. Социология, как заявил француз Пьер Бурдьё, представляет собой социальную топологию [1]. Идею топологии Бурдьё взял из математики, в рамках которой изучаются топологические свойства фигур, то есть свойства, не изменяющиеся, остающиеся инвариантными при любых непрерывных деформациях или при так называемых гомеоморфизмах.

Понятие «социальная топология» позволяет социологам по-новому рассматривать социальные отношения и их различия. Топология выводит на передний план не классы или социальные структуры, а производство, изменчивость и множественность социальных практик. Понятия «социальное пространство», «социальное поле», «топология» прочно прижились в социологии.

В последние годы вновь возник теоретический интерес к топологии, например, в работах Брюно Латура [4] или Джона Ло [5]. Заимствования из топологии дают возможность социологам-теоретикам описывать социальную реальность как сеть отношений, как многополярный, гетерогенный, находящийся в постоянном движении мир. Эта новая для социологии объяснительная схема позволяет анализировать не только субъекты отношений, но и материальное (предметы, вещи) как полноправного участника отношений, «носителя способности действия» (В. Вахштайн) [6].

В математике наука «топология» – это один из самых абстрактных разделов фундаментальной математики. Она изучает *топологические пространства*, под которыми понимаются либо множества или иные абстрактные объекты, которые снабжены *топологией*, или, как ещё говорят, в которых задана топология. Топология в данном случае – это степень близости точек пространства. При рассмотрении перехода (отображения) от одного топологического пространства к другому происходит смена представления о степени близости, и в силу этого важно изучать те переходы, которые близкое переводят в близкое. Такие переходы (отображения) называют *непрерывными*.

Из-за возможности описания непрерывных изменений на науку «топологию», и обратили свои взоры социологи.

Социальный мир видится в социологии как многомерное пространство – социальное пространство, измерения которого соответствуют свойствам, действующим в социальном мире. Действующие свойства, взятые за принцип построения социального пространства, у Бурдьё являются различными видами власти или капиталов[1]. Социальный агент, оказавшийся в некоторой позиции (точке) социального пространства, наделён определённой силой и властью (Бурдьё [1]).

> Социальное пространство определяется по взаимоисключению (или различению) позиций, которые его образуют, так сказать, как структура рядоположенности социальных позиций (Бурдьё [1]).

Структура социального пространства формируется объективно посредством существующих социальных отношений и субъективно – представлениями людей об окружающем мире.

Для современного социолога «описать социальный мир – значит выявить множество явлений и задать в нем топологию. Социологический смысл топологических структур исчерпывается социальными отношениями» [7, с. 16].

> Социальная топология – это такая система подмножеств множества всех явлений социального мира, когда любые объединения и конечные пересечения подмножеств будут принадлежать данной системе[2] (Н.А. Шматко [7, с. 16]).

[1]Капитал – у Бурдьё это продукт объективации социальных отношений, являющихся условиями и предпосылками практик агентов.

[2]Мы исправили данное Н.А. Шматко определение топологии, уточняя, что пересечения должны быть конечными.

Социальная топология концептуализирует, т. е. осмысливает, определяет социальные явления в терминах математической науки «топологии» через уточнение, разъяснение социологических различий между ними, через установление близости (по основаниям активных свойств) феноменов, которые до этого воспринимались как весьма далёкие с точки зрения «здравого смысла». Разрывая с обыденным смыслом и стихийными социологическими предпонятиями, социальная топология проводит различия между феноменами, «приближает» или «противопоставляет» явления в социальном пространстве. Она позволяет выстроить эффективное социологическое видение социального мира, выступающее, на наш взгляд, действенной основой научного объяснения. Поскольку можно задавать в социальном пространстве различные топологии, то, выстраивая все более «тонкие» и дробные топологии на полной совокупности известных нам социальных явлений, разрывая с ложными отождествлениями и обнаруживая новые различия, социологи получают инструмент для более полного социологического объяснения современной России [7, с. 15-16].

В математической топологии имеются конструкции, моделирующие ситуацию непрерывно меняющегося сложного объекта, под которым можно иметь в виду изменяющуюся или «изменчивую социальную практику». Их называют *пучками*. Совокупность всех пучков над топологическим пространством образует *категорию*.

Французский математик Александр Гротендик нашёл крайне абстрактное обобщения пучков, заменяя широко используемые в XX веке множества на объекты *категорий*, частным случаем которых является теория множеств **Sets**. Иначе говоря, он заменил теоретико-множественные пучки на теоретико-категорные пучки, придумав для этого топологию Гротендика. Построенную совокупность, или категорию пучков он назвал *топосом*.

Каким образом был выбран данный термин? Гротендик пишет: «Название «топос» было выбрано (в связи с понятием «топология» или «топологический»), чтобы наводить на мысль о том, что речь идёт об объекте, в полном смысле слова относящемся к области топологической интуиции. По обилию мысленных образов, которые слово «топос» вызывает, его можно рассматривать как более или менее эквивалент термину «пространство» (топологическое), просто сильнее подчёркивая «топологическую» специфику понятия» [2].

Для Гротендика совокупность (категория) пучков над пространством, т. е. топос в его понимании, – это «арсенал измерительных приборов», содержащий, «воплощающей» то, что наиболее существенно для пространства», «поскольку оказывается возможным «воссоздать» полностью исходное топологическое пространство в терминах «категории пучков» (или арсенала измерительных приборов), ему соответствующей» [2].

В результате появилась возможность изучать непрерывно меняющиеся «социальные практики» на самом общем абстрактном уровне. Категории пучков были названы Гротендиком, как уже говорилось выше, топосами.

Топос, точнее *элементарный топос*, в понимании математиков – это специальная категория; сами же категории изучает наука «теория категорий». Категории состоят из *объектов* и *морфизмов* между ними, которые характеризуют отношения между объектами. Топосы очень близки к теории множеств **Sets**, но их внутренняя логика не является классической двузначной, точнее, в ней не действует закон исключённого третьего. Математики такие логики называют интуиционистскими.

О возможности использовать категорию пучков в социологии конфликта говорится в работах Саллаха [14].

Социологи используют понятия топология и топос, но у них эти понятия допускают множественное словесное описание, отсутствуют их строгие математические определения, и в силу этого, особенно понятие «топос», трактуется разными авторами так, как они его понимают.

В данной статье показано, как математический топос и топосы в понимании социологов можно свести к единой согласованной картине.

## 1. Математическая теория категорий

Теория категорий изучает объекты $A, B, C, ...$ и отношения между ними, называемые морфизмами.

**Определение 1.** *Категория* $\mathcal{K}$ включает в себя:

1) объекты $A, B, C, ...$;

2) морфизмы $f, g, h, ...$;

3) каждый морфизм $f$ связан с двумя объектами $A, B$; первый называют областью определения морфизма, а второй – областью значений. Используются обозначения $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$;

4) для каждого объекта $A$ имеется тождественный морфизм $1_A : A \to A$;

5) для каждой пары морфизмов $f : A \to B$ и $g : B \to C$ определена композиция морфизмов $g \circ f : A \to C$. Композиция должна удовлетворять двум условиям:

(i) Закон идентичности. Если дан морфизм $f : A \to B$, то $1_B \circ f = f$ и $f \circ 1_A = f$.

(ii) Закон ассоциативности. Если даны морфизмы $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Совокупность морфизмов из $A$ в $B$ обозначают как $Hom_{\mathcal{K}}(A, B)$ или просто как $Hom(A, B)$.

**Двойственная категория**. Если дана категория $\mathcal{K}$, то легко строится *двойственная категория* $\mathcal{K}^{op}$. Она имеет те же самые объекты, что категория $\mathcal{K}$, а морфизмы получаются из морфизмов категории $\mathcal{K}$ «обращением стрелки», т. е. если в $\mathcal{K}$ есть морфизм $f : A \to B$, то в $\mathcal{K}^{op}$ рассматривается морфизм $f : B \to A$.

**Подкатегория**. Категория $\mathcal{K}$ называется *подкатегорией* категории $\mathcal{E}$ (обозначается это через $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}$), если

(i) каждый $\mathcal{K}$-объект является $\mathcal{E}$-объектом и

(j) для любых двух $\mathcal{K}$-объектов $A$ и $B$ морфизм $A \to B$ категории $\mathcal{K}$ есть морфизм категории $\mathcal{E}$.

Подкатегория $\mathcal{K}$ называется *полной подкатегорией* категории $\mathcal{E}$, если для любых $\mathcal{K}$-объектов $A$ и $B$ выполняется равенство $Hom_{\mathcal{K}}(A, B) = Hom_{\mathcal{E}}(A, B)$, т. е. $\mathcal{E}$ не имеет морфизмов $A \to B$, не лежащих в $\mathcal{K}$.

### 1.1. Примеры категорий

**Пример 1.** Простым, но очень важным примером категории является теория множеств Кантора **Sets**. Объекты этой категории – это множества $A, B, C, D, ...$, а морфизмы – отображения $f : A \to B,\ g : C \to D, ...$ из множества в множество.

Эта категория является основным инструментом, используемым математиками для описания и представления окружающей нас реальности, а также нашего внутреннего мира. Она основа парадигмы мышления современных математиков, в рамках которой они строят свои абстрактные конструкция, и в рамках которой воспринимают внешний и внутренний мир.

**Пример 2.** Теория топологических пространств **Top** также является примером категории. Её объекты – это топологические пространства $X, Y, Z, T, ...$, а морфизмы – непрерывные отображения $f : X \to Y,\ g : Z \to T, ...$

**Пример 3.** Экзотическим примером категории является категория **N**. Она обладает только одним объектом, обозначаемым как $N$, а морфизмами являются натуральные числа $0, 1, ..., n, ...$, и имеют они запись в следующем виде: $0 : N \to N, 1 : N \to N, ..., n : N \to N, ...$ Композицией морфизмов $n$ и $m$ является натуральное число $n \circ m = n + m$. Единичная стрелка $1_N$ объекта $N$ задаётся числом 0.

### 1.2. Диаграммы

*Диаграммой* в категории $\mathcal{K}$ называется совокупность объектов $A_i, A_j, ...$ вместе с некоторыми морфизмами $f : A_i \to A_j$ между отдельными объектами из этой диаграммы (между данной парой объектов может быть несколько морфизмов, а может и не быть их вовсе).

*Конусом* для диаграммы $\mathcal{D}$ с объектами $A_i, A_j, ...$ называется такой объект $C$ вместе с морфизмами $f_i : C \to A_i$ для каждого объекта $A_i$ из $\mathcal{D}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "g"] & & A_j \\ & C \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна для любого морфизма $g : A_i \to A_j$ из $\mathcal{D}$, т.е. $g \circ f_i = f_j$.

Конус для диаграммы $\mathcal{D}$ обозначаем через $(f_i : C \to A_i)$.

*Предел диаграммы* $\mathcal{D}$ есть конус $(f_i : C \to A_i)$, такой, что для любого другого конуса $(f_i' : C' \to A_i)$ для $\mathcal{D}$ существует единственный морфизм $f$ :

$C' \to C$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A_i & \\ C \arrow[ur, "f'_i"] \arrow[rr, "f"'] & & C' \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна для каждого объекта $A_i$ из $\mathcal{D}$.

Диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

называется *декартовым квадратом*, если

1) она коммутативна, т.е. $k \circ f = h \circ g$;

2) для любых $\phi : C \to X$, $\psi : C \to Y$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

существует единственный морфизм $j : C \to A$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "j"'] \arrow[drr, "\phi"] \arrow[ddr, "\psi"'] & & \\ & A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"] & X \\ & Y & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

*Обратный образ* (pullback) пары морфизмов $h : X \to B$, $k : Y \to B$ есть предел диаграммы $(h : X \to B,\ k : Y \to B)$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "k"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

Другими словами – это такие объект $A$ и морфизмы $f : A \to X$, $g : A \to Y$ такие, что квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

является декартовым.

Говорим, что в данном случае $f$ *обратный образ* $h$ *относительно* $k$, а $g$ обратный образ $k$ относительно $h$. Обозначение: $A = X \times_B Y$.

### 1.3. Произведение объектов

**Определение 2.** *Произведением* объектов $A$ и $B$ называется предел диаграммы, которая состоит только из двух объектов $A$ и $B$ и не имеет ни одного морфизма. Для произведения используется обозначение $A \times B$.

Поскольку $A \times B$ – конус, то имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & A \times B \arrow[ul, "pr_A"] \arrow[ur, "pr_B"'] & \end{tikzcd}$$

где морфизмы $pr_A, pr_B$ называются *проекциями*.

### 1.4. Функторы

Пусть даны две категории $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$. Если смотреть на категории как на множества, то хотелось бы иметь аналог отображения одной категории в другую. Таким аналогом является понятие функтора.

*Функтором* $F$ из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{E}$ называется функция, которая ставит в соответствие:

1) каждому объекту $A$ категории $\mathcal{K}$ объект $F(A)$ категории $\mathcal{E}$;

2) каждому морфизму $f : A \to B$ категории $\mathcal{K}$ морфизм[3] $F(f) : F(A) \to F(B)$ категории $\mathcal{E}$ такой, что

a) $F(1_A) = 1_{F(A)}$;

b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ для любых морфизмов $f, g$,

для которых определена композиция $g \circ f$.

Тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ определяется правилами $\mathbf{1}_{\mathcal{K}}(A) = A, \mathbf{1}_{\mathcal{K}}(f) = f$. Эти же правила задают функтор *включения* $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{E}$ в случае, когда $\mathcal{K}$ – подкатегория в $\mathcal{E}$.

Категории $\mathcal{K}, \mathcal{E}$ называются *эквивалентными*, если существуют функторы $F : \mathcal{K} \to \mathcal{E}$, $G : \mathcal{E} \to \mathcal{K}$, для которых $G \circ F = \mathbf{1}_{\mathcal{K}}$, $F \circ G = \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$.

[3]Мы определяем *ковариантный* функтор; если направление морфизма меняется, т. е. $F(f) : F(B) \to F(A)$, то имеем *контрвариантный* функтор.

### 1.5. Категория функторов $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$

Пусть даны две категории $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$. Построим *категорию функторов* $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$, объектами которой являются функторы из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{E}$.

Определим морфизмы категории $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$. Возьмём два функтора $F : \mathcal{K} \to \mathcal{E}$ и $G : \mathcal{K} \to \mathcal{E}$.

*Морфизм* $\tau : F \to G$ *объекта* $F$ *в объект* $G$ называется *естественным преобразованием* функтора $F$ в функтор $G$ и состоит из семейства морфизмов $\{\tau_A : F(A) \to G(A),$ где $A$ – любой объект категории $\mathcal{K}\}$. Причём морфизм $\tau_A : F(A) \to G(A)$ таков, что для любого морфизма $f : A \to B$ диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
B & F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

коммутативна.

Морфизмы $\tau_A$ называются *компонентами* преобразования $\tau$.

## 2. Теория топосов

### 2.1. Экспоненциал

**Определение 3.** Категория $\mathcal{K}$ допускает *экспоненцирование*, если

1) в ней существует произведение любых двух объектов;

2) если для любых двух объектов $A$ и $B$ существует объект $B^A$ («отображение» объекта $A$ в объект $B$), называемый *экспоненциалом*, и морфизм $ev : B^A \times A \to B$, называемый *морфизмом значения*, такие, что для любых объекта $C$ и морфизма $g : C \times A \to B$ существует единственный морфизм $\widehat{g} : C \to B^A$, для которого коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[dr, "ev"] & \\
& B \\
C \times A \arrow[uu, "\hat{g} \times 1_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

### 2.2. Классификатор

Мы считаем, что в реальном мире действует двузначная классическая логика с двумя истинностными значениями «истина» = 1 или «ложь» = 0. Однако ещё Аристотель знал о модальной логике, в которой отражён более гибкий многозначный взгляд на мир, при котором между истиной и ложью всегда находится место множеству промежуточных вариантов, выдаваемые под предлогом целесообразности либо за ложь, либо за истину. Впрочем, в связи с тем, что в прикладных исследованиях все больше используется нечёткая логика (нечёткая математика), то вполне разумно вместо теоретико-множественного объекта истинности $\{0, 1\}$ ввести многозначный объект истинности $\Omega$.

Определим объект $\mathbf{1}$ как такой объект топоса, что для любого объекта $A$ существует морфизм $! : A \to \mathbf{1}$. Назовём $\mathbf{1}$ *конечным объектом*.

Объект $\mathbf{1}$ – это аналог 1-*точечного* множества.

**Определение 4.** *Классификатором подобъектов* для категории $\mathcal{K}$ называется объект $\Omega$ вместе с морфизмом $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ такой, что выполняется следующая

$\Omega$-**аксиома**. Для каждого мономорфизма $f : A \rightarrowtail D$ существует единственный морфизм $\chi_f : D \to \Omega$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!"'] & D \arrow[d, "\chi_f"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом.

Здесь через $! : A \to \mathbf{1}$ обозначен единственный морфизм из $A$ в $\mathbf{1}$.

Морфизм $\chi_f$ называется *характеристическим*, или *характером* морфизма $f$, а объект $\Omega$ – *классифицирующим объектом*. Морфизм $\top$ носит название «истина».

Термин «классификатор подобъектов» для $\Omega$ связан с тем, что любой мономорфизм $f : A \rightarrowtail D$ носит название *подобъекта* объекта $D$. Поэтому часто говорят, что мормизм $\chi_f : D \to \Omega$ *классифицирует* подобъект $f : A \rightarrowtail D$.

В теории категорий подобъекты – это аналоги подмножеств $A \subset D$ в теории множеств.

Допущение неклассического классификатора $\Omega$ означает переход к интуиционистской логике, в которой не действует закон исключённого третьего.

## 3. Определение элементарного топоса

Определение топоса, приводимое ниже, принадлежит Ловеру. Оно является более общим, чем понятие топоса Гротендика. Топос Гротендика – это частный случай топоса Ловера, и он тесным образом связан с геометрией и топологией, чего нельзя сказать о всех топосах Ловера. С работами социологов в области социальной топологии следует связывать топос Гротендика, но и другие топосы, негротендиковские, также имеет смысл использовать при описании обществ.

**Определение 5.** Категория с произведениями, в которых каждая пара объектов имеет экспоненциал, а сама категория обладает классификатором, называется *элементарным топосом*.

Элементарные топосы – это категории, которые очень близки по своим свойствам к категории теории множеств **Sets**. Действительно, если для топоса, выполняется аксиома выбора, то он является булевым [13, с. 161].

## 4. Топос Гротендика

Изучим теперь топосы Гротендика, которые были построены им под влиянием идеи пучков Лерэ раньше [3], чем появились топосы Ловера.

### 4.1. Топология Гротендика

Топология Гротендика – это структура на категории, которая делает её объекты похожими на открытые множества топологического пространства

С каждым объектом $A$ связываем некоторую совокупность $\{A_x : x \in X\}$, которая в какой-то мере «покрывает» объект $A$, и это покрытие отражает внутреннюю связь и степень близости каждого $A_x$ к $A$. Математики в таком случае говорят о топологии в «обобщённом» пространстве, в категории $\mathcal{C}$, которая задаёт указанные связи и близость.

Аксиоматически топологию в категории ввёл Александр Гротендик, которая носит теперь его имя. Формально речь идёт о следующем определении.

**Определение 6.** *Топологией Гротендика* $J$ на категории $\mathcal{C}$ называется функция, сопоставляющая каждому объекту $A$ совокупность $J(A)$ множеств морфизмов, оканчивающихся в $A$, такая, что

(i) одноэлементное множество $\{1_A : A \to A\}$ принадлежит $J(A)$;

(ii) если $\{f_x : A_x \to A|\ x \in X\} \in J(A)$ и для каждого $x \in X$

$$\{f^x_y : A^x_y \to A_x|\ y \in X_x\} \in J(A_x),$$

то

$$\{f_x \circ f^x_y : A^x_y \to A|\ x \in X \text{ и } y \in X_x\} \in J(A);$$

(ij) если $\{f_x : A_x \to A|\ x \in X\} \in J(A)$ и $g : B \to A$ – произвольный морфизм, то для каждого $x \in X$ существует обратный образ морфизма $f_x$ относительно $g$

$$\begin{tikzcd}
B \times_A A_x \arrow[r] \arrow[d, "g_x"'] & A_x \arrow[d, "f_x"] \\
B \arrow[r, "g"'] & A
\end{tikzcd}$$

и

$$\{g_x : B \times_A A_x \to B|\ x \in X\} \in J(B).$$

**Определение 7.** Категория $\mathcal{C}$ с топологией $J$, т. е. пара $(\mathcal{C}, J)$ называется *ситусом* (site), а элементы из $J$ – *покрытиями*.

### 4.2. Топология Гротендика для пространства и классическая топология пространства

Топология Гротендика говорит, каким образом объекты ситуса $\mathcal{C}$ могут быть «покрыты» посредством морфизмов другими объектами. В случае, когда $I$ – топологическое пространство и рассматриваемые объекты – это открытые множества в $I$, то топология Гротендика говорит, каким образом открытые множества $A$ покрываются в смысле операции включения $A_x \hookrightarrow A$ семейством открытых множеств $J(A) = \{A_x\}_{x \in X}$ таким, что

$$\bigcup_{x \in X} A_x = A.$$

Следовательно, «топология Гротендика» – это структура на категории $\mathcal{C}$, которая делает её объекты похожими на открытые множества топологического пространства $I$, образующие категорию $\mathcal{O}(I)$. Топологии Гротендика аксиоматизируют определение открытого покрытия.

Существует естественный способ сопоставить топологическому пространству $I$ топологию Гротендика $(\mathcal{O}(I), J)$. Поэтому топологии Гротендика часто рассматривают как обобщение обычных топологий. Объекты категории $\mathcal{O}(I)$ – это открытые множества топологии пространства $I$, морфизмы между двумя объектами – это включения $V \hookrightarrow U$, а покрытиями $J(U)$ являются так называемые *решёта*.

Для большого класса топологических пространств действительно можно восстановить топологию пространства $I$ по её топологии Гротендика, однако, уже для антидискретного пространства это не так» [4].

### 4.3. Топос пучков

Гротендик ввёл в математику совершенно новое представление о пространстве. Для этого он воспользовался идеей Лерэ о пучках, с помощью которых возможно установление отношений между локальными и глобальными данными, относящимися к пространству. Пространство по Гротендику снабжается «наиболее очевидной структурой, которую ему можно приписать, так сказать, «на глазок» – именно, структурой, называемой «категорией» [2].

Рассмотрим некоторую категорию $\mathcal{C}$. С каждым объектом $A \in \mathcal{C}$ мы связываем *множество различных данных* $F(A)$, которые охватывают возможности данного объекта в характеризации категории $\mathcal{C}$ в целом.

В случае, когда $\mathcal{C} = \mathcal{O}(I)$ и $A \in \mathcal{O}(I)$ – открытое множество, то топология, определяющая степень близости точек пространства (в пределах $A$), менее предпочтительна, чем наличие в пространстве способа измерения расстояния между точками (в пределах $A$), т. е. геометрия имеет, конечно, преимущество перед топологией. При этом множество $F(A)$ может состоять из разных геометрических характеристик, но, упрощая, Гротендик пишет о измерительном приборе, или об эталоне метра, посредством которого делается измерение.

[4] См. статью «Топология Гротендика» в Википедии.

В рамках стремления к наиболее общему подходу с объектом $A$ связывают просто какое-то множество данных, т. е. берём $F(A) \in \mathbf{Sets}$, а природа этих данных подлежит уточнению в зависимости от решаемой с помощью теории пучков задачи.

Таким образом, определена категория,

$$\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}, \tag{1}$$

объектами которой являются *функторы* $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$, называемые *предпучками* и сопоставляющие объектам $A$ множество «эталонов метра, или измерительных приборов», т. е. $F(A)$. (Значок «op» (opposite) говорит, что направление морфизма надо заменить на противоположное).

Обратим внимание, что если мы возьмём другой предпучок $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$, то для каждого этноса $A$ имеем иное множество $G(A)$ «эталонов метра или измерительных приборов», чем $F(A)$.

Категория $\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}$ является топосом и называется категорией предпучков. Её часто обозначают $St(\mathcal{C})$.

Предпучок $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$ разрозненным, беспорядоченным образом сопоставляет объектам $B$ их «эталоны метра, или измерительные приборы» $F(B)$.

Для наведения порядка воспользуемся топологией категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим покрытие $J(A)$. Ясно, что объекты из $\{A_x : x \in X\}$ также имеют свои «эталоны метра, или измерительные приборы» той же структуры, что и $A$, т. е. имеем множества $F(A_x)$. Очевидно, должна быть увязка «эталонов метра, или измерительных приборов» $F(A_x)$ в нечто единое целое, определяемое «центральными» «эталонами метра, или измерительными приборами» $F(A)$ покрываемого «центрального» объекта $A$.

*Увязка «эталонов метра, или измерительных приборов»* в рамках одного предпучка $F$ и в пределах одного объекта и близкого к нему семейства объектов $J(A)$ в *единый пучок*, именуемая в теории категории *склеиванием* элементов $s_x \in F(A_x)$ в единый элемент $s \in F(A)$, осуществляется посредством следующего определения.

**Определение 8.** Предпучок $F$ называется *пучком над ситусом* $(\mathcal{C}, J)$, если он удовлетворяет следующему условию *склейки*:

COM. *Пусть* $\{f_x : A_x \to A |\ x \in X\} \in J(A)$ *– произвольное покрытие объекта* $A$ *и* $\{s_x : x \in X\}$ *– произвольное семейство элементов* $s_x \in F(A_x)$*, являющихся попарно совместимыми, т. е. для любых* $x, x' \in X$ *выполняется равенство* $F_{xx'}(s_x) = F_{x'x}(s_{x'})$*. Тогда существует единственный* $s \in F(A)$*, удовлетворяющий равенству* $F_x(s) = s_x$ *при любом* $x \in X$.

Здесь использованы функции ограничения $F_{xx'} : F(A_x) \to F(A_x \times_A A_{x'})$ и $F_{x'x} : F(A_{x'}) \to F(A_x \times_A A_{x'})$, являющиеся $F$-образами двух новых морфизмов $f_x, f_{x'}$, получаемых при построении декартова квадрата.

$$\begin{tikzcd}
A_x \times_A A_{x'} \arrow[r] \arrow[d] & A_{x'} \arrow[d, "f_{x'}"] \\
A_x \arrow[r, "f_x"'] & A
\end{tikzcd}$$

Обозначим также через $F_x$ стрелку $F(f_x) : F(A) \to F(A_x)$.

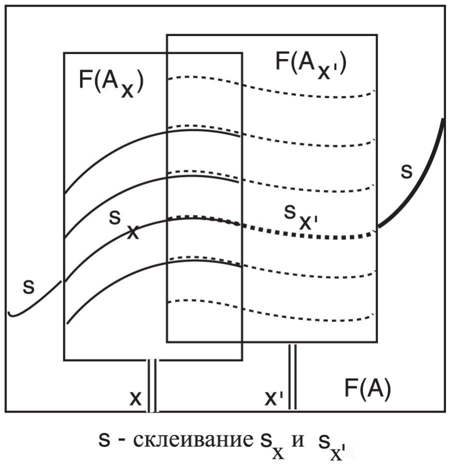


Рис. 1. Пучок – это предпучок со склеенным семейством «сечений» $\{s_x : x \in X\}$ в единое «сечение» $s$

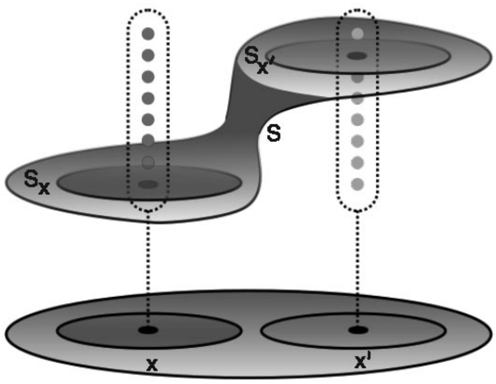


Рис. 2. Склеивание «сечений» $s_x$ и $s_{x'}$ в пучке $F$ позволяет объекту $A_x$ непрерывно меняться вдоль «сечения» $s$ при изменении $x \to x'$, переходя от $A_x$ к $A_{x'}$ (рис. из [14])

Пучки – это предпучки специального вида, подобно тому, как абелевы группы являются специальным случаем групп. Пучки образуют полную подкатегорию в категории предпучков.

**Определение 9.** Подкатегорию категории предпучков $St(\mathcal{C})$, образованную пучками над ситусом $(\mathcal{C}, J)$, обозначаем через $Sh_J(\mathcal{C})$ (или $Sh(\mathcal{C}, J)$) и называем *категорией пучков*, или *топосом Гротендика*.

$$\boxed{Sh_J(\mathcal{C}) \subset \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}.}$$

Топос Гротендика, выражаясь его языком, – это арсенал всевозможных «эталонов метра, или измерительных приборов», соответствующим образом склеенных, т. е. согласованных.

## 5. Топосы и пространства

Топос Гротендика – это «пространство в новом стиле», обобщающее традиционное топологическое пространство. «То есть «пространство в новом стиле» (или топос), обобщающее традиционные топологические пространства, будет описываться попросту как «категория», которая, не вытекая с необходимостью из обыкновенного пространства, тем не менее обладает всеми хорошими свойствами (единожды чётко для всех определёнными, разумеется) этой «категории пучков» [2].

Благодаря топосам пучков, придуманных Гротендиком, «непрерывное», воплощённое в образе пространства, предстаёт «переданным» или «выраженным» структурой категории, по природе «алгебраической», воспринимавшейся до сих пор как существенно «разрывная» или «дискретная».

На самом деле самыми важными в топологическом пространстве являются отнюдь не его «точки» и не его «подмножества» с отношениями близости между ними, а пучки над этим пространством и категория, которую они образуют [2].

Понятие топоса Гротендика – расширение или, лучше сказать, метаморфоза понятия пространства.

Оно, во-первых, позволяет более или менее очевидным образом переносить на топосы самые важные интуитивные представления и геометрические конструкции, знакомые по старым добрым пространствам прежних времён, а во-вторых, новое понятие достаточно широко, чтобы охватить все множество ситуаций, в которых, как раньше считалось, не место интуитивным представлениям «тополого-геометрической» природы – именно, тем, какие тогда связывались только с обыкновенными топологическими пространствами [2]. Последнее и даёт шанс обеспечить «топологический поворот» в социологии «дискретным» образом развивая социальную топологию.

## 6. Топос в социологии

В российской социологической и философской литературе в последнее десятилетие распространился термин «топос». Как и в случае с понятием топологии, строгих определений топологии, топологического пространства, топоса в работах социологов[5] и философов мы не находим. Поэтому можно соотнести

[5]Отметим достаточно строгое определение социальной топологии в работе Н.А. Шматко [7, с. 16].

имеющиеся в литературе расплывчатые определения с точными математическими определениями.

В социологии термин «топос» появился в работе Бурдьё, и изначально он вводился как греческий перевод слова «место».

Так Бурдьё пишет: «Место, topos может быть определено абсолютно, как то, где находится агент или предмет, где он «имеет место», существует, короче, как «локализация», или же относительно, релятивно, как позиция, как ранг в порядке. Занимаемое место может быть определено как площадь, поверхность и объем, который занимает агент или предмет, его размеры или, еще лучше, его габариты (как иногда говорят о машине или о мебели) [1].

В российской социологической литературе находим следующие определения топоса:

> Топосы – локальные социальные порядки, поддерживаемые и воспроизводимые при участии публичной политики (Н.А. Шматко [7]).
>
> Топосы – структурные единицы публичной политики, обусловливающие практики входящих в них агентов (Н.А. Шматко [7]).
>
> Топосы – структурные единицы социальной коммуникации, обусловливающие практики, входящие в состав местных сообществ (Т.И. Макогон [9]).

Поскольку «локальные социальные порядки», местные сообщества можно локализовать посредством открытого множества $A$ в топологическом социальном пространстве $I$, то скорее всего под «единицами социальной коммуникации, обусловливающими практики, входящими в состав местных сообществ» следует понимать пучок $F : \mathcal{O}(I) \to \mathbf{Sets}$, поскольку в данном случае для местного сообщества, которое *локально имеет место* в $A \subset I$, обусловленные им практики – это совокупность элементов, образующих множество $F(A)$. В пользу этого говорит то, что сами математики пучки используют для установления отношений между локальными и глобальными данными. Пучки содержат данные, отнесённые к каждому открытому подмножеству $A$ социального пространства $I$.

Как пучки связывают локальное с глобальным, т. е. с тем, что характеризует все пространство $I$ в целом? Ответ прост: например, пучкам (коммутативных групп) отвечают коммутативные группы, называемые *группами когомологий со значениями в пучке*. А группы когомологий определяют важнейшие фундаментальные топологические и геометричские свойства пространства (многообразия) $I$.

Иначе говоря, определение Т.И. Макогон следует переформулировать, заменяя слово «топосы» на слово «пучки»:

> Пучки – структурные единицы социальной коммуникации, обусловливающие практики, входящие в состав местных сообществ.
>
> Топос – совокупность пучков, т. е. всевозможные варианты единиц социальной коммуникации.

## 7. Заключение

Социальная топология для многих социологических и философских исследований становится основной методологической установкой. Этот существенный «топологический поворот» в методологии требует соотнесения созвучных терминов, используемых математиками и социологами. И если с топологическими терминами ситуация более или менее удовлетворительная, то с термином «топос» наблюдается значительное расхождение. Конечно, каждая наука, используя одни и те же слова, часто придаёт им различный смысл. Тем не менее желательно иметь «переводчики», которые устанавливают требуемые соответствия между используемыми терминами. В данной статье показано, что термину «топос» в социологии в математике соответствует термин «пучок». Как результат, мы получаем возможность правильно использовать одну из самых блестящих математических теорий – теорию пучков и топосы Гротендика, в частности, в целях решения задач, стоящих перед теоретической социологией и философией, сформулированных в рамках методологии социальной топологии.

## Литература


1. Бурдьё П. Социология политики: Пер. с фр. / Сост., общ. ред. и предисл. Н.А. Шматко. М. : Socio-Logos, 1993.
2. Гротендик А. Урожаи и посевы. Ижевск : Издательский дом: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
3. Artin M., Grothendieck A., Verdier J.L. Theorie des topos et cohomologie etale des schemas. Vols. 1, 2, and 3 // Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag. V. 269. 1972; V. 270. 1972 and V. 305. 1973.
4. Латур Б. Пересборка социального. Введение в акторно-сетевую теорию. М. : ГУ-ВШЭ, 2014.
5. Ло Дж. Объекты и пространства / Пер. с англ. В. Вахштайна // Социологическое обозрение. 2006. № 1.
6. Вахштайн В. Социология вещей и «поворот к материальному» в социальной теории // Социология вещей. Сборник статей. М. : Издательский дом «Территория будущего», 2006.
7. Шматко Н.А. Плюрализация социального порядка и социальная топология // Социологические исследования. 2001. № 9. С. 14–18.
8. Шматко Н.А. Феномен публичной политики // Социол. исслед. 2001. № 7.
9. Макогон Т.И. Топологические перспективы описания местных сообществ // Теория и практика общественного развития. 2013. Вып. 1. С. 24–30.
10. Макогон Т.И. Процессы глобализации и собственная логика местных сообществ // Вестник КемГУ. 2013. Т. 1, № 3 (55). С. 226–232.
11. Бетев А.Н. Социальная топология свободы: диссертация ... канд. филос. наук. Екатеринбург, 2009. 167 с.
12. Гольдблатт Р. Топосы. М. : Мир, 1983.
13. Джонсон П.Т. Теория топосов. М. : Наука, 1986.

14. Sallach D.L. Recognition-Based Logic and Social Conflict: Toward a Topos Model // The 8th International Workshop on Agent-based Approach in Economic and Social Complex Systems. Tokyo: Shibaura Institute of Technology, 2013.

## SOCIAL TOPOLOGY AND THE GROTHENDIECK TOPOI

**A.K. Guts**[1]
Dr.Sc.(Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru
**L.A. Pautova**[2]
D.Sc.(Sociology), e-mail: pautoval@yandex.ru

[1]Omsk State University n.a. F.M. Dostoevskiy
[2]Moscow, Fund of Public Opinion

**Abstract.** The methodology of social topology and most the common approach to the topological vision of space that is offered by Grothendieck are discussed. The Grothendieck topology and the Grothendieck topoi are considered. It is shown how they promote topological turn in the modern sociology.

**Keywords:** social topology, sociology, topoi, the Grothendieck topos, sheaves topoi, formalization of social space.