

ОБОБЩЕНИЕ ЦЕНТРИРОВАННОЙ ВОЛНЫ РИМАНА ПРИ УЧЁТЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

С.Л. Дерябин

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: SDeryabin@usurt.ru

А.С. Кирьянова

аспирант, e-mail: ASKiryanova@usurt.ru

Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС)

Аннотация. В работе рассматриваются двумерные изэнтропические течения политропного газа в условиях действия силы тяжести. В качестве математической модели используется система уравнений газовой динамики. Для постановки задачи о распаде специального разрыва в системе делается вырожденная замена переменных, а именно: зависимые и независимые переменные меняются ролями. В новых переменных для системы ставится начально-краевая задача с данными на звуковой характеристике и дополнительным условием. Это условие описывает мгновенное разрушение непроницаемой стенки, отделяющей в начальный момент времени газ от вакуума. Доказывается теорема существования и единственности поставленной начально-краевой задачи в окрестности звуковой характеристики. Далее решение строится в виде степенных рядов. Для определения коэффициентов рядов выписываются и интегрируются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ структуры коэффициентов рядов позволил доказать существование построенного решения в области от звуковой характеристики до границы газ-вакуум включительно. Для определения закона движения границы газ-вакуум выписывается квазилинейная система уравнений с частными производными, которая с помощью характеристического параметра сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. После интегрирования последней системы в параметрическом виде получен закон движения границы газ-вакуум и значения параметров газа на ней.

Ключевые слова: политропный газ, вакуум, сила тяжести, система уравнений газовой динамики, граница газ-вакуум, задача о распаде специального разрыва, центрированная волна, начально-краевая задача, звуковая характеристика.

Введение

Задачи об истечении газа в вакуум в условиях действия внешних массовых сил рассматривались ранее в [1–5]. Подробный обзор полученных результатов можно найти в [1]. Будут рассматриваться двумерные изэнтропические течения

политропного газа со следующими искомыми газодинамическими параметрами: $c = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ — скорость звука газа; u, w — декартовы координаты вектора скорости газа; t, x, z — независимые переменные. Здесь: ρ — плотность газа; $\gamma > 1$ — показатель политропы газа.

1. Постановка задачи

В момент $t = 0$ непроницаемая стенка Γ с уравнением $x = 0$ отделяет идеальный политропный покоящийся газ от вакуума. В задаче предполагается, что газ находится справа от Γ , а вакуум — слева и на газ действует сила тяжести (см. рис. 1). Будет предполагаться, что в начальный момент времени $t = 0$ на стенке Γ функция $c|_{\Gamma > 0}$, то есть имеет место разрыв плотности газа.

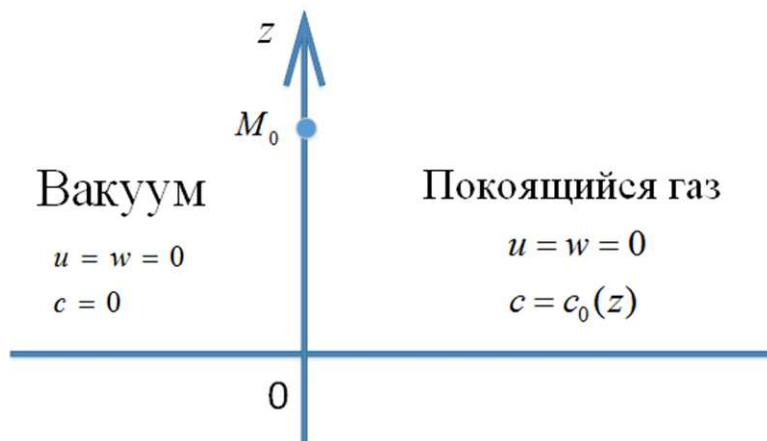


Рис. 1. Области покоя и вакуума

В момент $t = 0$ непроницаемая стенка Γ мгновенно разрушается и начинается вдоль стенки $z = 0$ истечение газа в вакуум (см. рис. 2). В рассматриваемой задаче сохраняется область покоящегося газа. В результате распада разрыва возникает течение, граничащее с областью покоящегося газа и называемое далее волной разрежения. Волна разрежения отделена от области покоящегося газа линией Γ_{12} , являющейся звуковой характеристикой этих течений, на ней имеет место слабый разрыв. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму через свободную границу Γ_{02} .

В данной работе будут строиться законы движения: свободной поверхности Γ_{02} , звуковой характеристики Γ_{12} и волна разрежения. Именно это течение в дальнейшем будет называться обобщением центрированной волны Римана.

Система уравнений, описывающая изэнтропические течения идеального по-

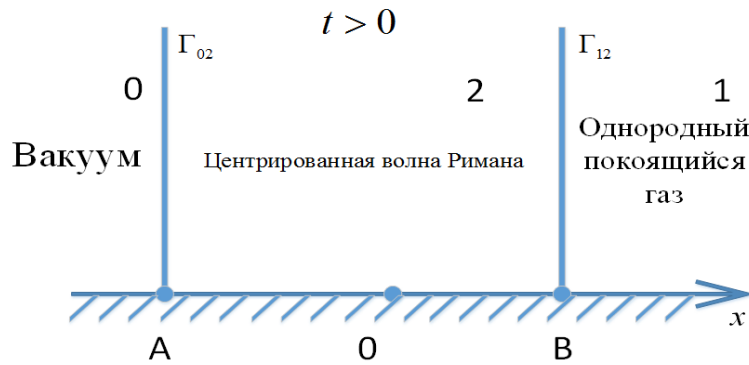


Рис. 2. Области покоя, вакуума и волны разрежения

литропного газа в условиях действия силы тяжести, имеет вид [6]:

$$\begin{aligned}
 c_t + c_x u + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_x + w_z) &= 0, \\
 u_t + u_x u + u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_x &= 0, \\
 w_t + w_x u + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z &= -g,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения.

Если в системе (1) положить $u = w = 0$, то первые два уравнения выполняются тождественно, а в третьем уравнении получим $\frac{2}{\gamma - 1} c c_z = -g$. Интегрируя полученное уравнение, имеем $c = c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz}$ — распределение скорости звука покоящегося газа. Здесь c_{00} — скорость звука покоящегося газа при $z = 0$.

Далее волна разрежения строится для значений z из интервала

$$0 \leq z \leq \frac{c_{00}^2}{(\gamma - 1)g}. \tag{2}$$

Причём на верхней границе при $z = \frac{c_{00}^2}{(\gamma - 1)g}$ волна разрежения примыкает к вакууму. В данной работе волна разрежения будет построена для внутренних точек интервала (2). Конфигурация течения в окрестности непроницаемой стенки $z = 0$ и верхней границы газ-вакуум рассматриваться не будут.

Для построения волны разрежения, как и ранее [1] при построении решения задачи о распаде разрыва, в системе (1) делается следующая замена переменных: за независимые переменные берутся t, c, z , а за неизвестные функции

x, u, w . В результате такой замены вместо системы (1) получается система:

$$\begin{aligned}x_t &= u - x_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c), \\x_c u_t + (u - x_t - x_z w) u_c + x_c u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c &= 0, \\x_c w_t + (u - x_t - x_z w) w_c + x_c w_z w - \frac{2}{\gamma - 1} c x_z &= -g x_c.\end{aligned}\tag{3}$$

Для удобства дальнейшего исследования систему (3) перепишем в виде

$$\begin{aligned}x_t &= u - x_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c), \\x_c u_t - \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c) u_c + x_c u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c &= 0, \\x_c w_t - \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c) w_c + x_c w_z w - \frac{2}{\gamma - 1} c x_z &= -g x_c.\end{aligned}\tag{4}$$

Закон движения характеристики Γ_{12} определяется из решения дифференциальной задачи [6]

$$x_t = c_0(z) \sqrt{1 + x_z^2}, \quad x(0) = 0.$$

Задача по теореме Ковалевской имеет единственное аналитическое решение, что позволяет поставить начальные данные на характеристике Γ_{12} :

$$u|_{\Gamma_{12}} = 0, \quad w|_{\Gamma_{12}} = 0, \quad c|_{\Gamma_{12}} = c_0(z).\tag{5}$$

Течение в области между Γ_{12} и Γ_{02} будем строить как решение системы (3) с данными (5) на характеристике Γ_{12} . Поскольку Γ_{12} — характеристика кратности один, то для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [7]. Если бы поверхность Γ_{12} убиралась медленно, то таким условием было бы условие непротекания на стенке. Поскольку стенка $x = 0$ убирается мгновенно, этим условием в пространстве переменных t, c, z служит [1] соотношение

$$x(0, c, z) = 0.\tag{6}$$

2. Построение волны разрежения

Теорема 1. *Существует t_0 такое, что при $0 \leq t \leq t_0$ в некоторой окрестности Γ_{12} существует единственное локально-аналитическое решение задачи (4)-(6) о распаде специального разрыва.*

Доказательство. Доказательство теоремы состоит, как и в [1], в сведении к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [7]. ■

Разложим решение задачи (4)-(6) в ряд по степеням t

$$\mathbf{f}(t, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(c, z) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{f} = \{x, u, w\}. \quad (7)$$

В системе (4) положим $t = 0$ и с учётом (6) получим уравнения для определения нулевых коэффициентов ряда (7)

$$x_1 = u_0 + \frac{\gamma - 1}{2} c u_{0c},$$

$$\frac{\gamma - 1}{2} u_{0c}^2 = \frac{2}{\gamma - 1},$$

$$u_{0c} w_{0c} = 0.$$

Преобразуя уравнения, получаем

$$w_{0c} = 0, \quad u_{0c} = \frac{2}{\gamma - 1}.$$

Интегрируя с учётом (5), имеем

$$x_1 = 2\alpha c - \frac{2}{\gamma - 1} c_0(z), \quad u_0 = \frac{2}{\gamma - 1} (c - c_0(z)), \quad w_0 = 0.$$

Здесь $2\alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$.

Систему (4) продифференцируем по t , положим $t = 0$ с учётом (6) и найденных коэффициентов ряда, получим

$$x_2 = u_1 + \frac{\gamma - 1}{2} c u_{1c},$$

$$c u_{1c} - \alpha u_1 = 0,$$

$$c w_{1c} - 2\alpha w_1 = 2\alpha g + \frac{4c_{0z}(z)}{(\gamma - 1)^2} c.$$

Интегрируя систему с учётом (5), имеем

$$x_2 = 0, \quad u_1 = 0, \quad w_1 = \left(\frac{2c_0(z)c_{0z}(z)}{\gamma - 1} + g \right) c_0^{-2\alpha}(z) c^{2\alpha} - \frac{2c_{0z}(z)}{(\gamma - 1)} c - g.$$

Вводя соответствующие обозначения, будем иметь

$$w_1 = p_{11}(z)c^{2\alpha} + p_{12}(z)c - g,$$

$$w_{1z} = p_{11z}(z)c^{2\alpha} + p_{12z}(z)c,$$

$$w_{1c} = 2\alpha p_{11}(z)c^{2\alpha-1} + p_{12}(z).$$

Систему (4) продифференцируем дважды по t , положим $t = 0$ с учётом (6) и найденных коэффициентов ряда, получим

$$x_3 = u_2 + \frac{\gamma - 1}{2}cu_{2c} + F_{12}(c, z),$$

$$cu_{2c} - 2\alpha u_2 = F_{22}(c, z),$$

$$cw_{2c} - 4\alpha w_2 = 0.$$

Здесь

$$F_{12}(c, z) = -2x_{1z}w_1 + (\gamma - 1)c(x_{1c}w_{1z} - x_{1z}w_{1c}),$$

$$F_{22}(c, z) = x_{1c}u_{0z}w_1 + \frac{\gamma - 1}{2}c(x_{1z}w_{1c} - x_{1c}w_{1z}).$$

Вводя соответствующие обозначения, будем иметь

$$F_{12}(c, z) = q_{21}(z)c^{2\alpha+1} + q_{22}(z)c^{2\alpha} + q_{23}(z)c^2 + q_{24}(z)c + q_{25}(z),$$

$$F_{22}(c, z) = p_{21}(z)c^{2\alpha+1} + p_{22}(z)c^{2\alpha} + p_{23}(z)c^2 + p_{24}(z)c + p_{25}(z).$$

Интегрируя систему, имеем:

при $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} u_2 = & u_{20}(z)c^{2\alpha} + p_{21}(z)c^{2\alpha+1} + p_{22}(z)c^{2\alpha} \ln c + \frac{1}{1 - 2\alpha}p_{23}(z)c^2 + \\ & + \frac{1}{2 - 2\alpha}p_{24}(z)c - \frac{1}{2\alpha}p_{25}(z) \\ w_2 = & w_{20}(z)c^\alpha; \end{aligned}$$

при $\alpha = 1$

$$u_2 = u_{20}(z)c^2 + p_{21}(z)c^3 + (p_{22}(z) + p_{23}(z))c^2 \ln c + p_{24}(z)c - \frac{1}{2}p_{25}(z)$$

$$w_2 = u_{20}(z)c.$$

Произвольные функции $u_{20}(z)$, $w_{20}(z)$ определяем с учётом (5) и окончательно имеем структуру решения:

$$w_2 = 0$$

$$u_2 = - \left[p_{21}(z)c_0^{2\alpha+1} + p_{22}(z)c_0^{2\alpha} \ln c_0 + \frac{1}{1-2\alpha} p_{23}(z)c_0^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2-2\alpha} p_{24}(z)c_0 - \frac{1}{2\alpha} p_{25}(z) \right] c_0^{-2\alpha} c^{2\alpha} + \\ + p_{21}(z)c^{2\alpha+1} + p_{22}(z)c^{2\alpha} \ln c + \frac{1}{1-2\alpha} p_{23}(z)c^2 + \frac{1}{2-2\alpha} p_{24}(z)c - \frac{1}{2\alpha} p_{25}(z).$$

Систему (4) продифференцируем k раз по t , положим $t = 0$ с учётом (6) и найденных коэффициентов ряда, получим

$$x_{k+1} = u_k + \frac{\gamma - 1}{2} cu_{kc} + F_{1k}(c, z),$$

$$cu_{kc} - \alpha ku_2 = F_{2k}(c, z),$$

$$cw_{kc} - 2\alpha kw_k = F_{3k}(c, z).$$

Здесь $F_{1k}(c, z)$, $F_{2k}(c, z)$, $F_{3k}(c, z)$ — функции, известным образом зависящие от уже найденных коэффициентов ряда (2.1).

Интегрируя систему, имеем

$$u_k(c, z) = c^{\alpha k} (u_{0k}(z) + \int F_{2k}(c, z) c^{-\alpha k - 1} dc),$$

$$w_k(c, z) = c^{2\alpha k} (w_{0k}(z) + \int F_{3k}(c, z) c^{-2\alpha k - 1} dc).$$

Анализ структуры коэффициентов ряда (7) приводит к следующим леммам.

Лемма 1. Коэффициенты ряда (7) при $k \geq 1$ имеют следующий вид $u_{2k-1} = 0$, $w_{2k} = 0$, $x_{2k} = 0$.

Лемма доказывается индукцией по k . База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (7). Далее после индуктивного предположения следующее дифференцирование системы (4) приводит к нулевой правой части соответствующего уравнения. В силу условий (5) это гарантирует нулевые значения соответствующих коэффициентов ряда (7).

Лемма 2. Коэффициенты ряда (7) при $k \geq 1$ имеют следующую структуру: $\mathbf{f}_k(c, z) = \mathbf{f}_k^0(z) + c\mathbf{P}_k(c, c \ln c, c^{2\alpha})$, где \mathbf{P}_k есть многочлены от указанных аргументов, степени которых не выше чем A_k ($A = \text{const}$). Коэффициенты многочленов — функции, зависящие от z .

Лемма доказывается индукцией по k . База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (7). После индуктивного предположения показывается, что правые части дифференциальных уравнений для \mathbf{f}_k обладают нужной структурой. После интегрирования системы доказывается, что и \mathbf{f}_k обладают нужной структурой.

На основании леммы 2 можно утверждать, что структура решения задачи (4)–(6) следующая:

$$x = x^0(t, z) + cx^1(t, c, z),$$

$$u = u^0(t, z) + cu^1(t, c, z),$$

$$w = w^0(t, z) + cw^1(t, c, z),$$

где

$$x^0(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^0(z) \frac{t^k}{k!},$$

$$u^0(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^0(z) \frac{t^k}{k!}, \quad (8)$$

$$w^0(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^0(z) \frac{t^k}{k!}.$$

Для $x^0(t, z)$, $u^0(t, z)$, $w^0(t, z)$ справедлива следующая

Лемма 3. *Ряды (8) являются решением следующей задачи*

$$x_t + x_z w = u, \quad x(0, z) = 0,$$

$$u_t + x_z w = 0, \quad u(0, z) = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0(z), \quad (9)$$

$$w_t + x_z w = -g, \quad w(0, z) = 0.$$

Лемма доказывается разложением в ряд по степеням t решения задачи (9) и сравнением полученных рядов с рядами (8). Ряды оказываются равными. Система (9) не имеет особенностей, поэтому задача (9) имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно представить рядами. Следовательно, ряды (8) сходятся. На основании приведённых лемм доказывается следующая

Теорема 2. *Для $\gamma > 1$, при $0 \leq t \leq t_*$ область сходимости рядов (7), а также рядов \mathbf{f}_t , \mathbf{f}_z , \mathbf{f}_c покрывает всю зону течения от Γ_{12} до Γ_{02} включительно. При этом закон движения свободной границы определяется из решения вспомогательной задачи (9).*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству из [1] и проводится по методике [7], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной. При доказательстве используется теорема 1 и полиномиальная структура коэффициентов ряда. ■

Проведём исследование задачи (9). С помощью введения характеристического параметра данная система уравнений с частными производными сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [8].

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= 1, & \frac{dx}{d\tau} &= u, & \frac{dz}{d\tau} &= w, \\ \frac{du}{d\tau} &= 0, & \frac{dw}{d\tau} &= -g. \end{aligned} \tag{10}$$

Интегрируя систему (10), имеем $t = \tau$,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2}{\gamma-1}c_0(z), & x &= -\frac{2}{\gamma-1}c_0(z)t, \\ w &= -gt, & z &= z_{00} - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Выводы

Проведённые исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Доказана теорема существования и единственности поставленной начально-краевой задачи.
2. В виде сходящихся рядов построено течение газа, отвечающее области от неоднородного покоящегося газа до вакуума включительно.
3. В виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений получен закон движения границы газ-вакуум.

Благодарности

В заключении авторы благодарят С.П. Баутина и С.С. Титова за полезное обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск : Наука, 2005. 390 с.
2. Дерябин С.Л. Трёхмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа в условиях действия внешних массовых сил // Динамика сплошной среды: Сб. науч.тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1987. Вып. 83. С. 60–71.
3. Дерябин С.Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44.

4. Дерябин С.Л., Мезенцев А.В. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму, в условиях действия сил тяготения и Кориолиса // Труды института математики и механики. Екатеринбург : УрО РАН, 2010. Т. 16. С. 63–74.
5. Баутин С.П., Дерябин С.Л., Мезенцев А.В., Чуев Н.П. Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе. Новосибирск : Наука, 2015. 191 с.
6. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
7. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.
8. Курант Р. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.

GENERALIZATION OF A CENTERED RIEMANN WAVE TAKING INTO ACCOUNT THE FORCES OF GRAVITY

S.L. Deryabin

Dr.Sc. (Phys.-Math.) Professor, e-mail: SDeryabin@usurt.ru

A.S. Kiryanova

Graduate Student, e-mail: ASKiryanova@usurt.ru

Ural State University of Railway Transport (USURT)

Abstract. The paper examines two-dimensional isentropic flow of a polytropic gas under the action of gravity. As a mathematical model a system of equations of gas dynamics is used. To put the problem of decay of a special break the degenerate change of variables is made in the system, namely: dependent and independent variables change roles. In the new variables for the system initial-boundary value problem with data on the characteristics of the sound and the additional condition is put. This condition describes the instantaneous destruction of the impermeable wall separating the gas from the vacuum at the initial time. We prove the existence and uniqueness of the initial-boundary value problem in the vicinity of the sound characteristics. Next, the solution is constructed in the form of a power series. To determine the coefficients of the series systems of ordinary differential equations are written and integrated. Coefficients of the series structure analysis has proved the existence of the built solution in the range from the sound characteristics to the boundary of the gas-vacuum inclusive. To determine the law of motion of gas-vacuum boundary quasi-linear system of partial differential equations is written, which by means of a characteristic parameter is reduced to a system of ordinary differential equations. After integration of the latter system in parametric form the law of motion of gas-vacuum boundary values and parameters of the gas on it are obtained.

Keywords: polytropic gas, vacuum, force of gravity, the gas dynamics equations, gas-vacuum boundary, initial-boundary value problem, Riemann problem, centered wave.

Дата поступления в редакцию: 17.12.2016