

## **ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**И.Е. Полосков**

доцент, д.ф.-м.н., e-mail: polosk@psu.ru

Механико-математический факультет, Пермский государственный национальный  
исследовательский университет

**Аннотация.** В работе рассматривается приближённая схема анализа линейных динамических систем, описываемых стохастическими интегро-дифференциальными уравнениями с неразностными ядрами. Уравнения такого типа являются математическими моделями значительного числа явлений в различных областях науки и техники, включающих теорию колебаний объектов с сосредоточенными и распределёнными параметрами с учётом аэроавтоупругости, наследственности, (термо)вязкоупругости и старения материалов (асфальт, бетон, биополимеры, горные породы, коллоидные растворы, композиты, природные и искусственные полимеры, суспензии, стекло, целлюлоза и т.п.) и др. Предлагаемая расчётная схема основана на использовании модификации итерационного метода аппроксимации матричной функции Грина и предназначена для вычисления первых моментных функций вектора состояния системы, включая функции математического ожидания и ковариационные функции. Приводится пример применения схемы для анализа модельной системы с двумя степенями свободы.

**Ключевые слова:** стохастический анализ, линейная динамическая система, вектор состояния, интегро-дифференциальное уравнение, матричная функция Грина, моментная функция.

### **Введение**

Модели в форме детерминированных и стохастических интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ, СИДУ), обыкновенных и в частных производных, интересны как с теоретической, так и практической точек зрения вследствие того, что эти уравнения описывают значительное число явлений в различных областях науки и техники, в частности, в теории колебаний с учетом аэроавтоупругости [2], наследственности материала [9], (термо)вязкоупругости [11] и др. Общая теория и первичная классификация детерминированных интегро-дифференциальных уравнений была разработана В. Вольтерра [3] в первой

половине XX в. Некоторые современные общие приложения ИДУ рассмотрены в [14].

Системы обыкновенных СИДУ, например, в стохастической механике, часто возникают как результат применения таких методов, как метод конечных элементов (МКЭ) [4], метод Галёркина [5], метод конечных разностей (МКР) [8], метод прямых [13], разложение неизвестных функций по собственным функциям краевой задачи [12, 20] или каким-либо специальным функциям [7], к СИДУ в частных производных (СИДУвЧП) [21], которые описывают непрерывные вязкоупругие среды. После преобразования ИДУвЧП или СИДУвЧП в обыкновенные ИДУ или СИДУ зависящая от времени структура ядер в обыкновенных детерминированных или стохастических интегро-дифференциальных уравнениях движения сохраняется.

Некоторые интегро-дифференциальные уравнения можно свести к дифференциальным уравнениям в линейных нормированных пространствах. Однако существуют эволюционные ИДУ, служащие моделями во многих областях науки и содержащие интегрирование по времени, для которых это сделать сложно. Такие уравнения [3], обыкновенные и в частных производных, описывают сложное поведение объектов в различных средах с учётом предыдущей истории.

Нелинейные и линейные стохастические ИДУ, кроме предыстории, позволяют учесть влияние случайных возмущений на поведение объекта. Достаточно общие формы линейных систем СИДУ имеют следующий вид:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathcal{A}(t) \mathbf{X}(t) + \int_{t_0}^t \mathcal{B}(t, \tau) \mathbf{X}(\tau) d\tau + \mathbf{c}(t) + \mathcal{G}(t) \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0. \quad (1)$$

В этих уравнениях  $t$  — время,  $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$ ,  $T < +\infty$ ;  $\mathbf{X}(t) = \text{col}(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$  и  $\mathbf{U}(t) = \text{col}(U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t))$  — случайные векторные процессы, определяющие состояние системы (вектор состояния) и случайные возмущения соответственно;  $\mathbf{c}(t) = \text{col}(c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$ ,  $\mathcal{A}(t) = \{a_{ij}(t)\} \in \mathbb{M}_{n \times n}$ ,  $\mathcal{B}(t, \tau) = \{b_{ij}(t, \tau)\} \in \mathbb{M}_{n \times n}$ ,  $\mathcal{G}(t) = \{g_{ij}(t)\} \in \mathbb{M}_{n \times m}$  — неслучайные векторная и матричные функции, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов;  $\mathbf{X}^0$  — случайный вектор с известными характеристиками, причём векторы  $\mathbf{X}^0$  и  $\mathbf{V}(t)$  статистически независимы;  $\mathbb{R}^s$  — стандартное евклидово пространство размерности  $s$ ,  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ;  $\text{col}(d_1, d_2, \dots, d_s)$  — вектор-столбец с соответствующими компонентами;  $\mathbb{M}_{s \times q}$  — множество действительных  $s \times q$ -матриц; точкой или точками сверху символа обозначаются производные по переменной  $t$  соответствующего порядка.

Вопросы, связанные с определением СИДУ, существованием и единственностью их решений, рассмотрены в [18, 19].

## 1. Постановка задачи

Пусть  $\mathbf{X}^0$  — гауссов случайный вектор со значениями в  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{m}_{X^0} = \mathcal{E}[\mathbf{X}^0], \quad \mathcal{C}_{X^0 X^0} = \mathcal{E}[\{\mathbf{X}^0 - \mathbf{m}_{X^0}\}\{\mathbf{X}^0 - \mathbf{m}_{X^0}\}^\top];$$

а  $\mathbf{U}(t)$  — стохастический процесс, удовлетворяющий векторному линейному стохастическому дифференциальному уравнению Ито

$$d\mathbf{U}(t) = \mathcal{H}\mathbf{U}(t) dt + \mathcal{Q}d\mathbf{W}(t), \quad t \in (t_0, T] \quad (2)$$

со случайным начальным условием  $\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}^0$ . В уравнении (2)  $\mathcal{H} = \{h_{ij}\} \in \mathbb{M}_{m \times m}$  и  $\mathcal{Q} = \{q_{ij}\} \in \mathbb{M}_{m \times r}$  — заданные постоянные матрицы;  $\mathbf{W}(t) = \text{col}(W_1(t), W_2(t), \dots, W_r(t))$  — векторный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами, такой, что его обобщённая производная по времени  $t$ , обозначаемая через  $\mathbf{V}(t) = \text{col}(V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t))$ , есть векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами,  $\mathcal{E}[\mathbf{W}(t)] = \mathbf{0}_r$ ,  $\mathcal{E}[V(t)V^\top(t')] = 2\pi\mathcal{I}\delta(t-t')$ ;  $\delta$  — дельта-функция Дирака;  $\top$  — символ транспонирования;  $\mathcal{I}$  — единичная матрица соответствующего порядка;  $\mathbf{U}^0$  — начальный вектор, представляющий собой центрированную гауссову случайную величину со значениями в  $\mathbb{R}^m$ ;  $\mathbf{0}_s$  — нулевой  $s$ -вектор. Предполагается, что плотность вероятности вектора  $\mathbf{U}^0$  — гауссово стационарное распределение, ассоциированное с уравнением (2). Параметрами этого распределения являются вектор математических ожиданий  $\mathbf{m}_{U^0} = \mathcal{E}[\mathbf{U}^0] = \mathbf{0}$  и ковариационная матрица  $\mathcal{C}_{U^0U^0} = \mathcal{E}[\mathbf{U}^0\mathbf{U}^{0\top}]$ . Кроме того, в уравнении (2) матрицы  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{Q}$  таковы, что  $\mathbf{U}(t)$  — случайный процесс второго порядка. Следовательно,  $\{\mathbf{U}(t), t \in [t_0, T]\}$  — стационарный центрированный непрерывный в среднем квадратичном гауссовский случайный процесс, для которого

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{0}_m,$$

$$\mathcal{C}_{UU}(t_1 - t_2) = \mathcal{C}_{UU}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\mathbf{U}(t_1)\mathbf{U}^\top(t_2)], \quad \mathcal{C}_{UU}(0) = \mathcal{C}_{U^0U^0}.$$

Учитывая, что  $\mathbf{X}^0$  и  $\mathbf{U}(t)$  — гауссовские случайные вектор и процесс соответственно, линейность уравнений (1) и (2), а также высказанные выше предположения, можно установить, что  $\{\mathbf{X}(t), t \in [t_0, T]\}$  — непрерывный в среднем квадратичном гауссовский векторный случайный процесс второго порядка. При этом для всех непустых и неупорядоченных точечных подмножеств отрезка  $[t_0, T]$  многомерные распределения расширенных случайных векторов состояния будут гауссовыми, определяемыми соответствующими векторами средних и ковариационных матриц.

Найдём теперь векторную функцию математических ожиданий (ВФМО) и матрицу ковариационных функций (МКФ) векторного случайного процесса  $\mathbf{X}(t)$ , а также все взаимные МКФ  $\mathbf{X}(t)$  и векторного возмущения  $\mathbf{U}(t)$ :

$$\mathbf{m}_X(t) = \mathcal{E}[\mathbf{X}(t)], \quad \mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^\top(t_2)] - \mathbf{m}_X(t_1)\mathbf{m}_X^\top(t_2),$$

$$\mathcal{C}_{XU}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{U}^\top(t_2)], \quad \mathcal{C}_{UX}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\mathbf{U}(t_1)\mathbf{X}^\top(t_2)].$$

Принимая во внимание введённые определения и обозначения, несложно установить, что решение поставленной задачи заключается в создании схемы для вычисления ВФМО  $\mathbf{m}_X(t)$  и МКФ  $\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)$  для любых  $t, t_1, t_2 \in (t_0, T]$ .

## 2. Уравнения для моментных функций первого и второго порядка

Применение оператора математического ожидания к обеим частям уравнений (1) даёт:

$$\dot{\mathbf{m}}_X(t) = \mathcal{A}(t) \mathbf{m}_X(t) + \int_{t'}^t \mathcal{B}(t, \tau) \mathbf{m}_X(\tau) d\tau + \mathbf{c}(t), \quad t_0 \leq t' < t \leq T, \quad (3)$$

$$\mathbf{m}_X(t') = \mathbf{m}_{X'}, \quad \mathbf{m}_X(t') = \mathbf{m}_{X^0} \quad \text{для} \quad t' = t_0.$$

Чтобы получить уравнение для  $\mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2)$ , необходимо расширить вектор состояния системы (1) до нового случайного вектора  $\mathbf{Y}(t) = \text{col}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t))$  со значениями в  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Тогда ВФМО  $\mathbf{m}_Y(t)$  со значениями в  $\mathbb{R}^{n+m}$  и МКФ  $\mathcal{C}_{YY}(t_1, t_2) \in \mathbb{M}_{(n+m) \times (n+m)}$  случайного процесса  $\mathbf{Y}(t)$  определяются соотношениями

$$\mathbf{m}_Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_X(t) \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{YY}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{XX}(t_1, t_2) & \mathcal{C}_{XU}(t_1, t_2) \\ \mathcal{C}_{UX}(t_1, t_2) & \mathcal{C}_{UU}(t_1, t_2) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Введённый случайный процесс  $\mathbf{Y}(t)$  (4) будет удовлетворять системе СИДУ

$$d\mathbf{Y}(t) = \left[ \mathbb{A}(t) \mathbf{Y}(t) + \int_{t'}^t \mathbb{B}(t, \tau) \mathbf{Y}(\tau) d\tau + \mathbf{c}(t) \right] dt + \mathbb{Q} d\mathbf{W}(t), \quad t_0 \leq t' < t \leq T \quad (5)$$

со случайным начальным условием

$$\mathbf{Y}(t') = \mathbf{Y}', \quad \mathbf{Y}' = \text{col}(\mathbf{X}^0, \mathbf{U}^0) \quad \text{для} \quad t' = t_0. \quad (6)$$

В уравнении (5) матрицы  $\mathbb{A}(t) \in \mathbb{M}_{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $\mathbb{B}(t) \in \mathbb{M}_{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $\mathbb{Q} \in \mathbb{M}_{(n+m) \times r}$  и вектор  $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^{n+m}$  имеют блочную структуру и определяются так:

$$\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(t) & \mathcal{G}(t) \\ \mathcal{O}_{m \times n} & \mathcal{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{B}(t) & \mathcal{O}_{n \times m} \\ \mathcal{O}_{m \times n} & \mathcal{O}_{m \times m} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n \times r} \\ \mathcal{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}(t) \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix},$$

где  $\mathcal{O}_{s \times q}$  — нулевая  $s \times q$ -матрица.

Для получения уравнений для ковариационных функций равенством  $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Y}(t) - \mathbf{m}_Y(t)$  введём центрированный случайный процесс

$\{\mathbf{Z}(t), t \in [t_0, T]\}$  со значениями в  $\mathbb{R}^{n+m}$ , где  $\mathbf{m}_Y(t)$  — математическое ожидание, определённое равенством (4). Поэтому центрированный векторный случайный процесс  $\mathbf{Z}(t)$  будет решением системы СИДУ

$$d\mathbf{Z}(t) = \left[ \mathbb{A}(t) \mathbf{Z}(t) + \int_{t'}^t \mathbb{B}(t, \tau) \mathbf{Z}(\tau) d\tau \right] dt + \mathbb{Q} d\mathbf{W}(t), \quad t_0 \leq t' < t \leq T \quad (7)$$

со случайным начальным условием  $\mathbf{Z}(t') = \mathbf{Y}' - \mathbf{m}_{Y'}$ .

Вследствие того, что  $\mathcal{C}_{YY}(t_1, t_2) = \mathcal{C}_{Y'Y'}^\top(t_2, t_1) = \mathcal{C}_{ZZ}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t_1) \mathbf{Z}^\top(t_2)]$ , при заданном  $\mathcal{C}_{YY}(t', t')$  из (7) могут быть получены следующие уравнения ( $t_0 \leq t' < t \leq T$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C}_{YY}(t, t') &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t) \mathbf{Z}^\top(t')] = \mathcal{E}[\dot{\mathbf{Z}}(t) \mathbf{Z}^\top(t')] = \\ &= \mathbb{A}(t) \mathcal{C}_{YY}(t, t') + \int_{t'}^t \mathbb{B}(t, \tau) \mathcal{C}_{YY}(\tau, t') d\tau; \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C}_{YY}(t', t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t') \mathbf{Z}^\top(t)] = \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t') \dot{\mathbf{Z}}^\top(t)] = \\ &= \mathcal{C}_{YY}(t', t) \mathbb{A}^\top(t) + \int_{t'}^t \mathcal{C}_{YY}(t', \tau) \mathbb{B}^\top(t, \tau) d\tau. \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{C}_{YY}(t, t) &= \frac{d}{dt} \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t) \mathbf{Z}^\top(t)] = \mathcal{E}[\dot{\mathbf{Z}}(t) \mathbf{Z}^\top(t)] + \mathcal{E}[\mathbf{Z}(t) \dot{\mathbf{Z}}^\top(t)] = \\ &= \mathbb{A}(t) \mathcal{C}_{YY}(t, t) + \{\mathbb{A}(t) \mathcal{C}_{YY}(t, t)\}^\top + \\ &+ \int_{t'}^t \left[ \mathbb{B}(t, \tau) \mathcal{C}_{YY}(\tau, t) + \{\mathbb{B}(t, \tau) \mathcal{C}_{YY}(\tau, t)\}^\top \right] d\tau + 2 \pi \mathbb{Q} \mathbb{Q}^\top. \quad (10) \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (9) может быть получено транспонированием уравнения (8), а также заменой  $t'$  на  $t$ , и наоборот, в ряде мест.

Уравнения (8)–(10) должны решаться с учётом начальных условий

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{YY}(t', t') &= \mathcal{C}_{Y'Y'}, \\ \mathcal{C}_{Y'Y'} &= \mathcal{C}_{YY}(t_0, t_0) = \mathcal{C}_{Y^0Y^0} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times m} \\ \mathcal{O}_{m \times n} & \mathcal{C}_{U^0U^0} \end{bmatrix} \quad \text{для } t' = t_0. \end{aligned}$$

### 3. Матричная функция Грина для системы линейных ИДУ и схема для её приближённого вычисления

Предположим, что необходимо решить систему ИДУ

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbb{A}(t) \mathbf{z}(t) + \int_{t'}^t \mathbb{B}(t, \tau) \mathbf{z}(\tau) d\tau + \mathbf{f}(t), \quad t_0 \leq t' < t \quad (11)$$

с начальным условием

$$\mathbf{z}(t') = \mathbf{z}', \quad \mathbf{z}' = \mathbf{z}^0 \quad \text{для} \quad t' = t_0. \quad (12)$$

Тогда решение уравнений (11) и (12) может быть записано так (см., например, [15]):

$$\mathbf{z}(t) = \mathcal{R}(t, t') \mathbf{z}' + \int_{t'}^t \mathcal{R}(t, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad t' < t, \quad (13)$$

где  $\mathcal{R}(s, p)$  — матричная функция Грина, ассоциированная с уравнением (11) и являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}(s, p) = \mathbf{A}(s) \mathcal{R}(s, p) + \int_p^s \mathbf{B}(s, \tau) \mathcal{R}(\tau, p) d\tau, \quad p < s, \quad \mathcal{R}(p, p) = \mathcal{I}. \quad (14)$$

Среди методов решения систем ИДУ есть и те, практическое применение которых требует вычисления функций Грина. Первым среди них является метод последовательных приближений [15], предполагающий использование длинных аналитических выкладок. Для автоматизации таких действий может быть применен какой-либо пакет компьютерной алгебры (ПКА) [16]. Но применение даже современных ПКА не позволяет эффективно реализовать указанный метод последовательных приближений. Основной причиной является то, что эта схема требует вычисления значительного числа интегралов в замкнутой форме, что не всегда выполнимо. С другой стороны, существует возможность представить  $\mathcal{R}(s, p)$  вообще без использования операции интегрирования в следующей форме [10]:

$$\mathcal{R}(s, p) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}_\ell(p, p)}{\ell!} (s - p)^\ell, \quad \mathcal{R}_\ell(s, p) = \frac{\partial^\ell \mathcal{R}(s, p)}{\partial s^\ell}. \quad (15)$$

При применении этого подхода, коэффициенты ряда Тейлора в равенстве (15) могут быть получены последовательным дифференцированием обеих частей уравнения (14) по  $t$  (см. Приложение). Ограничиваясь на практике  $L$ -й производной, из равенства (15) можно получить, что с точностью  $O[(s - p)^L]$

$$\widehat{\mathcal{R}}(s, p) \approx \widehat{\mathcal{R}}_{[L]}(s, p) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^L \frac{\mathcal{R}_\ell(p, p)}{\ell!} (s - p)^\ell. \quad (16)$$

#### 4. Матричная функция Грина для первых и вторых моментных функций

Сравнивая уравнения (11) и (12) с уравнениями (3) и используя уравнение (13), можно установить, что ВФМО  $\mathbf{m}_X(t)$  выражается соотношением

$$\mathbf{m}_X(t) = \mathcal{R}^{[m]}(t, t') \mathbf{m}'_X + \int_{t'}^t \mathcal{R}^{[m]}(t, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (17)$$

в котором вектор  $\mathbf{f}(\tau)$  определяется равенством  $\mathbf{f}(\tau) = \mathbf{c}(\tau)$ , а матричная функция Грина  $\mathcal{R}(s, s_0)$ , ассоциированная с векторной функцией  $\mathbf{m}_X(t)$ , записывается как  $\mathcal{R}^{[m]}(s, s_0)$  и вычисляется из уравнения (14) и соотношения (16) при

$$\mathbf{A}(t) = \mathcal{A}(t), \quad \mathbf{B}(t, \tau) = \mathcal{B}(t, \tau).$$

Построение соотношений для вычисления МКФ начнём с уравнения (8) для  $\mathcal{C}_{YY}(t, t')$  при  $t > t'$ . Заметим, что решение уравнений (11) и (12), которое даётся равенством (13), а матричная функция Грина  $\mathcal{R}(s, s_0)$  удовлетворяет (14), записано для векторной функции. Рассматривая матрицу  $\mathcal{C}_{YY}(t, t')$  как множество векторов-столбцов  $\{\mathcal{C}_{YY}^{[\gamma]}(t, t'), \gamma = 1, 2, \dots, n + m\}$ , получим

$$\mathcal{C}_{YY}^{[\gamma]}(t, t') = \mathcal{R}^{[C]}(t, t') \mathcal{C}_{YY}^{[\gamma]}(t', t'), \quad t_0 \leq t' < t \leq T, \quad (18)$$

где матричная функция Грина  $\mathcal{R}(s, s_0)$ , ассоциированная с  $\mathcal{C}_{YY}^{[\gamma]}(t_1, t_2)$ , не зависит от  $\gamma$ , записана как  $\mathcal{R}^{[C]}(t, t')$  и вычисляется из уравнения (14) и соотношения (16) при

$$\mathbf{A}(t) = \mathbb{A}(t), \quad \mathbf{B}(t, \tau) = \mathbb{B}(t, \tau).$$

Применяя выражение (18) для всех значений  $\gamma = 1, 2, \dots, n + m$ , можно установить, что матрица  $\mathcal{C}_{YY}(t, t')$  определяется так:

$$\mathcal{C}_{YY}(t, t') = \mathcal{R}^{[C]}(t, t') \mathcal{C}_{YY}(t', t'), \quad t_0 \leq t' < t \leq T. \quad (19)$$

Теперь обратимся к уравнению (9) для МКФ  $\mathcal{C}_{YY}(t', t)$  ( $t' < t$ ). Принимая во внимание замечание о возможности транспонирования обеих частей векторно-матричного уравнения (19) и перемены местами  $t'$  и  $t$ , получим:

$$\mathcal{C}_{YY}(t', t) = \mathcal{C}_{YY}(t', t') \mathcal{R}^{[C]\top}(t, t'), \quad t_0 \leq t' < t \leq T. \quad (20)$$

Более сложной задачей является вычисление МКФ  $\mathcal{C}_{YY}(t, t)$ , удовлетворяющей уравнению (10) для  $t_0 < t \leq T$ . Причина этого — присутствие  $\mathcal{C}_{YY}(\tau, t)$  и  $\mathcal{C}_{YY}^\top(\tau, t)$  для  $t' < \tau < t$  в подынтегральной функции интеграла в правой части этого уравнения. Поэтому здесь требуется схема, основанная на использовании  $\mathcal{R}^{[C]}(\cdot, \cdot)$  для представления векторного случайного процесса  $\mathbf{Z}(t)$  — решения уравнения (7) в виде:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathcal{R}^{[C]}(t, t') \mathbf{Z}(t') + \int_{t'}^t \mathcal{R}^{[C]}(t, \tau) \mathbb{Q} d\mathbf{W}(\tau), \quad t' < t.$$

Это соотношение позволяет представить матричную функцию ковариаций  $\mathcal{C}_{YY}(t, t)$  для всех  $t_0 \leq t' < t \leq T$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{YY}(t, t) &= \mathcal{R}^{[C]}(t, t') \mathcal{C}_{YY}(t', t') \mathcal{R}^{[C]\top}(t, t') + \\ &+ \int_{t'}^t \int_{t'}^t \mathcal{R}^{[C]}(t, \tau_1) \mathbb{Q} \cdot 2\pi \mathbf{I} \delta(\tau_1 - \tau_2) \cdot \{\mathcal{R}^{[C]}(t, \tau_2) \mathbb{Q}\}^\top d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \mathcal{R}^{[C]}(t, t') \mathcal{C}_{YY}(t', t') \mathcal{R}^{[C]\top}(t, t') + 2\pi \int_{t'}^t \mathcal{R}^{[C]}(t, \tau) \mathbb{Q} \cdot \{\mathcal{R}^{[C]}(t, \tau) \mathbb{Q}\}^\top d\tau. \quad (21) \end{aligned}$$

## 5. Расчётные формулы для первых и вторых моментных функций

Введём временную сетку

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{k-1} < \tau_k < \dots < \tau_N = T,$$

$$h_k = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad \max_k h_k = h_* \ll 1.$$

Далее, полученные выше соотношения (17), (19), (20), (21) для первых и вторых моментных функций в непрерывном времени адаптируются для расчёта этих же функций в узлах сетки:  $\mathbf{m}_{Xk} = \mathbf{m}_X(\tau_k)$ ,  $\mathcal{C}_{YYk\nu} = \mathcal{C}_{YY}(\tau_k, \tau_\nu)$ ,  $k, \nu = 1, 2, \dots, N$ .

Численная аппроксимация ВФМО  $\mathbf{m}_X(t)$ , определяемая равенством (17), для  $t' = \tau_{k-1}$ ,  $t = \tau_k$  может быть записана так:

$$\widehat{\mathbf{m}}_{Xk} = \widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[m]}(\tau_k, \tau_{k-1}) \widehat{\mathbf{m}}_{X,k-1} + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[m]}(\tau_k, \tau) \mathbf{c}(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

$$\widehat{\mathbf{m}}_{X0} = \mathbf{m}_{X^0},$$

где

$$\widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[m]}(\tau_k, \tau) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{\ell!} \left. \frac{\partial^\ell \mathcal{R}^{[m]}(s, \tau)}{\partial s^\ell} \right|_{s=\tau} (\tau_k - \tau)^\ell, \quad \tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k,$$

а для  $\tau = \tau_{k-1}$

$$\widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[m]}(\tau_k, \tau_{k-1}) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{\ell!} \left. \frac{\partial^\ell \mathcal{R}^{[m]}(s, \tau_{k-1})}{\partial s^\ell} \right|_{s=\tau_{k-1}} h_k^\ell.$$

Интеграл в (22) может быть вычислен, например, с помощью правила Симпсона [6] ( $K$  – число интервалов разбиения шага  $h_k$ ).

Подобным образом МКФ, которая для  $t_0 \leq t' < t \leq T$  определяется соотношениями (19), (20), для  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  и  $\nu = k+1, 2, \dots, N$  может быть приближённо рассчитана по формулам

$$\widehat{\mathcal{C}}_{YY\nu k} = \widehat{\mathcal{R}}^{[C]}(\tau_\nu, \tau_{\nu-1}) \widehat{\mathcal{C}}_{YY, \nu-1, k}, \quad \widehat{\mathcal{C}}_{YYk\nu} = \widehat{\mathcal{C}}_{YYk, \nu-1} \mathcal{R}^{[C]\top}(\tau_\nu, \tau_{\nu-1}),$$

в которых

$$\widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_\nu, \tau_{\nu-1}) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{\ell!} \left. \frac{\partial^\ell \mathcal{R}^{[C]}(s, \tau_{\nu-1})}{\partial s^\ell} \right|_{s=\tau_{\nu-1}} h_k^\ell. \quad (23)$$



Наконец, для  $t_0 \leq t' < t \leq T$  матричная функция ковариаций  $\mathcal{C}_{YY}(t, t)$ , которая находится из соотношения (21), для  $k = 1, 2, \dots, N$  приближённо вычисляется по формуле

$$\widehat{\mathcal{C}}_{YYkk} = \widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_k, \tau_{k-1}) \widehat{\mathcal{C}}_{YY,k-1,k-1} \widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[C]\top}(\tau_k, \tau_{k-1}) + 2\pi \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \mathcal{R}_L^{[C]}(\tau_k, \tau) \mathbb{Q} \cdot \{ \mathcal{R}_L^{[C]}(\tau_k, \tau) \mathbb{Q} \}^\top d\tau$$

с учётом начального условия  $\widehat{\mathcal{C}}_{YY00} = \mathcal{C}_{Y_0Y_0}$ , причём

$$\widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_k, \tau) = \mathcal{I} + \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{\ell!} \frac{\partial^\ell \mathcal{R}^{[C]}(s, \tau)}{\partial s^\ell} \Big|_{s=\tau} (\tau_k - \tau)^\ell, \quad \tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k,$$

а матрица  $\widehat{\mathcal{R}}_{[L]}^{[C]}(\tau_k, \tau_{k-1})$  должна быть определена из (23) после замены индекса  $\nu$  на  $k$ .

## 6. Пример

Рассмотрим модельную систему, описываемую системой СИДУ

$$\ddot{\mathcal{X}}_1(t) + 2\alpha_1 [\dot{\mathcal{X}}_1(t) - \dot{\mathcal{X}}_2(t)] + \omega_1^2 [\mathcal{X}_1(t) - \mathcal{X}_2(t)] + b_0(t, \tau) \mathcal{X}_1(t) + \int_0^t b(t, \tau) \mathcal{X}_1(\tau) d\tau = g_0(t) U(t), \quad (24)$$

$$\ddot{\mathcal{X}}_2(t) + 2\alpha_2 [\dot{\mathcal{X}}_2(t) - \dot{\mathcal{X}}_1(t)] + \omega_2^2 [\mathcal{X}_2(t) - \mathcal{X}_1(t)] = g_0(t) U(t), \quad (25)$$

где  $t \in [0, T]$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $\omega_i > 0$  — постоянные ( $i = 1, 2$ ),  $g_0(t)$  — действительная функция, определённая на  $[0, T]$ ,  $\{U(t), t \in [0, T]\}$  — стационарный центрированный гауссов случайный процесс второго порядка, непрерывный в среднем квадратическом,  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , являющийся решением СИДУ

$$dU(t) = -c_U U(t) dt + d_U dW(t) \quad (26)$$

со случайным начальным условием  $U(0) = U^0$ , причём случайная величина  $U^0$  имеет распределение, соответствующее равновесному для  $U(t)$ , т.е. гауссову плотность вероятности с нулевым математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением  $\sigma_{U^0}$ :

$$\sigma_{U^0}^2 = \int_{\mathbb{R}} S_U(\omega) d\omega, \quad S_U(\omega) = \frac{d_U^2}{c_U^2 + \omega^2}, \quad c_U > 0, \quad d_U > 0$$

( $S_U(\omega)$  — спектральная плотность). Далее, структура функций  $b_0(t, \tau)$  и  $b(t, \tau)$  была выбрана в следующей форме:

$$b_0(t, \tau) = \gamma_0 [1 - \mu_1 e^{-\beta_1 (t-\tau)^2} (h_0 + h_1 t + h_2 t^2) - \mu_2 e^{-\beta_2 (t-\tau)^2}], \quad (27)$$

$$b(t, \tau) = \frac{\partial b_0(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad (28)$$

где  $\gamma_0, \mu_i > 0, \beta_i > 0, h_0, h_1, h_2$  — постоянные ( $i = 1, 2$ ).

Сравнивая уравнения модели (24)–(27) с системой (1), (2) и вводя обозначения  $X_1(t) = \mathcal{X}_1(t), X_2(t) = \mathcal{X}_2(t), X_3(t) = \dot{\mathcal{X}}_1(t), X_4(t) = \mathcal{X}_2(t)$ , находим, что  $n = 4, m = 1, \mathbf{c}(t) = \mathbf{0}_4, \mathcal{H} = \{-c_U\}, \mathcal{Q} = \{d_U\}$ ,

$$\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 - b_0(t, t) & \omega_1^2 & -2\alpha_1 & 2\alpha_1 \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2 & 2\alpha_2 & -2\alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(t, \tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b(t, \tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_0(t) \\ g_0(t) \end{bmatrix}.$$

В расчётах использовались следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi, & \omega_2 &= 6\pi, & \alpha_1 &= \xi\omega_1, & \alpha_2 &= \xi\omega_2, & \xi &= 0.01, \\ c_U &= d_U = 0.5/\pi, & h_0 &= 1.0, & h_1 &= 1/6, & h_2 &= -1/144, \\ \gamma_0 &= 100.0, & \mu_1 &= 0.25, & \beta_1 &= 2.0, & \mu_2 &= 0.5, & \beta_2 &= 4.0, \\ g_0(t) &= -\frac{27}{27+t^3}, & T &= 24.0, & h_k &= h_* = 0.001, & L &= 4, & K &= 8, \end{aligned}$$

$$\mathbf{m}_{X^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{X^0 X^0} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Несложно установить, что при выбранных значениях параметров вектор функций математического ожидания  $\mathbf{m}_X(t)$  будет нулевым для любого  $t > 0$ , т.е. не требует расчёта. Кроме того, на этапе подготовки вычислений было решено ограничиться получением компонент матрицы ковариаций  $\mathcal{D}_X(t) = \mathcal{C}_X(t, t)$ , как более информативных и более сложных для определения.

Рассмотренная выше расчётная схема была реализована в виде консольной программы на языке Intel Fortran [1]. Необходимые аналитические выкладки и построение графиков проводились в среде пакета Mathematica [17].

Наиболее интересные переходные режимы, демонстрирующие хаотические колебания в исследуемой системе, показаны на рис. 1–5, причём на рис. 1, 2 приведены кривые, соответствующие дисперсиям выбранных компонент вектора состояния, а на остальных — функции ковариации.

Для проверки адекватности полученного решения задачи вычисления производились с уменьшенными десятикратно шагами сетки, но результаты расчётов, полученные для различных величин шагов, отличались несущественно.

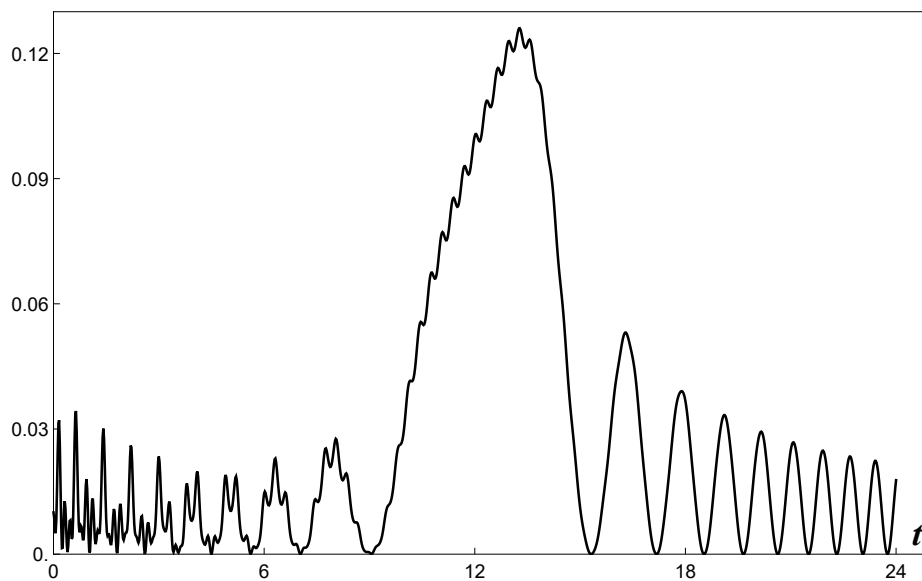


Рис. 1. Функция дисперсии  $X_2(t)$

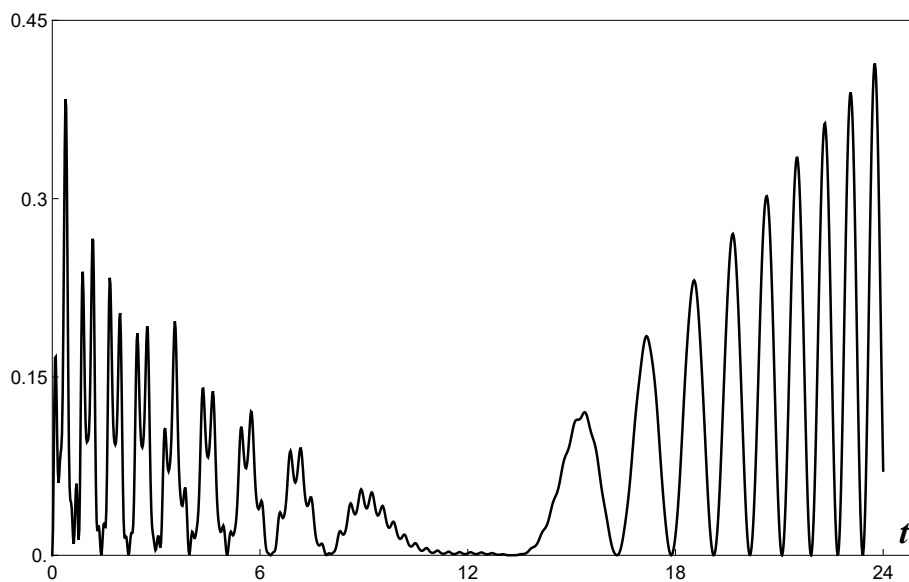
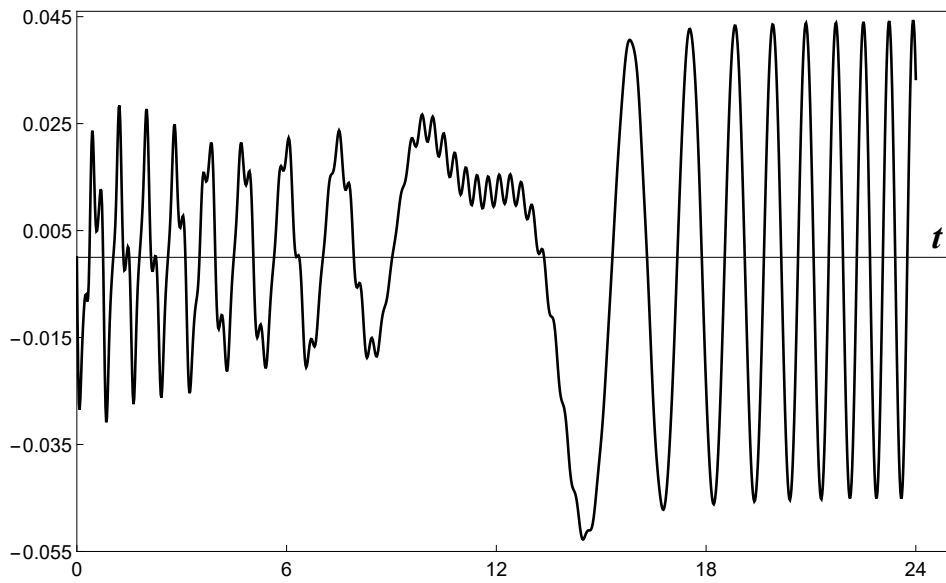
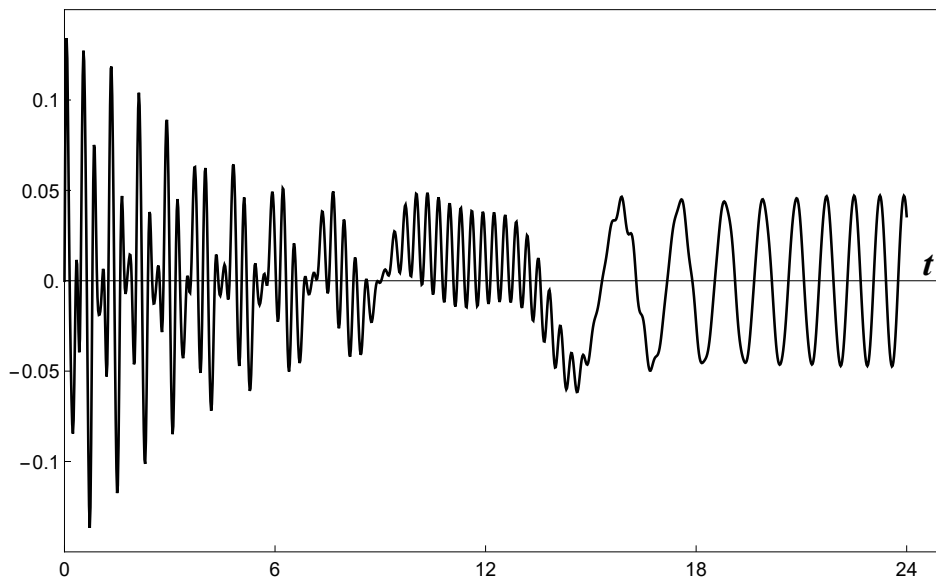
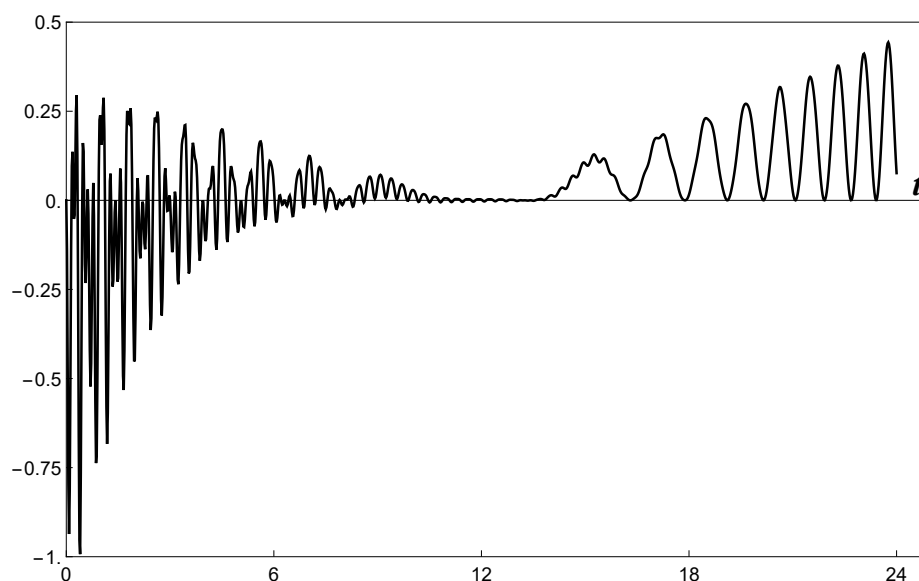


Рис. 2. Функция дисперсии  $X_3(t)$

Рис. 3. Функция ковариации  $C_{13}(t)$ Рис. 4. Функция ковариации  $C_{14}(t)$

Рис. 5. Функция ковариации  $C_{34}(t)$ 

## 7. Заключение

В работе представлена приближённая схема вычисления векторной функции математических ожиданий и матричной ковариационной функции вектора состояния линейной стохастической интегро-дифференциальной системы, основанная на использовании аппроксимации матричной функции Грина. Структура построенных расчётных формул позволяет использовать переменный шаг  $h_k$  с целью поддержания необходимой точности оценивания  $\mathbf{m}_X(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , и  $C_{XX}(t, t')$ ,  $t_0 \leq t' \leq t \leq T$ , а также, при необходимости, применить параллельные вычисления для получения сеточных значений МКФ.

## Благодарности

Благодарю профессора К. Суаза (C. Soize, Университет Париж–Восток в Марн-ла-Валле, Франция) за прототип модели, исследовавшейся в разделе 6. Данная работа была выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-96019), а также Минобразования и науки России (Задание № 2014/153).

## Приложение

Коэффициенты ряда Тейлора для функции Грина при  $L = 4$  имеют вид:

$$\mathcal{R}_1(s, p) = A(s) \mathcal{R}(s, p) + \int_p^s B(s, \tau) \mathcal{R}(\tau, p) d\tau,$$

$$\mathcal{R}_1(p, p) = A(p),$$

$$\mathcal{R}_2(s, p) = [A'(s) + B(s, s)] \mathcal{R}(s, p) + A(s) \frac{\partial \mathcal{R}(s, p)}{\partial s} + \int_p^s B'_s(s, \tau) \mathcal{R}(\tau, p) d\tau,$$

$$\mathcal{R}_2(p, p) = A'(p) + B(p, p) + A(p) \mathcal{R}_1(p, p),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3(s, p) = & [A''(s) + 2B'_s(s, q)|_{q=s} + B'_q(s, q)|_{q=s}] \mathcal{R}(s, p) + \\ & + [2A'(s) + B(s, s)] \frac{\partial \mathcal{R}(s, p)}{\partial s} + A(s) \frac{\partial^2 \mathcal{R}(s, p)}{\partial s^2} + \int_p^s B''_{ss}(s, \tau) \mathcal{R}(\tau, p) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3(p, p) = & A''(p) + 2B'_p(p, q)|_{q=p} + B'_q(p, q)|_{q=p} + \\ & + [2A'(p) + B(p, p)] \mathcal{R}_1(p, p) + A(p) \mathcal{R}_2(p, p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4(s, p) = & [A'''(s) + 3B''_{ss}(s, q)|_{q=s} + 3B''_{sq}(s, q)|_{q=s} + B''_{qq}(s, q)|_{q=s}] \mathcal{R}(s, p) + \\ & + [3A''(s) + 3B'_s(s, q)|_{q=s} + 2B'_q(s, q)|_{q=s}] \frac{\partial \mathcal{R}(s, p)}{\partial s} + [3A'(s) + B(s, s)] \frac{\partial^2 \mathcal{R}(s, p)}{\partial s^2} + \\ & + A(s) \frac{\partial^3 \mathcal{R}(s, p)}{\partial s^3} + \int_p^s B'''_{sss}(s, \tau) \mathcal{R}(\tau, p) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4(p, p) = & A'''(p) + 3B''_{pp}(p, q)|_{q=p} + 3B''_{pq}(p, q)|_{q=p} + B''_{qq}(p, q)|_{q=p} + \\ & + [3A''(p) + 3B'_p(p, q)|_{q=p} + 2B'_q(p, q)|_{q=p}] \mathcal{R}_1(p, p) + \\ & + [3A'(p) + B(p, p)] \mathcal{R}_2(p, p) + A(p) \mathcal{R}_3(p, p). \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алгазин С.Л., Кондратьев В.В. Программирование на Visual Fortran. М. : Диалог-МИФИ, 2008. 472 с.
2. Введение в аэроавтоупругость / С.М. Белоцерковский [и др.]. М. : Наука, 1980. 384 с.
3. Вольterra В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1982. 304 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М. : Мир, 1975. 542 с.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. М. : Наука, 1977. Т. 2. 400 с.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. М. : Наука и техника, 1983. 287 с.

7. Маланин В.В., Полосков И.Е. Случайные процессы в нелинейных динамических системах. Аналитические и численные методы исследования. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 160 с.
8. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М. : Наука, 1980. 536 с.
9. Кхием Н.Т. Нелинейные колебания вязкоупругих пластин под действием стационарных случайных сжимающих сил // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 12. С. 115-118.
10. Полосков И.Е. Об одном методе приближённого анализа линейных стохастических интегро-дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 9. С. 1276–1279.
11. Потапов В.Д. Устойчивость движения стохастической вязкоупругой системы // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 3. С. 137–145.
12. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М. : Наука, 1976. 152 с.
13. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 400 с.
14. Symmetries of integro-differential equations with applications in mechanics and plasma physics / Y.N. Grigoriev [et al.]. Dordrecht, Heidelberg : Springer Science+Business Media, 2010. XIII. 305 p.
15. Hu Sh., Lakshmikantham V. Monotone iterative technique for integro-differential equations // Асимптотические методы математической физики: сб-к научн. трудов. АН УССР, Ин-т математики. Киев : Наукова думка, 1988. С. 263–270.
16. List of computer algebra systems. URL: [en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_computer\\_algebra\\_systems](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems) (дата обращения: 01.08.2016).
17. Mangano S. Mathematica cookbook. Sebastopol (CA) : O'Reilly, 2010. XXIV. 800 p.
18. Mao X. Stochastic differential equations and applications. Oxford : Woodhead Publishing, 2010. 422 p.
19. Mohammed S.E.A. Stochastic functional differential equations. Boston : Pitman, 1984. VI. 245 p.
20. Potapov V.D. Stability of stochastic elastic and viscoelastic systems. Chichester : John Wiley and Sons, 1999. XI. 275 p.
21. Soize C., Poloskov I. Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation // Computers and Math. Appl. 2012. V. 64, N. 11. P. 3594–3612.

**SYMBOLIC & NUMERIC SCHEME OF APPLICATION OF THE MATRIX  
GREEN'S FUNCTION FOR AN ANALYSIS OF LINEAR SYSTEMS  
OF STOCHASTIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**I.E. Poloskov**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor,  
the Head of Higher Mathematics Department, e-mail: polosk@psu.ru

Faculty of Mechanics and Mathematics, Perm State University

**Abstract.** A scheme for analysis of linear dynamical systems described by stochastic integro-differential equations with nondifference kernels is considered. Such equations are mathematical models of a significant number of phenomena in various scientific and technological fields including the theory of oscillations for objects with lumped and distributed parameters taking into account aeroautoelasticity, heredity, (thermo)viscoelasticity and aging of materials (asphalt, concrete, biopolymers, rocks, colloidal solutions, composites, natural and synthetic polymers, suspensions, glass, cellulose, etc.) and others. The calculation scheme proposed is based on a modification of the iterative method for approximation of the matrix Green's function and is designed to compute the first moment functions of the state vector of the system including functions of mathematical expectation and covariance functions. The example shows an application of our scheme for an analysis of a model system with two degrees of freedom.

**Keywords:** stochastic analysis, linear dynamic system, state vector, integro-differential equation, matrix Green's function, moment function.

*Дата поступления в редакцию: 06.09.2016*