

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ

Выпуск 4

УДК 159.9, 513.81, 514.77, 519.1, 519.8, 578.087, 681.14, 930.9

Математические структуры и моделирование: Сб. научн. тр.
/ Под ред. А.К. Гуца. – Омск: Омск. гос. ун-т, 1999. – Вып. 4. –
140 с.

ISBN 5 – 7779 – 0160 – 3

Сборник составлен из статей преподавателей и аспирантов математического факультета Омского государственного университета.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Редакционная коллегия

А.К. Гуц

д-р физ.-мат.наук, профессор

Н.Ф. Жихалкина

аспирант

Адрес научной редакции

Россия, 644077, Омск - 77, пр. Мира, 55 – А,
Омский государственный университет,
математический факультет
Кафедра математического моделирования

E-mail: guts@univer.omsk.su

zihal@univer.omsk.su

Научное издание

**Математические структуры
и
моделирование**

Сборник научных трудов

Редактор Л.М. Кицина

Лицензия ЛР 020380 от 29.01.97.
Подписано в печать 17.12.98.
ОП. Формат 60 × 84 1/8. Печ.л. 17,0. Уч.-изд.л. 15,2.
Тираж 150 экз. Заказ

Издательско-полиграфический отдел ОмГУ
644077, Омск-77, пр. Мира, 55-А

СОДЕРЖАНИЕ

Метафизика

А.К. Гуц. *Модели многовариантной истории* 5

Фундаментальная математика

Е.Б. Гринкевич. *Существование моделей псевдоримановых пространств в синтетической дифференциальной геометрии* 15

А.Л. Евстифеева. *Сравнение алгоритмов одного класса вполне регулярных процессов отсечения* 23

Д.В. Лахин. *Пространства А.Д. Александрова ограниченной сверху кривизны* 34

В.А. Мищенко. *Необходимое условие фасетности гребневых неравенств для многогранника связных $2k$ -факторов* 52

А.Н. Романов. *Хронология и лоренцева функция расстояния* 63

Моделирование

Н.Ф. Жихалкина. *Непрерывные модели и гравитационные аналогии в одной задаче гидравлики* 69

Е.Ю. Мандрикова. *Модель «интеллектуального диапазона» и прогнозирование достижений* 74

Л.В. Молчанова, О.К. Родионова. *Изменение опико-дермального показателя в процессе онтогенеза человека* 81

R. Faizullin, V. Melnikov. *An Approximation for Large-Scale Brain Activity* 89

Преподавание математики

Л.И. Боженкова. *Обучение учащихся векторному и координатно-векторному методу с помощью знаковых моделей* 98

Н.Г. Рыженко, Н.А. Жигачева. *Графовое моделирование структур решений сюжетных задач* 104

М.Н. Конопкина. *Об эмпирическом подходе при изучении геометрического материала в 5-6 классах* 118

М.Н. Конопкина. *Курс наглядно-практической геометрии в 5-6 классах* 127

Н.Г. Русанова. *О формировании вероятностно-статистического мышления у учащихся 5-6 классов* 133

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

В серии сборников публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике и размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества.

Публикуются также статьи по философии и истории математики, по методике преподавания математики.

Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Сборник является реферируемым. Рефераты статей публикуются в журнале "Zentralblatt für Mathematik".

Электронная версия сборника представлена в сети «Интернет» по адресу:

<http://cmm.univer.omsk.su/>

Сборник издается на коммерческие средства кафедры математического моделирования Омского государственного университета.

Кафедра готова к сотрудничеству в издании сборника. Наш E-mail:

cmm@univer.omsk.su

Подробную информацию можно найти на Web-сервере кафедры

<http://cmm.univer.omsk.su>

КАФЕДРЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 10 ЛЕТ

12 июля 1999 года кафедре математического моделирования ОмГУ исполняется 10 лет. Таким образом, этот выпуск сборника – юбилейный.

Сегодня на нашей кафедре работают: В.Н. Берестовский, Е.Е. Вольпер, Г.Л. Горынин, А.К. Гуц, А.И. Задорин, В.Б. Николаев, Н.В. Перцев, Н.Г. Русанова, Р.Ю. Симанчѳв, Р.Т. Файзуллин, Е.И. Федорова, Н.Л. Шаламова.

Аспиранты кафедры: Т.Н. Алешкова, И.А. Грибанова, Е.Б. Гринкевич, Н.Ф. Жихалкина, М.Н. Конопкина, В.В. Коробицин, А.А. Куталев, А.А. Лаптев, Д.В. Лахин, А.Д. Мануйлов, В.А. Мищенко, А.В. Парамонов, А.Н. Романов, Ю.А. Фролова, О.В. Червяков.

Авторы юбилейного выпуска:

А.К. Гуц – профессор кафедры математического моделирования ОмГУ,

Е.Б. Гринкевич – аспирант кафедры математического моделирования ОмГУ,

А.Л. Евстифеева – аспирантка ОмГУПС,

Д.В. Лахин – аспирант кафедры математического моделирования ОмГУ,

В.А. Мищенко – аспирант кафедры математического моделирования ОмГУ,

А.Н. Романов – аспирант кафедры математического моделирования ОмГУ,

Н.Ф. Жихалкина – аспирантка кафедры математического моделирования ОмГУ,

Е.Ю. Мандрикова – студентка 2-го курса отделения психологии экономического факультета ОмГУ,

Л.В. Молчанова – сотрудник Института общей патологии и экологии человека СО РАМИ,

О.К. Родионова – сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

Р.Т. Файзуллин – доцент кафедры математического моделирования ОмГУ,

В.В. Мельников – выпускник кафедры математического моделирования ОмГУ,

Л.И. Боженкова – доцент кафедры методики преподавания математики ОмГПУ,

Н.А. Жигачева – аспирантка кафедры методики преподавания математики ОмГПУ,

Н.Г. Рыженко – доцент кафедры методики преподавания математики ОмГПУ,

М.Н. Конопкина – аспирантка кафедры математического моделирования ОмГУ,

Н.Г. Русанова – ассистент кафедры математического моделирования ОмГУ.

МОДЕЛИ МНОГОВАРИАНТНОЙ ИСТОРИИ

А.К. Гуц

The World History can have different inconsistent variants. The principles of construction of such theory of many-variant history are discussed.

Может ли история как рассказ о прошедшем, например России, существовать не в одном варианте? Другими словами, могут ли существовать два учебника под названием «История России», в которых наше «общее» прошлое XIII-XV вв. описано совершенно различным образом. Под разницей описания понимается не отличие в оценках историками событий, такое встречается повсеместно, а полное отсутствие в одном учебнике того, что пишется в другом, и наоборот. К примеру, в одном учебнике пишется о трехсотлетнем татаро-монгольском иге, нависшем над Русью, а в другом говорится о монголах как о русских воинах, которые на протяжении 100-200 лет вели завоевания в Европе, Сибири и Китае.

Нет, скажут историки, такое невозможно. Почему? Да просто потому, ответят они, что поколения серьезных историков в результате кропотливого и тяжелого труда по крупице собрали воедино именно ту картину прошедшего русского народа, которую мы все читаем в школьных и вузовских учебниках. Понятно?

Признаюсь – да, понятно, но не очень. Все крупинки-то собрали? Не теряли чего-нибудь в пути? Не отбрасывали, не отбраковывали непонравившиеся крупинки? Теряли, отбрасывали... А почему собирали в одну кучу, а не в две или три разных? Откуда такое стремление? Может, Вселенная устроена сложнее, и следовало трудиться на несколько «куч»? Тогда можно было бы пристроить и непонравившиеся крупинки. Конечно, это вело бы к разным, и подчас взаимоисключающим картинам прошлого. У России возникли бы разные истории, ничего или почти ничего не имеющие общего рассказы о ее прошлом. «Общее» прошедшее рассыпалось бы на «частные» непохожие «прошлые».

«Такого быть не может!» – естественный крик души, привыкшей к порядку и покою. Но стоит ли пугаться прошлого, существующего в множестве различных и противоречивых вариантах? Не теряем ли мы чего-то очень важного, идя по трудному пути познания мира, не видя многовариантности истории?

© 1999 А.К. Гуц

E-mail: guts@univer.omsk.su

Омский государственный университет

1. Законы времени

«Основным вопросом, основной посылкой всякой философии истории является, несомненно, вопрос о значении времени, о природе времени, потому что история есть процесс во времени... Имеет ли время метафизическое значение? Связано ли с временем что-то существенное, идущее до глубочайшего ядра бытия, или время есть лишь форма и условие для мира явлений, для мира феноменального? Связано ли оно с подлинным бытием, или время только феноменологично, связано только с явлением и не распространяется на внутреннюю сущность бытия, на внутреннее его ядро?» (Н.Бердяев, [1, с.50]).

Нельзя познать сущности истории, не поняв природы времени. «Что же такое время? Если никто меня об этом не спрашивает, я знаю, что такое время; если бы я захотел объяснить спрашивающему – нет, не знаю» (Блаженный Августин [2, с.327]). Не поэтому ли нет книг по истории, которые начинались бы с рассказа о том, что такое время, каковы его законы, и как в силу этих законов раскрывается перед нами прошлое. Знание законов времени, его сущности позволяет правильнее представить себе прошедшее, т.е. историю. Историки больше доверяли своему осознанию времени, доверяли описаниям своих предшественников, которые строили свои рассказы о прошедшем, т.е. писали свои истории, также на основе своего индивидуального сознания времени. Но этого мало. О свойствах времени, не вписывающихся в рамки индивидуального человеческого сознания, много чего в XX веке узнали, к примеру, физики. Не может быть серьезной исторической науки, пытающейся познать историю, без опоры на новые знания, касающиеся природы времени.

Познание свойств Времени может происходить не только посредством философии и физики. Если внимательно читать книги по истории, то можно сформулировать некоторые утверждения, которые назовем законами Времени [3, 4]. Укажем некоторые из них.

Закон о неопределенности описания. *Чем меньше отрезок времени исследуемого исторического события, тем больше подробностей, отнюдь не обязанных быть непротиворечивыми.*

Или символически:

$$\Delta D \Delta t \geq c_1,$$

где ΔD – историческая неопределенность, т.е. число расхождений в описании исторического события, занимающего временной отрезок Δt ; число противоречивых деталей, касающихся исторического действия, приходящегося на временной отрезок Δt , c_1 – некоторая константа.

Этот закон является основой для построения многовариантной истории, ведь он означает, что число противоречивых фактов нарастает по мере того, как мы пытаемся более глубоко изучить конкретную историческую эпоху. При чем ситуация тем хуже, чем меньший отрезок времени занимает эта эпоха.

Закон о неопределенности исторического описания действует только при

условии выполнения закона – закона о взаимодействии эпох.

Закон о взаимодействии эпох. *Историческая неопределенность тем больше, чем дальше во времени отстоит исследуемая эпоха от современной.*

Символически этот закон записывается в виде

$$\Delta D \leq c_2 \Delta \tau,$$

где $\Delta \tau$ – интервал времени между современной и исследуемой эпохами, c_2 – некоторая константа.

Новый закон означает, что для восстановления событий на некотором малом времени необходимо, чтобы интересующая эпоха была не слишком близкой к текущей. Таким образом, остаются сложности при расследовании преступлений с большим сроком давности; чем более древним является преступление, тем больше разночтений и меньше шансов докопаться до истины. Впрочем, в законодательствах многих стран это учитывается: за давние проступки не наказывают. Из закона о взаимодействии эпох следует: надеяться на потомков, что они докопаются когда-нибудь до истины, не приходится.

О чем говорят сформулированные законы времени? Они говорят о невозможности восстановления Прошлого. Исследователь может разрабатывать лишь вариант Всемирной истории, но каким бы ни был этот вариант, этот рассказ о Прошедшем, логичным и каузально стройным, он не является достоверным, коль речь заходит о достаточно отдаленных от нашего времени эпохах. Возможны и другие варианты Всемирной истории; их «нереальность», «надуманность» в большой мере определяется закономерностями социальной психологии и индивидуальной психики исследователей, пишущих учебники по истории.

2. Модели

Вариант истории России подобен книге, у которой начиная с некоторой страницы все листы чистые, – это будущее. В чистые листы вписывается новейшая история. В такой книге-варианте начало растрепалось, развалилось, часть листов потеряно, часть обгрызли мыши, а многие заимствованы из других книг-вариантов. С течением времени, по мере вписывания текста в чистые листы, катастрофическое состояние начала книги прогрессирует и захватывает все новые и новые разделы, продвигаясь по страницам вперед... Реальность книги-варианта связана с тем, что ее новейшая часть – это «сегодня» Наблюдателя, которому дано его осознать: «сегодня» других книг-вариантов он не видит, но может познавать прошлое не только своей книги-варианта, но и соседних ... Прошлое «чужих» книг-вариантов становится для Наблюдателя столь же реальным, как и свое собственное (рис.1)! Попытки реставрации книги без учета

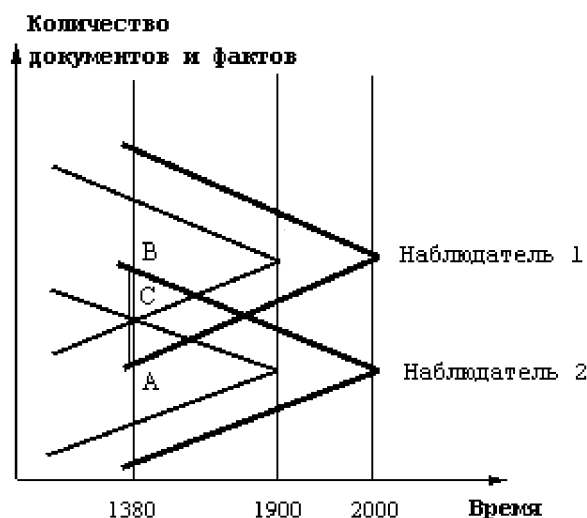


Рис. 1

«Конусы» наблюдаемости прошлого Наблюдателями. Рост количества «общих» фактов по 1380 г. в двух разных вариантах, доступных соответственно Наблюдателю 1 и Наблюдателю 2. В 1900 г. общим является факт C , но уже в 2000 г. «общими» будут факты, лежащие на отрезке $[A, B]$. Факты отрезка $[A, B]$ Наблюдатель 1 может включать их в свою книгу-вариант, хотя они достояние книги-варианта Наблюдателя 2

существования других книг-вариантов (а это и есть традиционный в исторической науке путь создания учебника древней истории, соответствующего данной книге-варианту) ни к чему хорошему не приводит. Реставратор пытается упорядочить, следуя «логике событий», перепутанные листы, судорожно ищет пропавшие, воспринимает как принадлежащие изначально данной книге влетевшие в нее отдельные «чужие» листы и т.д. Вера в существование уникальной книги-варианта приведет автора учебника к тому, что он, сам того не желая, начнет пропускать неудобные листы, т.е. не вписывающиеся в его логическую и каузальную картину «Васемирной истории», а из удобных составлять текст учебника. По сути дела, это уже больше походит на подгонку под заготовленную схему, чем на научное изыскание. Незнание законов времени загоняет автора учебника – исследователя-историка – в тупик. В результате всем нам предлагается не история народа, а ее мифологизированный вариант.

Кто такие Наблюдатели, о которых говорилось выше? В какой-то мере это историческое сознание общества, которое настроено на вполне определенное восприятие истории, установившееся в течение длительного воспитания и официальной системы образования, в которых участвуют государство и историки.

Но, думается, смысл вводимых здесь понятий «наблюдатель», «наблюдение» и «реальность книги-варианта» более глубокий и вместе с этим менее всего объяснимый на сегодняшнем этапе развития теории многовариантной истории. Возникли перечисленные понятия в силу того, что хочется как-то растолковать себе и другим те законы времени, которые необходимо учитывать при

воссозданию картины Прошлого. Сами эти законы времени были сформулированы выше. Они результат голой эмпирии, отражение проблем, возникающих перед историками, бьющимися над загадками прошлого. Можно много чего нафантазировать, пытаюсь понять подоплеку этих законов, но не менее важно сдержаться себя, не поддавшись соблазну построения гипотез, в которых нет острой необходимости.

Многие задачи, требующие привлечения современных знаний о времени, решаются на основе многомерных теорий пространства-времени. Поэтому можно поискать геометрическую модель, которая отражает ситуацию с многовариантностью истории, описанную выше и проиллюстрированную с помощью рис.1. Прибегнем к пятимерной теории лоренцевых многообразий. Представим, что наша Вселенная, наше пространство-время – слой в слоении пятимерного многообразия, которое назовем Гиперпространством, полученного из слоения двумерного кольца, изображенного на рис.2, умножением на \mathbb{R}^3 .

Наша Вселенная и мы, как ее Наблюдатели, не единственны в этой математической теории Времени. В Гиперпространстве есть и «другие» миры. Они переплетены с нашим, причем наш мир соприкасается с «чужим» миром, и наше Прошлое и прошлое «чужого» мира сближаются тем сильнее, чем дальше от Настоящего отстоят прошлые эпохи. На рис. 2 показано, как это может происходить. Внутри кольца, которое изображает Гиперпространство, изогнутые

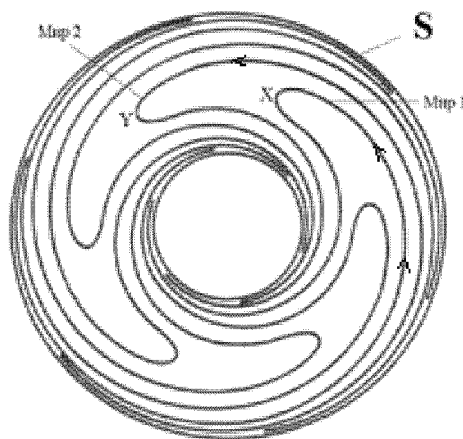


Рис. 2

Модель Гиперпространства с взаимодействующими прошлыми книг-вариантов истории

линии – это Вселенные, каждая со своим Наблюдателем. Одна линия – это наш четырехмерный Мир 1, мы – Наблюдатель 1. Рядом – четырехмерный Мир 2, ему отвечает Наблюдатель 2. Наше настоящее – точка X , настоящее Мира 2 – точка Y . Если мы отправимся в Прошлое в струе своего времени, то будем двигаться по нашему Миру 1 против стрелки по линии 1, накручиваясь все более и более на окружность S . Аналогично уход в прошлое в Мире 2, линии 2 – это

движение по линии 2 против стрелки с подобным же накручиванием на окружность S . Прошлые двух миров, накручиваясь на окружность S , сближаются! Что при этом может происходить?

Для ответа на этот вопрос воспользуемся геометродинамическими идеями Дж. Уилера, разработанными им при создании квантовой теории гравитации. Амплитуду вероятности перехода от Мира 1 к Миру 2 представим с помощью фейнмановского интеграла по 5-мерным гиперпространствам:

$$\langle M_{up1} | M_{up2} \rangle = \int_{M_{up1}}^{M_{up2}} \mathcal{D}q \exp \left[-\frac{iS}{\hbar} \right], \quad (1)$$

где

$$S = \frac{c^3}{8\pi G\alpha} \int R^{(5)} \sqrt{-g} d^5x \quad (2)$$

– действие в пятимерной лоренцевой геометрии с метрикой g_{AB} , причем α – константа с размерностью [см], связанная с 5-м измерением (например, она характеризует цикличность по пятому измерению в теории Калуцы-Клейна). Из (1), (2) видно [10, с.335-336], что (1) не меняется при флуктуации 5-мерной геометрии g_{AB} ($A, B = 1, \dots, 5$):

$$\Delta g \sim \frac{L^*}{L} \sqrt{\frac{\alpha}{L_0}}, \quad (3)$$

где $L^* \sim 10^{-33}$ см – постоянная Планка, а $L^4 \times L_0$ – характерный размер 5-мерной области.

Формула (3) означает, что как только прошлые Миров 1 и 2 сближаются «достаточно близко», флуктуации метрики начнут менять топологию и геометрию Миров 1 и 2; они начнут склеиваться с помощью кротовых нор – появятся туннельные переходы между мирами. Это означает, что на микроуровне прошлые этих двух миров неразделимы. В действительности взаимодействие на микроуровне может иметь последствия и на макроуровне. Так «приклеивание» ручки к области с сильным гравитационным полем приводит к тепловому космическому излучению. Но это далеко не все последствия «вспенивания» геометрии и топологии на микроуровне.

Иначе говоря, прошлые «разных» миров взаимодействуют! Прошлое становится общим.

Рис. 2 есть ничто иное как попытка формализовать то, что было изображено было на рис.1. Мы писали выше слова «чужой», «разные» в кавычках, имея в виду то, что не такие уж они чужие и разные. Мир 1 – это книга-вариант Всемирной истории 1, Мир 2 – книга-вариант Всемирной истории 2. Возможно, что «разные» миры – суть разные физические состояния нашей Вселенной. Возможно... Гипотез, подражая Ньютону, не строим.

Обращение к математической теории пространства-времени, которая предстала перед нами в виде рис.2, – это обращение к моделям Времени. Эти модели сложны, их точное описание требует привлечения самой современной математики. Следовательно, от читателя, для того, чтобы воспринять эти модели и

понять сущность отраженных в них свойств Времени, требуется знание изощренной математики конца XX века. Одной из сторон современных геометрических моделей пространства-времени, с момента появления самого термина «пространство-время» в революционной статье Германа Минковского в 1908 году, является открытие факта *абсолютности* Мира событий, когда Прошлое, Настоящее и Будущее присутствуют в модели-геометрии на равных условиях, как неразрывные части единой геометрической «формы», такой как, например, «форма», представленная на рис.2. Точки Мира 1 – не что иное как исторические события, которые были, есть и будут, но мы их видим сразу все вместе. Поэтому на вопрос Блаженного Августина «Как могут быть эти два времени, прошлое и будущее, когда прошлого уже нет, а будущего еще нет?» можно ответить просто: «Могут быть, поскольку, как показывают модель на рис.2, и прошлое есть, и будущее есть, и они лежат рядом с настоящим». Таким образом, меняется видение Прошлого, а следовательно, и рассказ о нем, т.е. история. Другими словами, меняется видение Всемирной истории. Многомерные теории пространства-времени заставляют нас говорить о многовариантности истории.

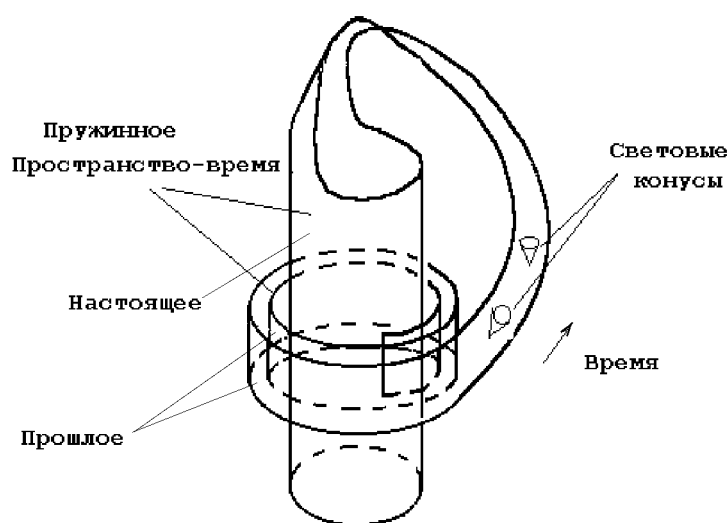


Рис. 3

Модель пространства-времени, в котором Прошлое «наматывается» на Настоящее в Гиперпространстве. С Настоящим «взаимодействуют» лишь строго определенные эпохи Прошлого

Представим еще одну модель пространства-времени (рис.3). В этой модели прошлое «наматывается» в Гиперпространстве на настоящее; чем более далеким является прошлое, тем ближе оно к нашему Настоящему. Серия прошлых эпох приближена к настоящему «достаточно близко». Следовательно, они взаимодействуют с Настоящим. Это привилегированные эпохи Прошлого.

Так что же такое вариант истории? Пусть \mathcal{V} – совокупность всех исторических *событий*, которые были, есть и будут во Всемирной истории. Обозначим

через \mathcal{I} множество всех источников. Между историческими событиями и источниками существуют некоторые вполне определенные отношения. Источники с точки зрения историка подтверждают «реальность», возможность события. Не исключается включение историками в учебник истории событий, не подкрепленных надежными источниками, и напротив, могут существовать источники, не связанные с конкретными историческими событиями (это источники, которым «не найдено объяснений»).

От одного события к другому событию историк прокладывает цепочки правдоподобных рассуждений, следуя, как он выражается, логике событий. Эти цепочки могут включать и другие события. Главным здесь является «железная логика» исследователя и опора на причинно-следственные связи между событиями (неважно, являются ли эти связи реальными или гипотетическими). Таким образом, необходимо ввести в рассмотрение совокупность всех таких причинных цепочек \mathcal{C} .

Наконец, существует такое понятие, как датировка событий. Математически это означает наличие отображения из множества событий на вещественную прямую \mathbb{R} . Существует ли универсальная хронология, т.е. отображение $d : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что в причинных цепочках события-причины имеют более ранние даты, чем события-следствия, – вопрос интересный, но, по всей видимости, ответ на него должен быть отрицательным.

Набор $\langle \mathcal{V}, \mathcal{I}, \mathcal{C}, d \rangle$ – это универсальная всеобъемлющая «Божественная История».

Вариант Всемирной истории – это четверка $\langle \mathcal{V}_0, \mathcal{I}_0, \mathcal{C}_0, d_0 \rangle$, где $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$, $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$, т.е. подмножества соответствующих универсальных множеств, а $d_0 : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ – хронология событий, т.е. некоторый способ датирования событий. Следовательно, вариант истории строится за счет отбора событий, источников и причинных цепочек, которые рассматриваются как единое целое. *Полный* вариант истории должен восприниматься как вполне возможная картина человеческой истории, сколь бы необычной она не показалась. При привлечении геометрических моделей для множества событий \mathcal{V}_0 подбирается конкретная четырехмерная или многомерная псевдориманова геометрия.

Главное требование к варианту истории – его внутренняя непротиворечивость. В рамках варианта историк не должен приходить к таким противоречиям, которые заставляют усомниться в праве самого варианта на существование как предмета исследования исторической науки. Мелкие, локальные противоречия внутри варианта истории возможны. Их устранение или попытки устранения связаны с разработками различных *версий* событий. Вариант истории совместим с существованием множества версий. При этом одни причинные цепочки заменяются другими.

Можно определить понятие изоморфности вариантов истории. Очевидно, что особый интерес представляет доказательство существования полных неизоморфных вариантов Всемирной истории.

3. Возможна ли многовариантная история?

Возникает мысль об искусственности предположения о существовании различных вариантов истории России. Лезвие Оккама – не умножай сущностей сверх необходимого – беспощадно отсекает такого рода умопостроения. Данный принцип сыграл весомую роль в развитии естественных наук: усилия исследователей не отвлекались на боковые пути – теория и практика уверенно продвигались по генеральной магистрали.

Но в XX веке естественные науки, и в первую очередь физика, стали развиваться пренебрегая предупреждением Оккама. Наука стало более расточительно расходовать свои силы. Особую силу приобрело развитие альтернативных теорий. Физика стала допускать разные варианты при построении теорий, касающихся строения окружающего мира. Более того, при развитии квантовой теории сама Вселенная стала мыслиться в многочисленных вариантах, каждому из которых соответствует свой собственный Наблюдатель. Речь идет о так называемой «many-worlds» трактовке квантовой механики, предложенной Эвереттом в 1956 году [6]. Можно заявить, что в данном случае предметом исследования является микромир, тогда как историческая наука имеет дело с макромиром. Другими словами, упражнения физиков с многовариантностью микромира не должны проецироваться на человеческую историю. Может, оно и так, но космологи, изучающие строение Вселенной, т.е. мира звезд и галактик, не пренебрегают после того как появилась релятивистская космология Эйнштейна разбором самых различных, подчас взаимоисключающих друг друга по многим параметрам, моделей Вселенной. Многовариантность допускается на уровне космических масштабов!

Должна ли этому следовать историческая наука? Нет ли аргументов в пользу существования альтернативного варианта истории России или какого-либо другого государства?

Такие аргументы нашел математик А.Т.Фоменко [7]. Он, используя математико-статистические методы, обнаружил необъяснимые в рамках традиционной исторической науки дубликаты в древней и средневековой истории европейских народов. Большие фрагменты истории разных народов, разнесенные по временной шкале на сотни лет, оказывались написанными под копирку. Разница была лишь в именах, географических названиях, а ход событий, их интенсивность и качественные характеристики оказались идентичными. Нет, например, существенных различий в описании истории императоров Византии и германских императоров Священной Римской Империи. Всемирная история – результат произведенного трижды смещения в прошлое одного большого фрагмента. Разнесенные во времени куски занимают отрезок времени от 1500 г. до н. э. до 1400 г. н.э.! Попытка разъяснить обнаруженные странности во Всемирной истории часто изрекаемой историками фразой «История любит повторяться!» не спасает положения: мелкие тысячекратные повторы в узоре не обязаны складываться в три-четыре идентичных куска одной скатерти.

А.Т.Фоменко предложил для объяснения своего открытия радикальный выход: подлинным является только один фрагмент, начало которого 300 г. н. э.,

все прочие – фантомы, дубликаты, результат ошибочной датировки и прочтения документов, совершенной Скалигером и Петавиусом в XVI-XVII вв. – создателями современной хронологии исторических событий. По существу, А.Т.Фоменко явился создателем первого нового варианта Всемирной истории. Новый вариант истории России задолго до него предлагал Н.А.Морозов [8], предложивший рассматривать татаро-монгольское нашествие как завоевание Руси рыцарями-крестоносцами, принадлежащими к Татрскому ордену (отсюда и название «татары» = «тартары» = «татртары»). Свой вариант истории Древнего Египта предлагал Иммануил Великовский, перенося фараона Рамзеса II по временной шкале на семьсот лет [9].

Как видим, варианты существуют! Другое дело, что их авторы считают, что они должны заменить традиционный вариант Всемирной истории или истории конкретного народа, на том основании, что он является истинным, а старый, традиционный вариант ошибочен. Если это так, то история по-прежнему остается одновариантной! Многовариантность истории, как объективно существующая форма эволюции или существования общества, даже не мыслится. Нам же кажется, что разные варианты прошлого объективно существуют, равноправны, и на это указывает само развитие исторической науки, которая постоянно наталкивается на взаимоисключающие факты, касающиеся одной и той же эпохи и пытающаяся разъяснить это, ссылаясь на пресловутый субъективизм исследователя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бердяев Н.А. *Смысл истории*. М.: Мысль, 1990.
2. Блаженный Августин. *Исповедь*. М.: Гендальф, 1992.
3. Гуц А.К. *Миф о восстановлении исторической правды // Математические структуры и моделирование / ОмГУ. 1998. Вып.1. с.4-12.*
4. Гуц А.К. *Подлинная история России*. Омск: ОмГУ, 1999.
5. Гуц А.К. *Стохастическая эволюция топологии и геометрии пространства-времени и 6-мерная теория гравитации // Известия вузов. Физика. 1995. N 8. С.59-62.*
6. Everett ,III, Hugh *«Relative State» Formulation of Quantum Mechanics // Reviews of Modern Physics. 1957. V. 29. No. 3. P.454-462.*
7. Фоменко А.Т. *Глобальная хронология*. М.: Изд-во МГУ, 1993.
8. Валянский С.И., Калужный Д.В. *Новая хронология земных цивилизаций. Современная версия истории*. М.: АСТ «Олимп», 1996.
9. Великовский И. *Рамзес II и его время*. Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.
10. Уилер Дж. *Гравитация, нейтрино и Вселенная*. М.: ИЛ, 1962.

СУЩЕСТВОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ В СИНТЕТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Е.Б. Гринкевич

In this article the theorem which states the existences of models of pseudo-Riemann spaces in the context of the Synthetic Differential Geometry (SDG) is proving.

Цель данной работы – показать существование моделей псевдоримановых пространств и преобразований, сохраняющих метрику в рамках синтетической дифференциальной геометрии (SDG), теории, развитой в работах А. Кока. Доказательство существования моделей основывается на существовании полного и точного функтора из категории гладких многообразий в категории, в которых реализуется SDG.

В последней части работы в качестве примера рассматривается пространство специальной теории относительности в SDG.

Синтетическая дифференциальная геометрия реализуется в категориях отличных от категории множеств. Под R мы будем понимать локальное кольцо в такой категории, удовлетворяющее аксиоме Кока-Ловера; под объектом D - подобъект инфинитезималов первого порядка в R , т.е. подобъект, определяемый формулой

$$D = \{x \in R \mid x^2 = 0\}.$$

Для произвольного объекта M пространство касательных векторов TM в SDG – это объект M^D , т.е. пространство отображений из объекта D в объект M . Как показано, в [1] в случае, когда M инфинитезимально линейно, каждый слой расслоения $\pi : M^D \rightarrow M$ является R -модулем, т.е. определены функции сложения $+$: $TM \times_M TM \rightarrow TM$ и умножения на число \cdot : $R \times TM \rightarrow TM$.

© 1999 **Е.Б. Гринкевич**

E-mail: psemail@fbc.omsk.net.ru

Омский государственный университет

1. Понятие псевдориманова пространства в SDG

Определение псевдориманова пространства в рамках SDG можно найти в ряде работ (см. [3],[4]).

Мы дадим определение псевдориманового пространства, записав классическое определение на логическом языке категории. Возможность такого подхода обоснована в [1]. Такой подход позволит нам сравнить данное нами в SDG определение с классическим в категории гладких многообразий.

Хотелось бы отметить, что существует отличный подход к определению псевдоримановой метрики в SDG. В своей работе[3] А. Кок даёт определение метрики в рамках SDG, используя понятие инфинитезимальных 1- и 2- окрестностей диагонали и не используя понятие касательного вектора.

Введём следующее определение.

Определение 1. Пусть M – инфинитезимально линейный объект, тогда псевдоримановой метрикой на M будем называть отображение $g : TM \times_M TM \rightarrow R$ такое, что выполнены следующие условия:

1. $g(u, v) = g(v, u)$ - симметричность
2. $g(u_1 + u_2, v) = g(u_1, v) + g(u_2, v)$ - линейность
3. $g(\alpha \cdot u, v) = \alpha \cdot g(u, v)$ - аддитивность
4. $\forall v \in TM \ g(u, v) = 0 \Rightarrow u = 0$ - невырожденность

Как мы видим, это классическое определение, данное на логическом языке категории.

Определим также понятие преобразования касательного пространства, сохраняющего псевдориманову метрику.

Дадим следующее определение.

Определение 2. Будем говорить, что преобразование касательного пространства

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{h} & TM \\
 & \searrow \pi & \swarrow \pi \\
 & & M
 \end{array}$$

сохраняет псевдориманову метрику g , если выполнено следующее условие:

$$g(u, v) = g(h(u), h(v)).$$

2. Существование моделей

Доказательство существования моделей введённых выше определений основывается на свойствах хорошо адаптированных моделей SDG. Понятие хорошо адаптированной модели дано в книге А. Кока [1]. Эти модели реализуются в категориях \mathcal{E} , являющихся топосами Гротендика над категориями C^∞ -колец. Базисными свойствами этих моделей является существование функтора из категории Mf гладких многообразий в топос \mathcal{E} , удовлетворяющего ряду аксиом стабильности. Наличие этих аксиом позволяет сравнивать свойства классических гладких многообразий со свойствами объектов топоса \mathcal{E} .

Пусть Mf обозначает категорию гладких многообразий и гладких отображений между ними, где под многообразием мы понимаем C^∞ -гладкое, хаусдорфово многообразие со счётной базой.

Далее, \mathcal{E} – декартово замкнутая категория, в которой существуют все конечные пределы диаграмм, являющаяся моделью SDG.

Обозначим через $i : Mf \rightarrow \mathcal{E}$ полный и точный функтор из категории гладких многообразий в категорию \mathcal{E} .

Приведём здесь некоторые утверждения, доказанные в [1],[4] и касающиеся свойств функтора i .

Предложение 1. *Объект R есть образ множества вещественных чисел \mathbb{R} (с естественной структурой гладкого многообразия) под действием функтора i , т.е.*

$$R = i(\mathbb{R}).$$

■

Предложение 2. *Объект $InvR$ обратимых элементов в R есть образ множества обратимых (ненулевых) вещественных чисел под действием функтора i , т.е.*

$$InvR = i(Inv\mathbb{R}).$$

■

Предложение 3. *Функтор $i : Mf \rightarrow \mathcal{E}$ коммутрует с операцией образования касательного расслоения, т.е. существует изоморфизм*

$$i(TM) \xrightarrow{\cong} T(i(M)) (= i(M)^D),$$

где TM – классическое касательное расслоение гладкого многообразия M . ■

Предложение 4. *Для любого $M \in Mf$, $i(M)$ является инфинитезимально линейным пространством и отображения*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times TM & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & TM \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 TM \times_M TM & \xrightarrow{+} & TM \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & M &
 \end{array}$$

переводятся с помощью i в структуру векторного пространства касательного расслоения, полученную канонически из инфинитезимальной линейности $i(M)$. ■

Доказательство существования моделей для определений 1, 2 будет основано на том, что функтор i сохраняет структуру псевдоримановой метрики для объектов вида $i(M)$, где M – гладкое псевдориманово многообразие в Mf .

Рассмотрим гладкое многообразие M с гладкой псевдоримановой метрикой g . В силу определения, g удовлетворяет условиям симметричности, аддитивности, однородности и невырожденности.

2.1. Симметричность, аддитивность и однородность

Условия симметричности, аддитивности и однородности можно записать в Mf с помощью коммутативности следующих диаграмм:

Симметричность

$$\begin{array}{ccc}
 TM \times_M TM & \xrightarrow{twist} & TM \times_M TM \\
 & \searrow g & \swarrow g \\
 & \mathbb{R} &
 \end{array}$$

где $twist(u, v) = (v, u)$.

Аддитивность

$$\begin{array}{ccc}
 TM \times_M TM \times_M TM & \xrightarrow{\langle + \circ \pi_{12}, \pi_3 \rangle} & TM \times_M TM \\
 \downarrow \langle g \circ \pi_{12}, g \circ \pi_{23} \rangle & & \downarrow g \\
 \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{+} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

где $\pi_{i,j}$ - проекции на соответствующие координаты.

Однородность

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} \times TM \times_M TM & \xrightarrow{\langle \pi_1, g \circ \pi_{23} \rangle} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\
 \downarrow \langle \alpha \cdot \circ \pi_{12}, \pi_3 \rangle & & \downarrow \times \\
 TM \times_M TM & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

По определению функтор сохраняет коммутативность диаграмм.

Учитывая то, что функтор i сохраняет векторную структуру, а также то, что метрика g гладкое отображение, т.е. является стрелкой категории Mf , мы можем утверждать, что верно следующее

Предложение 5. *Образ метрики g под действием функтора i*

$$i(g) : Ti(M) \times_{i(M)} Ti(M) \rightarrow R$$

удовлетворяет условиям симметричности, аддитивности и однородности метрики g из определения 1. ■

2.2. Невырожденность

Запишем ещё раз условие невырожденности метрики:

$$\forall v \in TM \quad g(u, v) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

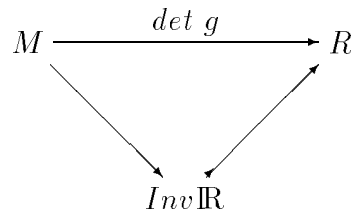
Записать это условие в виде коммутативности соответствующей диаграммы сложно, так как в записи этой формулы используется функтор \forall .

Эквивалентное утверждение о невырожденности метрики состоит в том, что определитель матрицы $g_x = \{g_{ij}\}$ скалярных произведений базисных векторов в каждой точке x многообразия M не равен нулю. Известно, что определитель $\det g_x$ скаляр, т.е. не зависит от выбора координат.

Таким образом, на M определена скалярная функция $\det g : M \rightarrow \mathbb{R}$, ставящая в соответствие каждой точке x многообразия M значение определителя $\det g_x$ в этой точке.

Рассматриваемая нами метрика $g \in C^\infty$, т.е. все функции $g_{ij} \in C^\infty$. Тогда функция $\det g$ также гладкая, так она является по определению конечной суммой произведений гладких функций g_{ij} . Таким образом, $\det g$ – стрелка категории Mf .

В силу невырожденности метрики определитель не равен нулю, а следовательно обратим. Таким образом, функция $\det g$ пропускается через подмножество обратимых вещественных чисел в категории Mf , т.е. коммутативна следующая диаграмма:



Каждый из объектов этой диаграммы сохраняется под действием функтора i .

Очевидно, что выполняется равенство $i(\det g) = \det i(g)$, так как определитель есть композиция операций умножения и сложения вещественных чисел, а эти операции сохраняются под действием функтора i [1]. Таким образом, мы получаем

Предложение 6. *Образ метрики g под действием функтора i*

$$i(g) : Ti(M) \times_{i(M)} Ti(M) \rightarrow R$$

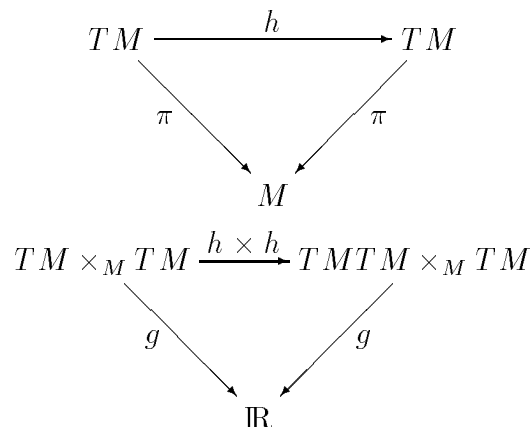
удовлетворяет условию невырожденности Определения 1. ■

Основываясь на Предложениях, доказанных выше, можем утверждать, что верна следующая

Теорема 1. *В хорошо адаптированных моделях синтетической дифференциальной геометрии существуют объекты вида $i(M)$, где M – гладкое псевдоримановое многообразие, с определённой на них псевдоримановой метрикой вида $i(g)$, удовлетворяющей Определению 1.* ■

2.3. Преобразования, сохраняющие метрику

Утверждение о том, что преобразование $h : TM \rightarrow TM$ сохраняет метрику, эквивалентно коммутативности следующих диаграмм:



Сами преобразования очевидно гладкие функции, так как над каждой точкой являются линейными преобразованиями.

Функтор i сохраняет коммутативность этих диаграмм, а следовательно, мы получаем

Предложение 3. Образ преобразования h , сохраняющего метрику в Mf под действием функтора i

$$i(h) : Ti(M) \rightarrow Ti(M)$$

сохраняет метрику $i(g)$. ■

2.4. Пространство СТО в SDG

Рассмотрим классическое пространство специальной теории относительности \mathbb{R}^4 с метрикой g , определённой следующей формулой:

$$g(x, y) = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^3 x^i y^i.$$

Очевидно, что определённая таким образом метрика $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкое отображение, и, как следует из Теоремы 1, она сохранится под действием функтора i .

Как следует из [1], $i(\mathbb{R}^4) = R^4$. В силу того, что в координатах метрика g записывается как композиция арифметических операций вещественных чисел, сохраняемых под действием функтора i , $i(g)$ сохранит свой внешний вид, а следовательно, и сигнатуру. Таким образом, мы получаем пространство R^4 с введённой на нём псевдоримановой метрикой типа (1,3). Таким образом, мы можем говорить, что в SDG определено пространство специальной теории относительности (пространство Минковского $R_{1,3}^4$). Будем обозначать метрику той же буквой g .

Рассмотрим некоторые свойства, которыми обладает это пространство.

Квадрат длины вектора ξ в пространстве $R_{1,3}^4$ задаётся формулой

$$|\xi|^2 = g(\xi, \xi) = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2.$$

Как и в классической теории, будем называть *световым* конус, образованный векторами ξ , для которых $|\xi|^2 = 0$, а сами эти вектора будем называть *изотропными*, или *световыми*. Вектора, лежащие внутри конуса и имеющие положительный квадрат длины, $|\xi|^2 > 0$, будем называть *временноподобными* векторами. Вектора, лежащие вне конуса и имеющие отрицательный квадрат длины, $|\xi|^2 < 0$, будем называть *пространственноподобными* векторами.

В отличие от классики, в нашем пространстве возникают вектора ξ , такие, что их квадрат длины одновременно больше либо равен, и меньше либо равен нулю, $0 \leq |\xi|^2 \leq 0$, назовём эти вектора *близкие к световым*.

Также мы можем рассмотреть мировую линию какой-нибудь материальной частицы. Эта мировая линия будет иметь вид

$$x^0 = ct, x^1 = x^1(t), x^2 = x^2(t), x^3 = x^3(t),$$

где c – постоянная скорость света в пустоте.

Вектор $|\xi|$, касательный к мировой линии, будет иметь вид

$$\xi = (c, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3).$$

Обозначим через $v = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$ вектор скорости пространственного движения. Постулат специальной теории относительности о том, что материальные частицы не могут двигаться со скоростью, большей скорости света c , будет иметь вид $|v| \leq c$ или

$$c^2 - (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^3)^2 \geq 0.$$

Таким образом, мы видим, что вектор скорости материальной частицы может быть времениподобным, изотропным или близким к световому.

Предположим, что вектор ξ близкий к световому. Тогда получим, что для него вектор скорости v отличается на инфинитезимальный объект d , т.е.

$$c^2 - v^2 = d,$$

где $0 \leq d \leq 0$. Отсюда следует, что вектор скорости близкого к световому вектора ξ равен

$$v = c \cdot \sqrt{1 + \frac{d}{c^2}}.$$

Корень из $1 + \frac{d}{c^2}$ определён, так как единица плюс инфинитезимальное обратимое число [1]. Далее заметим, что внешний вид преобразований Лоренца в пространстве R_1^4 не изменится, так как вывод формы этих преобразований основывается на тех свойствах метрики g , которые не изменились при переходе в категорию \mathcal{E} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Kock A. *Synthetic Differential Geometry* / Cambridge University Press, 1981.
2. Kock A. *Combinatorics of curvature, and Bianchi Identity* // Theory and Applications of Categories 2. 1996. N 7. P.69-89.
3. Kock A. *Geometric Construction of the Levi - Civita Parallelism* // Theory and Applications of Categories 4. 1998. N 9. P.195-207.
4. Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis* / Springer Verlag, 1991.

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ОДНОГО КЛАССА ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПРОЦЕССОВ ОТСЕЧЕНИЯ

А.Л. Евстифеева

In this paper, we pose and discuss a number of questions about the cutting planes algorithm for trying to solve integer programming problems.

1. Введение

Пусть R^n - n -мерное вещественное пространство, Z^n - множество его целочисленных точек (векторов). Задача целочисленного программирования (ЦП) может быть сформулирована следующим образом:

$$f(x) \longrightarrow \max, \quad (1.1)$$

$$x \in M \subset R^n, \quad (1.2)$$

$$x \in Z^n, \quad (1.3)$$

то есть нужно найти \bar{x} , максимизирующий $f(x)$, при условии, что \bar{x} целочисленный.

Сложность решения задач ЦП существенно определяется свойствами целевой функции (1.1) и допустимой области (1.2)-(1.3). Наиболее изученными являются задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП), у которых функция (1.1) линейна, а M задается конечной системой линейных уравнений и неравенств.

Нас интересует задача ЦП в лексикографической постановке. Отношение лексикографического порядка введем с помощью функции :

$\eta(x, y) = \min \{ i \mid x_i \neq y_i, i = 1, \dots, n \}$, $x, y \in R^n$, $x \neq y$ - номер первой координаты различия точек x и y .

© 1999 А.Л. Евстифеева

E-mail: siman@univer.omsk.su

Омский государственный университет

Определение . Вектор x лексикографически больше (меньше) вектора y , $x \succ y$ ($x \prec y$), если $x \neq y$ и $x_\omega > y_\omega$ ($x_\omega < y_\omega$) для $\omega = \eta(x, y)$.

Без ограничения общности, задачу ЦП в лексикографической постановке определим как задачу поиска:

$$z^* = \text{lexmax}(\Omega \cap Z^n), \Omega \subset R^n. \quad (1.4)$$

Существующие подходы к решению задач ЦП достаточно разнообразны. К ним относятся метод отсечения, метод ветвей и границ, динамическое программирование и др. Принцип метода отсечения заключается в том, что допустимая область дискретной задачи погружается в некоторое выпуклое множество, которое последовательно «обрезается» с помощью вводимых линейных ограничений (отсечений) до получения непрерывной задачи с необходимыми свойствами.

Методы отсечения различаются между собой выбором релаксационного множества и способом построения ограничений [8]. В данной работе будут рассматриваться линейные отсечения, которые строятся на основе L -разбиений пространства R^n .

2. Регулярные отсечения и алгоритмы

Будем предполагать, что существует $\bar{x} = \text{lexmax}(\Omega)$, $\bar{x} \notin Z^n$.

Определение . Линейное неравенство $(\gamma, x) \leq \gamma_0$ называется *отсечением* (для задачи (1.4)), если $(\gamma, \bar{x}) > \gamma_0$ и $(\gamma, z) \leq \gamma_0$ для всех $z \in \Omega \cap Z^n$.

Замечание . Линейное неравенство $(\gamma, x) \leq \gamma_0$ определяется своими коэффициентами $\gamma_i, i = 1, \dots, n, \gamma_0$, поэтому будем ассоциировать его с вектором $\bar{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \subseteq R^{n+1}$.

Через A обозначим процесс отсечения (без отбрасывания неравенств) для решения задачи (1.4), использующий на каждом шаге конечную совокупность отсечений G . Подробнее этот процесс выглядит так :

Шаг 0. Полагаем $\Omega^1 = \Omega$.

k -я итерация.

Шаг 1. Находим $x^k = \text{lexmax}\Omega^k$. Если $x^k \in Z^n$ или $\Omega^k = \emptyset$, то процесс завершается. В первом случае получено оптимальное решение задачи (1.4), во втором - решения нет.

Шаг 2. Выбираем конечную совокупность неравенств G_{x^k} . Полагаем $\Omega^{k+1} = \Omega^k \cap \left\{ x \in R^n \mid (\gamma, x) \leq \gamma_0 \text{ для всех } \bar{\gamma} \in G_{x^k} \right\}$. Увеличиваем k на 1 и переходим к $(k+1)$ -й итерации (на шаг 1).

Будем говорить, что процесс A *решает задачу* (1.4), если он за конечное число итераций либо находит z^* , либо устанавливает отсутствие допустимых решений.

Определение . Точки $x, y \in R^n$ будем называть L -эквивалентными, если не существует такой $z \in Z^n$, что либо $x \preceq z \preceq y$, либо $x \succeq z \succeq y$.

L -эквивалентность является отношением эквивалентности. Порождаемое им фактор - пространство R^n/L называется L -разбиением пространства R^n , а его элементы - L -классами. L -разбиение пространства естественным образом индуцирует L -разбиение произвольного множества $S \subset R^n$, которое обозначим S/L .

Отметим некоторые свойства L -разбиения[2]:

- 1) Всякая целочисленная точка образует отдельный L -класс; остальные L -классы состоят только из нецелочисленных точек и называются *дробными*.
- 2) Если $V \in R^n/L$ - дробный L -класс, то существуют такие $r \in \{1, \dots, n\}$ и $a_j \in Z, j = 1, \dots, r$, что

$$V = \left\{ x \in R^n \mid x_j = a_j, j = 1, \dots, r - 1, a_r < x_r < a_r + 1 \right\}.$$

- 3) Если $S \subset R^n$ ограничено, то S/L - конечно.
- 4) L -разбиение согласовано с лексикографическим порядком в том смысле, что если $V_1, V_2 \in R^n/L$ и $x^1 \succ y^1$ для некоторых $x^1 \in V_1, y^1 \in V_2$, то $x \succ y$ для всех $x \in V_1, y \in V_2$.

Особый интерес в задаче (1.4) представляет множество:

$$\Omega_* = \left\{ x \in \Omega \mid x \succ z, \forall z \in \Omega \cap Z^n \right\},$$

называемое *дробным накрытием* задачи (1.4). Оно в некотором смысле характеризует «расстояние» между непрерывным и целочисленным оптимумами задачи (1.4). Фактор-множество Ω_*/L будем называть L -накрытием задачи (1.4).

Определение . Отсечение $\bar{\gamma}$ называется *регулярным*, если $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V_{\bar{x}}(\Omega)$, где $V_{\bar{x}}(\Omega)$ - L -класс множества Ω , содержащий точку \bar{x} .

Двойственные дробные процессы отсечения (см. [3]), использующие на каждой итерации регулярные отсечения, называются *регулярными*.

Свойства L -разбиений позволяют получать в терминах L -классов оценки числа итераций регулярных процессов. Для этого введем определение.

Определение . Глубиной $H(\bar{\gamma}, \Omega)$ отсечения $\bar{\gamma}$ (относительно задачи (1.4)) называется количество полностью исключаемых им элементов L -накрытия.

Теорема 2.1. [4] Пусть для всех отсечений $\bar{\gamma}$ регулярного процесса выполняется неравенство $H(\bar{\gamma}, \Omega^t) \leq h$, где Ω^t - множество, полученное на t -й итерации. Тогда число итераций этого процесса заключено между числами $\frac{1}{h} |\Omega_*/L|$ и $|\Omega_*/L|$. ■

Отметим, что приведенное выше свойство L -разбиения под номером 3) обеспечивает конечность регулярных процессов при ограниченном Ω_* . Нужно сказать, что получение нетривиальной верхней оценки для глубин отсечений является достаточно трудной задачей. Одним из классов отсечений, для которых такая оценка построена, является класс P -отсечений [3], содержащий в себе вполне регулярные отсечения.

P -отсечения определяются следующим образом. Пусть задан параллелепипед

$$P = \left\{ x \in R^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n \right\},$$

где $a_j, b_j \in R, j = 1, \dots, n$. Рассмотрим класс задач (1.4), удовлетворяющих условиям: $\Omega \subset P, \bar{x} = \text{lexmax}\Omega, \bar{x} \notin Z^n$.

Определение. Регулярное отсечение $\bar{\gamma}$ называется P -отсечением, если $(\gamma, z) \leq \gamma_0$ для всех таких $z \in P \cap Z^n$, что $z \prec \bar{x}$. Соответствующие процессы отсечения называются P -процессами.

Теорема 2.2. [3] Пусть $\Omega \subset P, \bar{\gamma}$ - P -отсечение. Тогда $H(\bar{\gamma}, \Omega^t) \leq n$. ■

Определение. P -отсечение $\bar{\gamma}$ называется вполне регулярным отсечением (относительно точки \bar{x} и параллелепипеда P), если $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V_{\bar{x}}(P)$, где $V_{\bar{x}}(P)$ - L -класс параллелепипеда P , содержащий точку \bar{x} . Соответствующие процессы отсечения назовем вполне регулярными. Класс вполне регулярных отсечений будем обозначать через $\mathfrak{Z}(\bar{x}, P)$.

Условие, сформулированное в данном определении, обеспечивает определенную «силу» вполне регулярных отсечений, ибо точка \bar{x} должна отсекается вместе с некоторым непустым множеством $V_{\bar{x}}(P)$. В то же время, условие сохранения точек $z \in P \cap Z^n, z \prec \bar{x}$, напротив, делает отсечения класса $\mathfrak{Z}(\bar{x}, P)$ «осторожными». На сегодня отсутствует конструктивное описание класса P -отсечений. Для класса $\mathfrak{Z}(\bar{x}, P)$ такое описание получено в [6].

3. Сравнение вполне регулярных отсечений

Введем следующие обозначения:

$\varphi(x) = \min \left\{ i \mid x_i \neq \lfloor x_i \rfloor, i = 1, \dots, n \right\}$, для $x \notin Z^n$, - номер первой дробной координаты точки x ;

для $x \in P \setminus Z^n$ положим

$$J_-(x, P) = \left\{ j \mid x_j = a_j, 1 \leq j \leq \varphi(x) - 1 \right\},$$

$$J_0(x, P) = \left\{ j \mid a_j < x_j < b_j, 1 \leq j \leq \varphi(x) - 1 \right\},$$

$$J_+(x, P) = \left\{ j \mid x_j = b_j, 1 \leq j \leq \varphi(x) - 1 \right\},$$

$$J_\tau^k(x, P) = \left\{ j \in J_\tau(x, P) \mid j > k \right\},$$

$$\bar{J}_\tau^k(x, P) = \left\{ j \in J_\tau(x, P) \mid j < k \right\}, \text{ где } \tau \in \left\{ -, 0, + \right\}.$$

Пусть $\Omega \subset P$, и существует $\bar{x} = \text{lexmax}\Omega, \bar{x} \notin Z^n$.

Теорема 3.1. [6] Отсечение $(\gamma, x) \leq \gamma_0$ является вполне регулярным (относительно точки \bar{x} и параллелепипеда P) тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют условиям :

- 1) $\gamma_{\varphi(\bar{x})} > 0$;
- 2) $\gamma_k = 0$ для всех $k > \varphi(x)$;
- 3)

$$\gamma_k \geq \sum_{j \in J_0^k(\bar{x}, P)} \gamma_j (b_j - \bar{x}_j) + \sum_{j \in J_-^k(\bar{x}, P), \gamma_j > 0} \gamma_j (b_j - \bar{x}_j) + \gamma_{\varphi(\bar{x})} (b_{\varphi(\bar{x})} - \lfloor \bar{x}_{\varphi(\bar{x})} \rfloor),$$

для всех $k \in J_0(\bar{x}, P) \cup J_+(\bar{x}, P)$;

- 4) $\gamma_0 = (\gamma, \lfloor \bar{x} \rfloor)$, где $\lfloor \bar{x} \rfloor = (\lfloor \bar{x}_1 \rfloor, \dots, \lfloor \bar{x}_n \rfloor)$.

■

Пусть $\bar{\gamma}$ - отсечение вида $(\gamma, x) \leq \gamma_0$. Положим

$Q_p(\bar{\gamma}) = \{x \in P \mid (\gamma, x) \leq \gamma_0\}$ - множество точек параллелепипеда P , сохраняемых отсечением $\bar{\gamma}$.

Определение . Будем говорить, что отсечение $\bar{\gamma}'$ не сильнее отсечения $\bar{\gamma}$, если $Q_p(\bar{\gamma}) \subseteq Q_p(\bar{\gamma}')$.

Из теоремы 3.1 следует, что для всякого вполне регулярного отсечения выбор коэффициентов γ_k при $k \in J_-(\bar{x}, P)$ произволен. Выделим в $\mathfrak{S}(\bar{x}, P)$ подкласс

$$U(\bar{x}, P) = \{ \bar{\gamma} \in \mathfrak{S}(\bar{x}, P) \mid \gamma_k \geq 0, k \in J_-(\bar{x}, P) \}.$$

Лемма 3.1. [7] Для всякого $\bar{\gamma} \in \mathfrak{S}(\bar{x}, P)$ существует такое $\bar{\gamma}' \in U(\bar{x}, P)$, что $\bar{\gamma}$ не сильнее, чем $\bar{\gamma}'$. ■

Определение . Отсечения $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}' \in U(\bar{x}, P)$ назовем ξ -эквивалентными, если $\gamma_k = \gamma'_k$, при $k \in J_-(\bar{x}, P) \cup J_0(\bar{x}, P)$.

Это отношение является отношением эквивалентности и, следовательно, порождает фактор-множество $U(\bar{x}, P)/\xi$. В каждом классе эквивалентности выделим по одному представителю $\bar{\gamma}^*$, определенному условием

$$\bar{\gamma}_k^* = \sum_{j \in J_0^k \cup J_-^k} \bar{\gamma}_j^* (b_j - \bar{x}_j) + \bar{\gamma}_{\varphi(\bar{x})}^* (b_{\varphi(\bar{x})} - \lfloor \bar{x}_{\varphi(\bar{x})} \rfloor), \text{ при } k \in J_+. \quad (3.1)$$

Легко доказать, что любое отсечение из элемента фактор-множества $U(\bar{x}, P)/\xi$ не сильнее соответствующего отсечения $\bar{\gamma}^*$. Объединим эти «самые сильные» отсечения в самостоятельный подкласс, который обозначим через $U^*(\bar{x}, P)$. Отметим для ясности, что $\bar{\gamma} \in U^*(\bar{x}, P)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\gamma} \in U(\bar{x}, P)$ и удовлетворяет условию (3.1). Очевидна следующая теорема

Теорема 3.2. [7] Для любого $\bar{\gamma} \in \mathfrak{S}(\bar{x}, P)$ существует такое $\bar{\gamma}' \in U^*(\bar{x}, P)$, что $\bar{\gamma}$ не сильнее, чем $\bar{\gamma}'$. ■

4. Сравнение вполне регулярных процессов, основанных на отсечениях классов $U(\bar{x}, P)$ и $U^*(\bar{x}, P)$

Пусть $\Gamma(\tilde{x}, P)$ - отсечения $(\gamma, x - \lfloor \tilde{x} \rfloor) \leq 0$, коэффициенты которых удовлетворяют следующим условиям:

1. $\gamma_k = 0$ при $k \in J_-(\tilde{x}, P)$;
- 2.

$$\gamma_k = \sum_{j \in J_0^k(\tilde{x}, P)} \gamma_j(b_j - \tilde{x}_j) + \gamma_{\varphi(\tilde{x})} \left(b_{\varphi(\tilde{x})} - \lfloor \tilde{x}_{\varphi(\tilde{x})} \rfloor \right), \text{ для всех } k \in J_0(\tilde{x}, P);$$

- 3.

$$\gamma_k \geq \sum_{j \in J_0^k(\tilde{x}, P)} \gamma_j(b_j - \tilde{x}_j) + \gamma_{\varphi(\tilde{x})} \left(b_{\varphi(\tilde{x})} - \lfloor \tilde{x}_{\varphi(\tilde{x})} \rfloor \right), \text{ для всех } k \in J_0(\tilde{x}, P).$$

Пусть вполне регулярный процесс A (для решения задачи (1.4)) использует на каждом i -ом шаге некоторое отсечение из совокупности вполне регулярных отсечений $\Gamma(x^i, P)$ класса $U(\bar{x}, P)/\xi$, где $x^i = \text{lexmax} \Omega^i$.

Через A^* обозначим вполне регулярный процесс, использующий на каждом шаге отсечение $\bar{\gamma}^*(x^i, P)$ из класса $U^*(\bar{x}, P)$, коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

1. $\gamma_k^* = 0$ при $k \in J_-(x^i, P)$;
- 2.

$$\gamma_k^* = \sum_{j \in J_0^k(x^i, P)} \gamma_j^*(b_j - x_j^i) + \gamma_{\varphi(x^i)} \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right), \text{ для всех } k \in J_0(x^i, P);$$

- 3.

$$\gamma_k^* = \sum_{j \in J_0^k(x^i, P)} \gamma_j^*(b_j - x_j^i) + \gamma_{\varphi(x^i)} \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right), \text{ для всех } k \in J_+(x^i, P).$$

Ясно, что отсечение $\bar{\gamma}^*(x^i, P)$ отличается от (3.1) наличием условия 2. Выясним, как выглядят коэффициенты отсечения $\bar{\gamma}^*(x^i, P)$.

Пусть класс $J_0(x^i, P)$ содержит p индексов, т.е. $J_0(x^i, P) = \{j_1, \dots, j_p\}$. Тогда, полагая $\gamma_{\varphi(x^i)}^* = 1$, из 2. получим

$$\gamma_{j_p}^* = b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor;$$

$$\gamma_{j_{p-1}}^* = \gamma_{j_p}^*(b_{j_p} - x_{j_p}^i) + b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor = \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right) (b_{j_p} - x_{j_p}^i + 1);$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{j_{p-2}}^* &= \gamma_{j_{p-1}}^*(b_{j_{p-1}} - x_{j_{p-1}}^i) + \gamma_{j_p}^*(b_{j_p} - x_{j_p}^i) + b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor = \\
 &= \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right) \left((b_{j_p} - x_{j_p}^i + 1)(b_{j_{p-1}} - x_{j_{p-1}}^i) + b_{j_p} - x_{j_p}^i + 1 \right) = \\
 &= \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right) (b_{j_p} - x_{j_p}^i + 1)(b_{j_{p-1}} - x_{j_{p-1}}^i + 1) = \\
 &= \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^{j_{p-2}}} (b_l - x_l^i + 1).
 \end{aligned}$$

Продолжая аналогичные выкладки для каждого $\gamma_{j_{p-i}}^*$, $i = 3, \dots, p-1$, получим, что в общем случае при $k \in J_0(x^i, P)$;

$$\gamma_k^* = \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^k} (b_l - x_l^i + 1). \quad (4.1)$$

Рассмотрим условие 3: Пусть $k \in J_+(x^i, P)$. Если $k > j_p$, то

$$\gamma_k^* = b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor;$$

если $j_{p-1} < k < j_p$, то

$$\gamma_k^* = \gamma_{j_p}^*(b_{j_p} - x_{j_p}^i) + b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor = \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right) (b_{j_p} - x_{j_p}^i + 1);$$

В общем случае если $j_{i-1} < k < j_i$, $i = 2, \dots, p-1$, то

$$\gamma_k^* = \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^k} (b_l - x_l^i + 1). \quad (4.2)$$

Теперь можно сказать, что вполне регулярный процесс A^* использует отсечение $\bar{\gamma}^*(x^i, P)$ из класса $U^*(\bar{x}, P)$, коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

1. $\gamma_k^* = 0$ при $k \in J_-(x^i, P)$;

2.

$$\gamma_k^* = \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^k} (b_l - x_l^i + 1) \text{ при } k \in J_0(x^i, P);$$

3.

$$\gamma_k^* = \left(b_{\varphi(x^i)} - \lfloor x_{\varphi(x^i)}^i \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^k} (b_l - x_l^i + 1) \text{ при } k \in J_+(x^i, P).$$

Очевидно следующее предложение.

Предложение 4.1. Любое отсечение $\bar{\gamma}$ из $\Gamma(x^i, P)$ не сильнее, чем $\bar{\gamma}^*(x^i, P)$. \blacksquare

Ранее в работах [1, 5] были найдены наискорейшие по числу итераций вполне регулярные алгоритмы для задач булева программирования, а также в работе [7] были найдены наискорейшие вполне регулярные алгоритмы для решения задачи (1.4), использующие на каждой итерации некоторую конечную вполне регулярную совокупность неравенств. В данной же работе рассматриваются алгоритмы, использующие на каждой итерации лишь по одному отсечению из $\Gamma(\tilde{x}, P)$, и доказывается, что из всех таких алгоритмов наискорейшим по числу итераций является алгоритм, основанный на отсечении $\bar{\gamma}^*$. Для этого воспользуемся леммой.

Лемма 4.1. Пусть u, v не являются L -эквивалентными и $u \prec v$. Если $\bar{\gamma}^*(v, P)$ отсекает точку u , то $\bar{\gamma}^*(v, P)$ не сильнее, чем $\bar{\gamma}^*(u, P)$.

Доказательство. Так как точка u отсекается $\bar{\gamma}^*(v, P)$, то $\eta(u, v) < \varphi(v)$. Действительно, если $\eta(u, v) > \varphi(v)$, то точки u и v L -эквивалентны, а если $\eta(u, v) = \varphi(v)$, то $u_{\varphi(v)} \leq \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor$, а это значит, что

$$(\gamma^*(v, P), u) - \gamma_0^*(v, P) = \sum_{i \in J_0(v, P)} \gamma_i^*(u_i - v_i) + \sum_{i \in J_+(v, P)} \gamma_i^*(u_i - v_i) + \gamma_{\varphi(v)}^*(u_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor) \leq 0, \text{ т. е. точка } u \text{ сохраняется отсечением } \bar{\gamma}^*(v, P).$$

Очевидно, что $\eta(u, v) \notin J_-(v, P)$.

Пусть $\eta(u, v) \in J_0(v, P) \cup J_+(v, P)$ и $u_{\eta(u, v)} - v_{\eta(u, v)} \leq -1$. Тогда, используя формулы (4.1), (4.2), получаем

$$\begin{aligned} & (\gamma^*(v, P), u) - \gamma_0^*(v, P) = \sum_{i \in J_0^{\eta(u, v)}(v, P) \cup J_+^{\eta(u, v)}} \gamma_i^*(u_i - v_i) + \gamma_{\eta(u, v)}^*(u_{\eta(u, v)} - v_{\eta(u, v)}) + \\ & + \sum_{i \in J_0^{\eta(u, v)} \cup J_+^{\eta(u, v)}, i < \varphi(v)} \gamma_i^*(u_i - v_i) + \gamma_{\varphi(v)}^*(u_{\varphi(v)} - v_{\varphi(v)}) = \left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^{\eta(u, v)}} (b_l - \\ & - v_l + 1)(u_{\eta(u, v)} - v_{\eta(u, v)}) + \left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \sum_{i \in J_0^{\eta(u, v)} \cup J_+^{\eta(u, v)}, i < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^i} (b_l - v_l + 1)(u_i - v_i) + \\ & + u_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \leq \left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^{\eta(u, v)}} (b_l - v_l + 1)(-1) + \left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \times \\ & \times \sum_{i \in J_0^{\eta(u, v)} \cup J_+^{\eta(u, v)}, i < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^i} (b_l - v_l + 1)(b_i - v_i) + b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor = \left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \times \\ & \times \left(\sum_{i \in J_0^{\eta(u, v)} \cup J_+^{\eta(u, v)}, i < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^i} (b_l - v_l + 1)(b_i - v_i) + 1 - \prod_{l \in J_0^{\eta(u, v)}} (b_l - v_l + 1) \right) = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю имеет место в силу следующих выкладок.

Пусть $J_0^{\eta(u,v)} = \{j_1, \dots, j_p\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in J_0^{\eta(u,v)} \cup J_+^{\eta(u,v)}, i < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^i} (b_l - v_l + 1)(b_i - v_i) + 1 = b_{j_p} - v_{j_p} + 1 + (b_{j_p} - v_{j_p} + 1)(b_{j_{p-1}} - v_{j_{p-1}}) + \\ & + (b_{j_p} - v_{j_p} + 1)(b_{j_{p-1}} - v_{j_{p-1}} + 1)(b_{j_{p-2}} - v_{j_{p-2}}) + \dots + (b_{j_p} - v_{j_p} + 1)(b_{j_{p-1}} - v_{j_{p-1}} + 1) \times \\ & \times \dots \times (b_{j_3} - v_{j_3} + 1)(b_{j_2} - v_{j_2} + 1)(b_{j_1} - v_{j_1}) = (b_{j_p} - v_{j_p} + 1)(b_{j_{p-1}} - v_{j_{p-1}} + 1 + \\ & + (b_{j_{p-1}} - v_{j_{p-1}} + 1)(b_{j_{p-2}} - v_{j_{p-2}}) + \dots + (b_{j_{p-1}} - v_{j_{p-1}} + 1)(b_{j_{p-2}} - v_{j_{p-2}} + 1) \dots (b_{j_3} - v_{j_3} + 1) \times \\ & \times (b_{j_2} - v_{j_2} + 1)(b_{j_1} - v_{j_1})) = \prod_{l \in J_0^i} (b_l - v_l + 1). \end{aligned}$$

Итак, точка u сохраняется отсечением $\bar{\gamma}^*(v, P)$, что противоречит условию леммы. Отсюда следует, что $u_{\eta(u,v)} - v_{\eta(u,v)} > -1$.

Так как $v_{\eta(u,v)}$ - целое, то $u_{\eta(u,v)}$ - дробное. Значит, $\eta(u, v) = \varphi(u) < \varphi(v)$ и, следовательно:

$$\varphi(u) \in J_0(v, P) \cup J_+(v, P);$$

$$\lfloor u_{\eta(u,v)} \rfloor = v_{\eta(u,v)} - 1;$$

$$\bar{J}_-^{\varphi(u)}(v, P) = J_-(u, P);$$

$$\bar{J}_0^{\varphi(u)}(v, P) = J_0(u, P);$$

$$\bar{J}_+^{\varphi(u)}(v, P) = J_+(u, P).$$

Остается показать, что если некоторая точка $x \in P$ отсекается неравенством $\bar{\gamma}^*(v, P)$, то она отсекается и неравенством $\bar{\gamma}^*(u, P)$.

$$\begin{aligned} 0 < (\gamma^*(v, P), x) - \gamma_0^*(v, P) &= \sum_{j \in \bar{J}_0^{\varphi(u)}(v, P) \cup \bar{J}_+^{\varphi(u)}} \gamma_j^*(x_j - v_j) + \gamma_{\varphi(u)}^*(x_{\varphi(u)} - v_{\varphi(u)}) + \\ & + \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \gamma_j^*(x_j - v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor = (b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor) \times \\ & \times \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1)(x_j - v_j) + (b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor) \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1)(x_{\varphi(u)} - v_{\varphi(u)}) + \\ & + (b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor) \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1)(x_j - v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor = \\ & = (b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor) \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1)(b_{\varphi(u)} - v_{\varphi(u)} + 1) \sum_{j \in \bar{J}_0^{\varphi(u)} \cup \bar{J}_+^{\varphi(u)}} \prod_{l \in J_0^j \cap \bar{J}_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1) \times \\ & \times (x_j - v_j)x_{\varphi(u)} - v_{\varphi(u)} + (b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor) \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (x_j - v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor = \left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1) \left(\left(b_{\varphi(u)} - \lfloor u_{\varphi(u)} \rfloor \right) \times \right. \\
& \quad \times \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}} \prod_{l \in J_0^j \cap J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1) (x_j - v_j) + x_{\varphi(u)} - \lfloor u_{\varphi(u)} \rfloor - 1 \Big) + \\
& \quad + \left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1) (x_j - v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor = \\
& \quad = \left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1) ((\gamma^*(u, P), x) - \gamma^*(u, P) - 1) + \\
& \quad + \left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1) (x_j - v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor > 0.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& (\gamma^*(u, P), x) - \gamma_0^*(u, P) > 1 - \left(\left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1) \times \right. \\
& \quad \times (x_j - v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \Big) \left(\left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1) \right)^{-1} > \\
& > 1 - \left(\left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1) (b_j - v_j) + b_{\varphi(v)} - \right. \\
& \quad \left. - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \left(\left(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \right) \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1) \right)^{-1} = 1 - \left(\sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1) \times \right. \\
& \quad \left. \times (b_j - v_j) + 1 \right) \left(\prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1) \right)^{-1} = 1 - 1 = 0,
\end{aligned}$$

так как по доказанному ранее

$$\sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1) (b_j - v_j) + 1 = \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1).$$

■

Лемма 4.2. Пусть $X = \{x^k\}_{k=1}^t$ - последовательность, порождаемая процессом A^* , $y \in P$ - нецелочисленная точка и $y \succ x^p$ для некоторого $p \in \{1, \dots, t-1\}$. Тогда любое отсечение $\bar{\gamma}$ из $\Gamma(y, P)$ отсекает не более одной точки x^k , $k \geq p$.

Доказательство. От противного. Предположим, что отсечение $\bar{\gamma}$ из $\Gamma(y, P)$ отсекает точки x^q и x^r , $p \leq q \leq r$. По теореме 4.1 $\bar{\gamma}$ не сильнее, чем $\bar{\gamma}^*(y, P)$, значит $\bar{\gamma}^*(y, P)$ отсекает точки x^q и x^r . Так как x^q и x^p не являются L -эквивалентными и так как $y \succ x^p \succ x^q$, то y и x^q так же не являются L -эквивалентными. Тогда по лемме 4.1 $\bar{\gamma}^*(y, P)$ не сильнее $\bar{\gamma}^*(x^q, P)$, но из условия теоремы мы знаем, что $\bar{\gamma}^*(x^q, P)$ не отсекает точку x^r . Противоречие. ■

Теорема 4.2. Пусть $\Omega \subset P$. Для решения задачи (1.4) процессом A^* требуется итераций не больше, чем процессом A .

Доказательство. Действительно, отсечение, построенное по любой точке y , порожденной процессом A , отсекает, согласно леммы 4.2, не более одной точки последовательности X . Следовательно, процессу A потребуется итераций не меньше, чем процессу A^* . ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Заблочкая О.А. *О сравнении вполне регулярных алгоритмов отсечения* // Управляемые системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. Вып.25. 1984. С.68-74.
2. Колоколов А.А. *Регулярные отсечения при решении задач целочисленной оптимизации.* // Управляемые системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. Вып.21. 1981. С.18-25.
3. Колоколов А.А. *Методы дискретной оптимизации: Учебное пособие.* Омск: ОмГУ, 1984. 75 с.
4. Колоколов А.А. *Метод оценочных разбиений в целочисленном программировании* // Теория и программная реализация методов дискретной оптимизации. Киев: ИК АН УССР, 1989. С.44-47.
5. Колоколов А.А. *О наискорейшем алгоритме в одном классе регулярных процессов отсечения* // Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях: Тез. докл. III Всесоюз. совещ. Ташкент - Новосибирск, 1984. Ч.2 С.70.
6. Симанчев Р.Ю. *О вполне регулярных отсечениях для задач целочисленной оптимизации* // Управляемые системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. Вып.30. 1990. С.61-71.
7. Симанчев Р.Ю. *Сравнение вполне регулярных отсечений и алгоритмов* // Методы решения и анализа задач дискретной оптимизации: Сб. науч. тр. Омск: ОмГУ, 1992. С.108-122.
8. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования.* Москва: Мир, 1991. Т.1. 340 с.

ПРОСТРАНСТВА А.Д. АЛЕКСАНДРОВА ОГРАНИЧЕННОЙ СВЕРХУ КРИВИЗНЫ

Д.В. Лахин

In this paper the following problem is studied. Let $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ be a branched covering of smooth riemannian manifold M with metric d by manifold \tilde{M} . It is possible to draw the metric d from M into some metric \tilde{d} on \tilde{M} . And there appears a question: what conditions about M and π can ensure the metric space (\tilde{M}, \tilde{d}) to be an Alexandrov space of bounded curvature? This question is considered in given paper.

1. Введение

В последнее время в геометрии проявляется большой интерес к изучению вопросов, связанных с пространствами А.Д.Александрова ограниченной сверху кривизны. Эта работа посвящена следующей задаче. Пусть M – гладкое риманово многообразие и $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ – разветвленное накрытие M многообразием \tilde{M} . Определение разветвленного накрытия, а также все остальные, см. в пункте 2. Обозначим метрику на M через d . Метрика на M с помощью отображения π может быть поднята на \tilde{M} . Возникает вопрос, какие условия на M и π являются достаточными для того, чтобы многообразие \tilde{M} превратилось в пространство А.Д.Александрова ограниченной сверху кривизны? Этот вопрос исследовался в [1].

В нашей работе многообразия M и \tilde{M} мы считаем линейно связными, а отображение π непрерывным. Тогда метрику \tilde{d} можно поднять на \tilde{M} , например, с помощью следующего определения.

Пусть $x, y \in \tilde{M}$. Тогда

$$\tilde{d}(x, y) = \inf_{xLy} s_d(\pi(L)), \quad (1)$$

где L – это всевозможные непрерывные пути на \tilde{M} , соединяющие x и y , а $s_d(\pi(L))$ – это длина пути $\pi(L)$ на M в метрике d .

В этой работе исследуется другой способ задания той же самой метрики, а именно, с помощью субметрии. Результатом является следующее предложение.

© 1999 Д.В. Лахин

E-mail: guts@univer.omsk.su

Омский государственный университет

Предложение 1. Пусть $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ разветвленное накрытие гладкого риманова многообразия M компактным многообразием \tilde{M} . Многообразия \tilde{M} и M линейно связны. Риманова метрика на M обозначается через d . Тогда на \tilde{M} существует единственная внутренняя метрика ρ , такая, что отображение $\pi : (\tilde{M}, \rho) \rightarrow (M, d)$ является субметрией. ■

В процессе доказательства мы получаем, что эта метрика совпадает с \tilde{d} .

Все дальнейшие результаты доказаны только для двумерных многообразий. На основании полученных в [1] результатов показана справедливость следующего предложения.

Предложение 2. Пусть $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ – разветвленное накрытие гладкого двумерного риманова многообразия M двумерным многообразием \tilde{M} . Многообразия \tilde{M} и M линейно связны. Риманова метрика на M обозначается через d . Гауссова кривизна M не превосходит χ . Тогда метрика \tilde{d} на \tilde{M} , поднятая из метрики d на M с помощью отображения π , превращает \tilde{M} в пространство кривизны $\leq \chi$ по А.Д.Александрову. ■

Здесь \tilde{d} определяется по формуле (1).

Далее исследуется следующий вопрос. Мы рассматриваем три частных случая разветвленного накрытия $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$. В каждом из них в качестве M берется единичная сфера Римана S , реализованная как подмножество \mathbf{E}^3 , т. е. риманово многообразие. Далее, в первом случае \tilde{M} – это также сфера Римана, и она покрывает S с помощью рациональной функции. Во втором случае \tilde{M} – это тор, покрывающий сферу S с помощью эллиптической функции. В третьем случае \tilde{M} представляет собой сферу с g ручками, а отображение π будет построено ниже (в пункте 6). Для всех этих случаев из Предложения 1 и Предложения 2 мы получаем следующие следствия.

Следствие 1. Пусть сфера Римана \tilde{S} отображается на сферу Римана S с помощью рациональной функции f . Тогда на \tilde{S} существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение f является субметрией, и эта метрика превращает \tilde{S} в пространство кривизны ≤ 1 . ■

Следствие 2. Пусть тор \tilde{T} отображается на сферу Римана S с помощью эллиптической функции v . Тогда на \tilde{T} существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение v является субметрией, и эта метрика превращает \tilde{T} в пространство кривизны ≤ 1 . ■

Следствие 3. Пусть многообразие \tilde{N} – сфера с g ручками, $g > 0$, отображается на сферу Римана S с помощью отображения h (отображение h определяется в пункте 6). Тогда на \tilde{N} существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение h является субметрией, и эта метрика превращает \tilde{N} в пространство кривизны ≤ 1 . ■

В каждом случае мы получаем метрическое пространство (\tilde{M}, \tilde{d}) кривизны ≤ 1 . Далее, оказывается, что если отображение π задано явно, то метрику \tilde{d}

на \tilde{M} можно вычислить. Для этого удобно воспользоваться римановой поверхностью R отображения π^{-1} , обратного к π . На римановой поверхности определена естественная метрика (см. 1.2), и отображение $\pi^{-1} : R \rightarrow \tilde{M}$ является изометрией. Таким образом, для вычисления \tilde{d} достаточно построить риманову поверхность для π^{-1} . Основная часть работы как раз и посвящена этому вопросу. Результатом является алгоритм, позволяющий построить риманову поверхность для функции, обратной к произвольной рациональной или четной эллиптической.

2. Предварительные сведения

1.1. Опишем, как конкретно будут реализованы наши частные случаи разветвленного накрытия $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$. Как уже говорилось, M представляет собой сферу Римана S , вложенную в \mathbf{E}^3 – трехмерное евклидово пространство. Она снабжается индуцированной римановой метрикой d . Как множество точек, S можно рассматривать в виде $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Далее, в первом случае \tilde{M} также представляет собой сферу Римана, и мы также будем рассматривать \tilde{M} в виде $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Таким образом, π в этом случае действует из $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. В качестве π мы берем все рациональные функции. Во втором случае \tilde{M} – это тор, который мы представляем как результат факторизации \mathbf{C} по действию группы, порожденной двумя сдвигами на векторы ω_1 и ω_2 ($\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$, $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0$, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{R}$). Поэтому отображение π в этом случае задано на параллелограмме, стороны которого – это векторы ω_1 и ω_2 . В качестве π мы берем четные эллиптические функции с периодами ω_1 и ω_2 . Реализация \tilde{M} в виде сферы с g ручками для третьего случая описана в пункте 6. Для всех трех случаев χ из Предложения 1 равно единице, т. к. гауссова кривизна S равна 1.

1.2. Пусть мы находимся в рамках одного из трех частных случаев. Введем некоторые обозначения. Риманову поверхность для π^{-1} обозначим через R . Далее, многозначную функцию π^{-1} обычно считают заданной на R , но в таком случае это отображение не является обратным к π . Чтобы не произошло путаницы, мы введем обозначение $\bar{\pi}^{-1} : R \rightarrow \tilde{M}$. Под этим отображением будет пониматься то, что обычно понимается под π^{-1} . Таким образом, следующая диаграмма будет коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & \swarrow \bar{\pi}^{-1} & \searrow \downarrow \varphi \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

Здесь φ – это естественная проекция римановой поверхности на сферу Римана, т. е. две точки проектируются в одну, если они имеют одно и то же положение на соответствующих сферах, из которых склеена риманова поверхность R . Отметим также существование отображения $\bar{\pi} : \tilde{M} \rightarrow R$, обратного к $\bar{\pi}^{-1}$, оно нам впоследствии понадобится.

На R существует естественная метрика, которая определяется как инфимум длин всех непрерывных кривых L , соединяющих точки, между которыми измеряется расстояние. Длина кривой L – это длина кривой $\varphi(L)$. Из этого определения, определения метрики \check{d} по формуле (1) и коммутативности построенной выше диаграммы следует, что \check{M} изометрично римановой поверхности R и отображения $\check{\pi}^{-1} : R \rightarrow \check{M}$ или $\check{\pi} : \check{M} \rightarrow R$ являются изометриями. Таким образом, вместо метрического пространства (\check{M}, \check{d}) можно исследовать риманову поверхность R с естественной метрикой, и если мы хотим вычислить метрику \check{d} на \check{M} , то нужно всего лишь построить риманову поверхность для отображения $\check{\pi}^{-1}$.

3. Основные понятия и определения

Определение 1. Метрическое пространство (M, d) называется пространством с внутренней метрикой, если

$$\forall x, y \in M \quad d(x, y) = \inf_{xLy} s_d(L),$$

где L – это всевозможные непрерывные пути на M , соединяющие x и y , а $s_d(L)$ – это длина пути L в метрике d .

Определение 2. Кратчайшей метрического пространства называется кривая, длина которой равна расстоянию между ее концами.

Определение 3. Набор из трех точек $p, q, r \in M$ метрического пространства M и трех кратчайших pq, pr, qr называется треугольником в M и обозначается Δpqr .

Зафиксируем вещественное число k . Назовем k -плоскостью двумерное полное односвязное риманово многообразие кривизны k . Пусть M – пространство с внутренней метрикой. Тройке точек p, q, r из M сопоставим треугольник $\check{\Delta}pqr$ на k -плоскости с вершинами $\check{p}, \check{q}, \check{r}$ и длинами сторон $|\check{p}\check{q}| = |pq|, |\check{p}\check{r}| = |pr|, |\check{q}\check{r}| = |qr|$. При $k \leq 0$ такой треугольник всегда существует, а при $k > 0$ только в предположении, что периметр Δpqr меньше $2\pi/\sqrt{k}$.

Определение 4. Пусть M – пространство с внутренней метрикой, в котором локально любые две точки соединимы кратчайшей. Тогда M называется пространством кривизны $\leq k$ по А.Д.Александрову, если для любой точки $x \in M$ существует окрестность U_x , такая, что выполнено следующее:

Для любого треугольника Δpqr с вершинами в U_x и любой точки s на стороне qr выполнено неравенство $|ps| \leq |\check{p}\check{s}|$, где \check{s} – точка на стороне $\check{q}\check{r}$ треугольника $\check{\Delta}pqr$, соответствующая s , т. е. такая, что $|qs| = |\check{q}\check{s}|$.

Определение 5. Пусть M, N – n -мерные многообразия, а $p : N \rightarrow M$ – непрерывное отображение. Отображение p называется разветвленным накрытием, если в M существует $(n-2)$ -мерный полиэдр L , прообраз которого $p^{-1}(L)$

является $(n - 2)$ -мерным полиэдром, причем ограничение p на $N \setminus \pi^{-1}(L)$ является накрытием. Порядок этого накрытия есть также по определению и порядок разветвленного накрытия p . Полиэдр L называется множеством ветвления p . В случае двумерных многообразий L представляет собой конечное число точек, а $\pi^{-1}(L)$ дискретное множество. Тогда точки множества L называются точками ветвления разветвленного накрытия p .

Определение 6. Отображение p метрических пространств, такое, что $p : (N, \rho_N) \rightarrow (M, \rho_M)$, называется субметрией, если

$$\forall x \in M \quad \forall r \geq 0 \quad p(B_r[x]) = B_r[p(x)],$$

где $B_r[x]$ и $B_r[p(x)]$ – замкнутые шары радиусов r с центрами в точках x и $p(x)$ соответственно.

Определение 7. n -мерный орбифолд Q – это отделимое паракомпактное пространство Q_0 , снабженное покрытием открытыми множествами $\{U_i\}$, замкнутым относительно взятия конечных пересечений. Каждому множеству U_i сопоставляется некоторая конечная группа G_i , некоторое действие группы G_i на открытом подмножестве \tilde{U}_i в \mathbf{R}^n и гомеоморфизм $\varphi_i : \tilde{U}_i/G_i \rightarrow U_i$. Если $U_i \subset U_j$, то должны существовать включение $f_{ij} : G_i \rightarrow G_j$ и эквивариантное по отношению к f_{ij} вложение $\tilde{\varphi}_{ij} : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_j$, такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U}_i & \rightarrow & \tilde{U}_i/G_i & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \\ \tilde{\varphi}_{ij} \downarrow & & \downarrow \varphi_{ij} & & \downarrow id \\ \tilde{U}_j & \rightarrow & \tilde{U}_j/f_{ij}G_i & \rightarrow & \tilde{U}_j/G_j \xrightarrow{\varphi_j} U_j \end{array}$$

Пространство Q_0 называется подстилающим пространством.

Обозначим через ψ_i отображение $\tilde{U}_i \rightarrow U_i$, представляющее собой композицию отображений факторизации $\tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_i/G_i$ и гомеоморфизма $\varphi_i : \tilde{U}_i/G_i \rightarrow U_i$. На дизъюнктном объединении $\coprod \tilde{U}_i$ определим отображение $\psi = \coprod \psi_i : \coprod \tilde{U}_i \rightarrow Q_0$. Рассмотрим псевдогруппу всевозможных локальных гомеоморфизмов $\coprod \tilde{U}_i$, эквивариантных относительно ψ .

Определение 8. Говорят, что на орбифолде Q задана метрика, если метрика задана на каждом \tilde{U}_i , и каждый элемент псевдогруппы является изометрией. Говорят, что орбифолд с этой метрикой имеет кривизну $\leq \chi$, если каждое множество \tilde{U}_i является пространством, удовлетворяющим Определению 4 при $k = \chi$, но не для некоторой окрестности U_x , а глобально.

4. Римановы поверхности рациональных функций

Пусть \tilde{S} и S – две сферы Римана, а $f : \tilde{S} \rightarrow S$ – рациональная функция, отображающая \tilde{S} в S .

Общий вид рациональной функции:

$$f(z) = \frac{a_1 z^n + \dots + a_n z + a_{n+1}}{b_1 z^m + \dots + b_m z + b_{m+1}} = \frac{a(z)}{b(z)},$$

$$a_i, b_j \in \mathbb{C}, \quad a_1 \neq 0, b_1 \neq 0.$$

Можно считать, что числитель и знаменатель $f(z)$ не имеют одинаковых корней.

Отображение f представляет собой разветвленное накрытие, и, как уже говорилось выше, нам нужно узнать строение римановой поверхности многозначной функции $f^{-1}(z)$.

Пусть R – это и есть та самая риманова поверхность. Построение ее проводится следующим образом. Берется несколько сфер Римана, а именно, столько, каков порядок разветвленного накрытия f . Далее все эти сферы Римана определенным образом склеиваются (см. ниже). В результате мы получаем поверхность, у которой некоторое конечное число точек имеет следующую особенность. Во-первых, в каждой такой точке склеивается несколько сфер Римана, а во-вторых, всякая ее достаточно малая окрестность получается при склеивании нескольких окрестностей с этих сфер, причем каждая из них является окрестностью прообраза этой точки при отображении склейки. Такие особые точки называются точками ветвления римановой поверхности. Порядком точки ветвления называется число сфер Римана, которые в ней склеиваются. Эти точки ветвления поверхности R следует отличать от точек ветвления разветвленного накрытия f (см. Определение 5), хотя они и имеют к ним определенное отношение:

Пусть $r \in R$ – точка ветвления R . Тогда образ $s = \varphi(r)$ при отображении точки r с помощью φ будет точкой ветвления f , где $\varphi : R \rightarrow S$ – это естественная проекция (см. 1.2). Также верно, что для любой $s \in S$ – точки ветвления f , существует $r \in R$ – точка ветвления R (не обязательно единственная), такая, что $\varphi(r) = s$. Кроме того, если $s \in S$ – произвольная точка ветвления и U – ее достаточно малая окрестность, то можно установить взаимно однозначное соответствие между точками ветвления R , принадлежащими прообразу $\varphi^{-1}(s)$, и теми компонентами связности \tilde{U}_j множества $f^{-1}(U)$, для которых выполняется следующее условие:

Отображение $f|_{\tilde{U}_j \setminus \{x\}} : \tilde{U}_j \setminus \{x\} \rightarrow U \setminus \{s\}$, где точка x – это единственная точка из прообраза $f^{-1}(s)$, лежащая в \tilde{U}_j , является обычным (неразветвленным) накрытием порядка $p_j > 1$. При этом компонента \tilde{U}_j с порядком накрытия p_j соответствует точке ветвления на R , также имеющей порядок p_j .

Во всех этих рассуждениях не использовалось особого вида многообразия S или разветвленного накрытия f , поэтому они также годятся и для общего случая.

Через l обозначим $\max\{n, m\}$. Утверждается, что R склеена в точности из l сфер Римана. Для этого достаточно показать, что уравнение $f(z) = \omega$, разрешенное относительно z , имеет ровно l различных корней (здесь $\omega \in S$ – не точка ветвления f). Это действительно так, потому что уравнение $f(z) = \omega$,

домноженное на знаменатель $b(z)$ рациональной функции f , представляет собой многочлен степени l относительно z .

Наша задача – понять строение римановой поверхности R .

4.1. Нахождение точек ветвления и определение их порядка

Рассмотрим случай точки ветвления f , имеющей конечный прообраз. Эта точка может быть и бесконечностью. Берем производную функции $f(z)$:

$$f'(z) = \frac{a'(z)b(z) - a(z)b'(z)}{b^2(z)}.$$

Не сокращая получившейся дроби, приравниваем к нулю числитель. Пусть z_1, \dots, z_q - это его корни с кратностями p_1, \dots, p_q соответственно ($z_i \neq z_j, i \neq j$). Тогда точка $s = f(z_i)$ будет точкой ветвления разветвленного накрытия f , и ее прообраз $\varphi^{-1}(s) \in R$ будет содержать точку ветвления $r \in R$ порядка $p_i + 1$, причем будет выполнено $\bar{f}(z_i) = r$ (про \bar{f} см. 1.2).

Чтобы разобраться с точкой, имеющей прообразом бесконечность, нужно сделать замену $g(z) = f(\frac{1}{z})$. Функция $g(z)$ также является рациональной. Приравняем к нулю числитель $g'(z)$. Мы получаем какое-то уравнение, и пусть у этого уравнения есть корень 0 кратности p . Тогда точка $g(0)$ будет точкой ветвления разветвленного накрытия f , и в прообразе $\varphi^{-1}(g(0))$ будет точка ветвления римановой поверхности R порядка $p + 1$.

Пусть у нас имеется k точек z_1, \dots, z_k , таких, что $f'(z_i) = 0, i = 1, \dots, k$. Тогда точки $f(z_1), \dots, f(z_k)$, как уже было сказано, будут точками ветвления для разветвленного накрытия f , а точки $\bar{f}(z_1), \dots, \bar{f}(z_k)$ будут точками ветвления на R , причем все они будут различны, в отличие от $f(z_1), \dots, f(z_k)$, которые могут и совпадать. Следовательно, на R у нас есть k точек ветвления, и пусть p_1, \dots, p_k - их порядки. Можно показать, что выполняется соотношение

$$p_1 + \dots + p_k - k = 2l - 2.$$

Эта формула представляет собой частный случай формулы Римана-Гурвица для разветвленных накрытий, и она может быть получена из следующей формулы Гаусса-Бонне:

$$\int_{\tilde{S} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}} K ds + \sum_{i=1}^k (2\pi - 2\pi p_i) = 2\pi \chi(\tilde{S}).$$

Здесь K – кривизна \tilde{S} во всех точках, кроме $\{z_1, \dots, z_k\}$, и она равна 1, т. к. метрика у нас перенесена с единичной сферы S с помощью локально изометричного отображения. Поэтому $\int_{\tilde{S} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}} K ds =$ площади $\tilde{S} =$ площади $R = 4\pi l$,

т. к. риманова поверхность R склеена из l сфер Римана. Через $\chi(\tilde{S})$ обозначена эйлерова характеристика сферы \tilde{S} , т. е. $\chi(\tilde{S}) = 2$. Эта формула может использоваться и в более общем случае, достаточно заменить \tilde{S} на \tilde{M} и S на M .

4.2. Построение римановой поверхности

Для построения римановой поверхности нужно взять l сфер Римана. Далее на этих сферах нужно разместить точки ветвления и провести между ними разрезы. По этим разрезам сферы Римана следует склеить между собой. Утверждается, что все это можно сделать с помощью следующей процедуры. Берется одна сфера Римана, и на ней отмечаются точки, имеющие те же координаты, что и $f(z_i)$, $i = 1, \dots, k$. Далее эти точки определенным образом разбиваются на $(l - 1)$ пару, причем одна и та же точка может попасть в разные пары, и не исключен случай, когда пару составляет дважды взятая одна и та же точка. Зафиксируем одну пару. Между точками этой пары опять же определенным образом проводится разрез. Затем мы берем еще одну сферу Римана, отмечаем на ней точки, имеющие те же координаты, что и точки данной пары, и проводим между ними точно такой же разрез. Эти два разреза склеиваем между собой, причем каждый край разреза склеивается с ему противоположным. Далее та же процедура проводится для второй пары и т. д. Таким образом, нам остается научиться разбивать точки на пары и проводить разрезы.

Опишем процедуру составления пар. Пусть $\omega \in S$ – произвольная точка – не точка ветвления f . Решаем уравнение $f(\zeta) = \omega$. Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_l \in \tilde{S}$ – его корни. Пусть c_i , $i = 1, \dots, k$ – это путь на \tilde{S} , который представляет собой петлю, начинающуюся и заканчивающуюся в точке ζ_1 . Кроме того, эта петля должна из всех точек z_1, \dots, z_k на \tilde{S} обойти только вокруг точки z_i , причем один раз. Пусть также d_j , $j = 1, \dots, l$ – это путь на \tilde{S} , соединяющий точку ζ_1 с точкой ζ_j . Зафиксируем j . Рассмотрим некоторое множество путей. Во-первых, в это множество включаем d_j , а кроме него, также пути, которые получаются следующим образом. Сначала проводится петля c_{i_1} , затем $c_{i_2}, c_{i_3}, \dots, c_{i_q}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq k$, $q = 1, \dots, k$. В конце проводится путь d_j . Образ каждого пути из этого множества при отображении f представляет собой петлю на S , начинающуюся и заканчивающуюся в точке ω . Все эти петли обходят одну или несколько точек $f(z_i)$, $i = 1, \dots, k$. Но только два из них обходят по одной точке. Пусть это будут точки $f(z_{i_1})$ и $f(z_{i_2})$. Тогда мы объединяем их в одну пару, и между ними будет проводиться разрез. Затем мы фиксируем другое j и т. д.

Пусть точки $f(z_{i_1})$ и $f(z_{i_2})$ попали в одну пару. Теперь надо провести разрез, соединяющий эти точки. Пусть g_i , $i = 1, \dots, k$ – это путь на \tilde{S} , соединяющий точку ζ_1 с точкой z_i . Будем также считать, что ζ_1 и z_i – начало и конец g_i , не принадлежат g_i , и g_i не содержит также никакой другой точки z_j , $j \neq i$. Разрез между $f(z_{i_1})$ и $f(z_{i_2})$ представляет собой путь, соединяющий эти точки и, кроме того, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Считаем, что начальная и конечная точки такого пути – $f(z_{i_1})$ и $f(z_{i_2})$, ему не принадлежат.
2. Этот путь не пересекает ни один из путей $f(g_i)$, $i = 1, \dots, k$, $i \neq i_1, i \neq i_2$, нечетное число раз.
3. Этот путь не пересекает ни один из уже проведенных разрезов.

Нужно учесть, что «касание» двух путей не следует считать пересечением.

В случае гладких путей «касание» означает, что один путь лежит локально по одну сторону от касательной к другому пути в точке, общей для них. Мы можем ограничиться только гладкими путями. Оказывается, что всегда существуют разрезы, удовлетворяющие поставленным условиям.

Далее мы берем сферу Римана, отмечаем на ней все точки $f(z_1), \dots, f(z_k)$, соединяем их соответствующими разрезами и, как описано выше, к каждому разрезу подклеиваем свою сферу Римана.

В результате мы получим риманову поверхность для многозначной функции $f^{-1}(z)$.

Для вычисления метрики \tilde{d} на \tilde{S} гораздо удобнее, если разрезы проведены по дугам больших окружностей. Но в результате нашего построения римановой поверхности разрезы могут оказаться самого произвольного вида, и, если мы хотим вычислять метрику, эти разрезы надо «выпрямить». Опишем этот процесс. Предположим, что на какой-то сфере у нас есть две точки и соединяющий их разрез. Проведем дугу большой окружности, соединяющую эти точки, и рассмотрим преобразование, представляющее собой гомотопию с закрепленными концами нашего разреза в эту дугу. Так как при склеивании римановой поверхности у нас есть две сферы с одинаковыми точками ветвления и тем же разрезом, преобразования на одной из сфер нужно проводить одновременно с преобразованиями на другой сфере. При гомотопии на любой из сфер наш разрез может «заметать» какие-то точки ветвления или части каких-то других разрезов. В этом случае «заметенная» часть переносится в те же самые точки, но на другую сферу, а именно на ту, на которой в данный момент также производится гомотопия. То есть наши две сферы как бы обмениваются «заметеными» кусками. В результате мы получаем разрез в виде дуги большой окружности. Затем те же самые действия могут быть применены к другому разрезу, но может так оказаться, что этот разрез будет начинаться на одной сфере, а продолжаться на другой. В таком случае нужно будет вести гомотопию сразу обеих частей разреза, причем каждого куска на двух сферах, т. е. одновременно придется рассматривать четыре сферы. Возможно также, что разрез будет проходить больше чем по двум сферам, и в таком случае их число еще увеличивается. Но в результате этих операций мы получим, что все наши разрезы будут дугами больших окружностей, и мы сможем вычислить метрику \tilde{d} .

Приведем пример вычисления метрики.

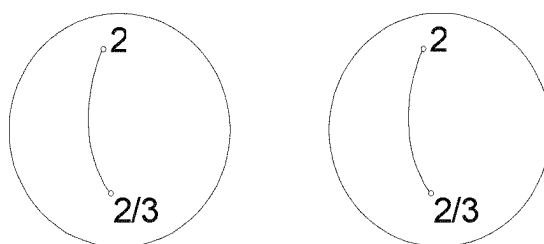
Пример 1. В этом примере вычисляется метрика на сфере \tilde{S} , перенесенная со сферы S с помощью рациональной функции

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + z + 1}.$$

Отображение f представляет собой двулистное разветвленное накрытие. Найдем точки, в которых производная $f'(z)$ зануляется. Для этого решаем уравнение:

$$(z^2 + 1)'(z^2 + z + 1) - (z^2 + 1)(z^2 + z + 1)' = 0.$$

Проведя элементарные преобразования, мы получим, что корнями будут точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$. Следовательно, точки ветвления отображения f — это точки $f(-1) = 2$ и $f(1) = 2/3$ на сфере S . Поэтому риманова поверхность R многозначной функции $f^{-1}(z)$ представляет собой две сферы, склеенные по разрезу, соединяющему точки 2 и $2/3$ (см. рисунок).



Разрезы проведены по кратчайшей, соединяющей точки ветвления.

Вычисляя метрику на R , мы тем самым вычисляем ее и на \tilde{S} , т. к. эти пространства можно отождествить с помощью изометрии $\bar{f}: \tilde{S} \rightarrow R$ (см. 1.2). Пусть нужно определить расстояние между точками $x_1, x_2 \in R$. Возможны два случая:

1. Точки x_1 и x_2 лежат на какой-то одной сфере. Мы считаем, что эта сфера пока еще не разрезана для склейки, хотя путь, по которому будет делаться разрез, уже проведен. Проведем также путь, соединяющий x_1 и x_2 и представляющий собой кратчайшую данной сферы. Предположим, что этот путь не имеет общей точки с внутренностью пути-разреза. Тогда расстояние между точками x_1 и x_2 будет равно длине этого пути. В противном случае мы от каждой из этих точек проводим по две кратчайших до концов разреза. В результате мы получим две ломаных, соединяющих точки x_1 и x_2 . Выберем ту из них, которая будет не длиннее другой. Ее длина как раз и будет равна расстоянию от точки x_1 до x_2 .

2. Точки x_1 и x_2 принадлежат разным сферам. В этом случае отметим на сфере, на которой лежит x_1 , точку \tilde{x}_2 , имеющую то же самое положение, что и точка x_2 на другой сфере. Так же, как и первом случае, проведем кратчайшую, соединяющую точки x_1 и \tilde{x}_2 . Но сейчас, если эта кратчайшая имеет общую точку с путем-разрезом, то ее длина и будет равняться расстоянию между x_1 и x_2 . В противном случае, как и прежде, проводим по две кратчайших от каждой из точек x_1 и \tilde{x}_2 до концов разреза. Мы опять получаем две ломаных, соединяющих x_1 с \tilde{x}_2 . Длина той из них, которая будет не длиннее другой, и равна расстоянию между точками x_1 и x_2 .

Если какая-нибудь из точек x_1 и x_2 лежит непосредственно на разрезе, то можно считать, что она принадлежит любой из сфер.

Таким образом, мы вычислили метрику на римановой поверхности R , а, следовательно, и на \tilde{S} .

Далее мы будем рассматривать римановы поверхности для четных эллиптических функций.

5. Римановы поверхности четных эллиптических функций

Определение 9. Мероморфная функция $v(u)$, $u \in \mathbb{C}$ называется эллиптической, если она имеет периоды ω_1 и ω_2 , отношение которых ω_1/ω_2 не является действительным числом.

Из определения видно, что эллиптическую функцию можно считать заданной на торе.

В дальнейших рассуждениях предполагаем периоды ω_1 и ω_2 фиксированными.

В теории эллиптических функций существует своего рода основная эллиптическая функция – функция Вейерштрасса $\wp(u)$, определяемая рядом

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum \left(\frac{1}{(u - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

где суммирование ведется по всем $\omega \neq 0$ вида $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, m_1 и m_2 – произвольные целые числа (не равные одновременно нулю).

Известна следующая теорема (см. [3, с. 192]):

Любую эллиптическую функцию $v(u)$ с периодами ω_1 и ω_2 можно представить в виде:

$$v(u) = P(\wp(u)) + \wp'(u)P_1(\wp(u)),$$

где $P(z)$ и $P_1(z)$ – некоторые рациональные функции, а функция $\wp(u)$ построена по периодам ω_1 и ω_2 .

В этой работе мы будем рассматривать построение римановых поверхностей только для четных эллиптических функций. Они могут быть представлены в виде $v(u) = P(\wp(u))$, где $P(z)$ – рациональная функция.

Риманова поверхность для функции $\wp^{-1}(u)$ имеет четыре точки ветвления, причем каждая второго порядка. Одна точка всегда ∞ , а остальные три обозначаются e_1, e_2, e_3 и определяются периодами ω_1 и ω_2 . При изменении ω_1, ω_2 мы будем получать различные точки e_1, e_2, e_3 , но всегда будет выполнено условие $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. Риманова поверхность состоит из двух сфер, на каждой из которых проведены по три разреза, каждый от точки e_i , $i = 1, 2, 3$ до ∞ . Сферы склеиваются по этим разрезам.

Опишем, как строить риманову поверхность для функции $(P(\wp(u)))^{-1}$, если известна риманова поверхность для рациональной $P(z)$. Нужно взять сферу Римана, на которой проведены разрезы от точек e_i , $i = 1, 2, 3$ до точки ∞ . Затем применим отображение \bar{P} (про \bar{P} см. 1.2), переводящее эту сферу в риманову поверхность многозначной функции $P^{-1}(z)$. Разрезы на сфере при этом перейдут в какие-то разрезы на римановой поверхности. Возьмем второй экземпляр этой римановой поверхности с такими же разрезами и склеим его

по этим разрезам с первым экземпляром. Понятно, что склеивать между собой следует одинаковые разрезы. В результате мы получим риманову поверхность для $(P(\varphi(u)))^{-1}$.

Рассмотрим пример, связанный с переносом метрики с помощью функции Вейерштрасса.

Пример 2. Мы посмотрим, какой диаметр может иметь тор, снабженный метрикой, перенесенной со сферы S с помощью функции Вейерштрасса $\varphi(u)$. При вариации $\varphi(u)$, обусловленной тем, что мы можем брать функции Вейерштрасса с различными периодами ω_1 и ω_2 , мы найдем \inf и \sup всех возможных диаметров.

Будем представлять себе нашу метрику заданной на римановой поверхности многозначной функции $\varphi^{-1}(u)$. Очевидно, что диаметр всякой поверхности, склеенной из двух сфер, не может превышать 2π и быть меньше π . Как раз эти числа и являются искомыми \sup и \inf соответственно.

\sup получается, когда мы устремляем точки e_1, e_2, e_3 к точке ∞ . Условие $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ нам не мешает. Расстояние от точки 0 на одной сфере до точки 0 на другой сфере стремится к 2π .

\inf получается, когда мы устремляем точки e_1, e_2, e_3 к точке 0 . Расстояние между двумя точками, расположенными на одной сфере, очевидно, не превосходит π . В случае, если точки расположены на разных сферах, между ними можно провести путь либо через ∞ , если его длина меньше π , либо через одну из точек e_i . Так как $e_i \rightarrow 0$, мы получаем, что длина такого пути будет $\leq \pi$.

Теперь опишем эквивалентные способы переноса метрики с M на \tilde{M} .

6. Перенос метрики

Кроме способа переноса метрики с M на \tilde{M} , описанного во введении, можно использовать и следующие два способа. Первый годится для общего случая, а второй только для частных случаев из Следствий 1 и 2, когда отображение π дифференцируемо:

1. Пусть ρ - это метрика на M . Определим на \tilde{M} сначала полуметрику ρ_1 :

$$\rho_1(x, y) = \rho(\pi(x), \pi(y)).$$

Затем уже определяем метрику ρ' :

$$\rho'(x, y) = \inf_{xLy} s_{\rho_1}(L),$$

где L - это всевозможные непрерывные пути на \tilde{M} , соединяющие x и y , а $s_{\rho_1}(L)$ - это длина пути L в полуметрике ρ_1 .

2. Так как π сейчас - дифференцируемое отображение, то ρ' можно задать так:

$$\rho'(x, y) = \inf_{xLy} \int_0^1 |T\pi(\dot{L}(t))| dt,$$

где L - это всевозможные кусочно гладкие пути на \tilde{M} , определенные на $[0, 1]$ и соединяющие точки x и y .

Легко можно показать, что каждый из способов дает одну и ту же метрику, которая совпадает с метрикой \tilde{d} , определенной по формуле (1).

7. Еще один частный случай

Опишем еще один частный случай разветвленного накрытия, при котором можно вычислять перенесенную метрику.

Пусть многообразии \tilde{N} - это сфера с g ручками, $g > 0$. Предполагаем, что \tilde{N} вложено в \mathbf{R}^3 . Вложение осуществляется так, чтобы ось OZ протыкала это многообразие «вдоль» и имела с ним $2g + 2$ общие точки. В каждом случае ось OZ должна быть осью симметрии для многообразия \tilde{N} .

Далее, пусть h - это отображение, которое отождествляет точки \tilde{N} , симметричные относительно оси OZ . Очевидно, что в результате этого отождествления мы получаем сферу. Обозначим ее через S . Видно также, что отображение h является разветвленным накрытием, причем точки ветвления h - это точки сферы S , общие с осью OZ . Это те самые $2g + 2$ точки, по которым OZ пересекается с \tilde{N} . Все они имеют второй порядок ветвления.

Описанная конструкция является построением на топологическом уровне. Если же мы хотим, чтобы сфера S была снабжена метрикой, эту же самую ситуацию можно представить следующим образом. Сфера S рассматривается как единичная сфера, стандартно вложенная в \mathbf{E}^3 , т. е. с центром в 0 . Она является римановым многообразием. Многообразии \tilde{N} , сферу с g ручками, мы строим по следующему алгоритму. Сначала берем единичную сферу и отмечаем на ней $2g + 2$ различные точки. Затем разбиваем эти точки на пары и обе точки каждой пары соединяем между собой разрезами. Разрезы не должны пересекаться друг с другом. Далее берем второй экземпляр сферы с такими же разрезами и по этим разрезам подклеиваем одну сферу к другой. В результате мы получаем пространство, гомеоморфное сфере с g ручками. Это и будет \tilde{N} . Если мы хотим, чтобы будущая метрика на \tilde{N} хорошо вычислялась, надо так выбирать точки и составлять пары, чтобы в качестве разрезов можно было брать дуги больших окружностей. В общем случае это может не получиться, так как такие разрезы будут пересекаться. Отображение $h : \tilde{N} \rightarrow S$ представляем в виде проекции двух наших сфер на сферу S , т. е. ограничение h на каждую из сфер - это тождественное отображение.

Вся эта конструкция представляет собой частный случай Предложения 2, и мы можем переносить метрику со сферы S на сферу с g ручками \tilde{N} , получая при этом пространство кривизны ≤ 1 по А.Д.Александрову. Если при построении \tilde{N} проводить «хорошие» разрезы, т. е. разрезы по дугам больших окружностей, то эту метрику можно эффективно вычислять.

8. Доказательство Предложения 1

Пусть $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ – разветвленное накрытие гладкого риманова многообразия M компактным многообразием \tilde{M} . Многообразия \tilde{M} и M предполагаются линейно связными. Риманова метрика на M обозначается через d .

Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. *На компактном топологическом пространстве X нельзя задать метрику $\rho : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$, которая индуцировала бы топологию слабее, чем исходная.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть такая метрика ρ существует. Тогда на X найдется такая точка x и ее открытая окрестность U в исходной топологии, что никакой открытый шар $B_r(x)$ с центром в точке x радиуса $r > 0$, взятый в метрике ρ , не содержится целиком в этой окрестности U . Пусть $B_{1/n}(x)$ – открытый шар радиуса $1/n$ с центром в точке x и пусть x_n – это точка из $B_{1/n}(x)$, такая, что $x_n \notin U$. Так как X – компактное пространство, то у последовательности $\{x_n\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим ее предел через x_0 . Таким образом, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$. Метрика ρ непрерывна на $X \times X$, поэтому $\rho(x_0, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_{n_k}, x) = 0$. Но $x_0 \neq x$, так как $x_0 \notin U$. Противоречие. ■

Лемма 2. *Пусть на \tilde{M} задана метрика ρ , превращающая отображение π в субметрию. Тогда для любой точки $x \in \tilde{M}$, такой, что $\pi(x)$ не принадлежит множеству ветвления π , существует окрестность U в исходной топологии, такая, что отображение $U \xrightarrow{\pi} \pi(U)$ является изометрией.*

Доказательство. Сначала покажем, что топология, индуцированная метрикой ρ , совпадает с исходной топологией многообразия \tilde{M} . Пусть $B_r[x], r > 0$ – шаровая окрестность точки x в топологии метрики ρ . Тогда $\pi(B_r[x]) = B_r[\pi(x)]$, так как π – субметрия. Если в M взять достаточно малую окрестность U' точки $y = \pi(x)$, то каждая компонента связности из прообраза $\pi^{-1}(U')$ будет взаимно однозначно соответствовать содержащейся в ней единственной точке из прообраза $\pi^{-1}(y)$. Возьмем именно такую окрестность U' и, кроме того, потребуем, чтобы $U' \subset B_r[\pi(x)]$. Тогда компонента связности из прообраза $\pi^{-1}(U')$, содержащая точку x , будет окрестностью в исходной топологии \tilde{M} и будет содержаться в $B_r[x]$. Мы показали, что топология метрики ρ не сильнее исходной. Применяя Лемму 1, мы получим, что она совпадает с ней.

Пусть точка $x \in \tilde{M}$ такая, что $\pi(x)$ не принадлежит множеству ветвления отображения π . Пусть \tilde{U} – такая окрестность точки x , что $\tilde{U} \xrightarrow{\pi} \pi(\tilde{U})$ – гомеоморфизм. Пусть также $B_r[x]$ – это шар радиуса r в точке x , такой, что $B_r[x] \subset \tilde{U}$. Тогда окрестность $U = B_{r/3}[x]$ будет искомой окрестностью, т. е. отображение $U \xrightarrow{\pi} \pi(U)$ будет изометрией. Это действительно так. Предположим, что $x_1, x_2 \in U$ и $\rho(x_1, x_2) = s$. Возьмем шар $B_s[x_1]$ радиуса s с центром в точке x_1 . Ясно, что $B_s[x_1] \subset B_r[x]$. Точка x_2 принадлежит границе этого шара. Так как π субметрия, $\pi(B_s[x_1]) = B_s[\pi(x_1)]$, а так как ограничение π на

$B_s[x_1]$ еще и гомеоморфизм, $\pi(x_2)$ принадлежит границе шара $B_s[\pi(x_1)]$, т. е. $d(\pi(x_1), \pi(x_2)) = s$, что и требовалось доказать. ■

Теперь докажем предложение.

Предложение 1. Пусть $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ – разветвленное накрытие гладкого риманова многообразия M компактным многообразием \tilde{M} . Многообразия \tilde{M} и M линейно связны. Риманова метрика на M обозначается через d . Тогда на \tilde{M} существует единственная внутренняя метрика \tilde{d} , такая, что отображение $\pi : (\tilde{M}, \tilde{d}) \rightarrow (M, d)$ является субметрией.

Доказательство. Сначала докажем существование. Для этого явно построим метрику \tilde{d} и покажем, что отображение $\pi : (\tilde{M}, \tilde{d}) \rightarrow (M, d)$ превращается при этом в субметрию. После этого докажем, что метрика \tilde{d} – внутренняя. Метрика \tilde{d} определяется следующим образом.

Пусть $x, y \in \tilde{M}$. Тогда

$$\tilde{d}(x, y) = \inf_{xLy} s_d(\pi(L)),$$

где L – это всевозможные непрерывные пути на \tilde{M} , соединяющие x и y , а $s_d(\pi(L))$ – это длина пути $\pi(L)$ на M в метрике d .

Пусть $B_r[x]$ – шар радиуса r с центром в точке x . Покажем, что $\pi(B_r[x]) \subset B_r[\pi(x)]$. Пусть $y \in B_r[x]$. Тогда существует последовательность кривых c'_1, \dots, c'_n, \dots , соединяющих точки x и y , такая, что $\tilde{d}(x, y) = \inf_i s_d(\pi(c'_i)) \leq r$. Но поскольку метрика d на M внутренняя, а каждая из кривых $\pi(c'_i)$ представляет собой непрерывную кривую, соединяющую точки $\pi(x)$ и $\pi(y)$, мы получаем, что $d(\pi(x), \pi(y)) \leq \inf_i s_d(\pi(c'_i)) \leq r$, т. е. $\pi(y) \in B_r[\pi(x)]$, что и требовалось доказать.

Покажем, что $B_r[\pi(x)] \subset \pi(B_r[x])$. Пусть $z' \in B_r[\pi(x)]$. Тогда существует последовательность кривых c_1, \dots, c_n, \dots , соединяющих точки $\pi(x)$ и z' , такая, что $d(\pi(x), z') = \inf_i s_d(c_i) \leq r$. Без ограничения общности можно считать, что поднятие \tilde{c}_i каждой кривой c_i , начинающееся в точке x , оканчивается в одной и той же точке. Обозначим эту точку через z . Понятно, что $\pi(z) = z'$. Для $\tilde{d}(x, z)$ в соответствии с определением имеем неравенство $\tilde{d}(x, z) \leq \inf_i s_d(\pi(\tilde{c}_i)) \leq r$, т. е. $z \in B_r[x]$, что и требовалось доказать.

Покажем, что метрика \tilde{d} внутренняя. Так как отображение π представляет собой субметрию, то применяя Лемму 2, мы получаем, что $\pi : (\tilde{M}, \tilde{d}) \rightarrow (M, d)$ будет локальной изометрией, если с \tilde{M} выбросить дискретное множество точек и с M их образы. Отсюда, в силу определения длины кривой, напрямую следует, что длина любой кривой L на \tilde{M} в метрике \tilde{d} совпадает с длиной кривой $\pi(L)$ на M в метрике d . Поэтому из определения \tilde{d} мы получаем, что

$$\tilde{d}(x, y) = \inf_{xLy} s_{\tilde{d}}(L),$$

где L – это всевозможные непрерывные пути на \tilde{M} , соединяющие x и y , а $s_{\tilde{d}}(L)$ – это длина пути L на \tilde{M} в метрике \tilde{d} . Это в точности и означает, что метрика \tilde{d} – внутренняя.

Пусть теперь на \tilde{M} существует внутренняя метрика ρ , превращающая отображение $\pi : (\tilde{M}, \rho) \rightarrow (M, d)$ в субметрию. Покажем, что она совпадает с \tilde{d} . Тем самым мы докажем единственность ρ . Пусть $x, y \in \tilde{M}$. Так как ρ – внутренняя метрика, $\rho(x, y) = \inf_{xLy} s_\rho(L)$, где L – это всевозможные непрерывные пути на \tilde{M} , соединяющие x и y . Но так как $\pi : (\tilde{M}, \rho) \rightarrow (M, d)$ субметрия, применяя Лемму 2, мы получаем, что $s_\rho(L) = s_d(\pi(L))$, и, следовательно, $\rho(x, y) = \inf_{xLy} s_d(\pi(L))$, что и требовалось доказать.

Предложение доказано. ■

9. Доказательство Предложения 2

В этом пункте мы рассматриваем только двумерные многообразия. Метрика \tilde{d} , поднимаемая из метрики d на M с помощью отображения π , определяется по формуле (1) из введения.

Предложение 2. Пусть $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ разветвленное накрытие гладкого двумерного риманова многообразия M двумерным многообразием \tilde{M} . Многообразия \tilde{M} и M линейно связны. Риманова метрика на M обозначается через d . Гауссова кривизна M не превосходит χ . Тогда метрика \tilde{d} на \tilde{M} , поднятая из метрики d на M с помощью отображения π , превращает \tilde{M} в пространство кривизны $\leq \chi$ по А.Д.Александрову.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ – открытое покрытие M , замкнутое относительно конечного числа пересечений. Обозначим через $\{\tilde{U}_{ij}\}$, $1 \leq j \leq n_i$ компоненты связности прообраза $\pi^{-1}(U_i)$. Если U_i не содержит точек ветвления и при этом достаточно мала, что можно было обеспечить при выборе покрытия, то n_i равно порядку разветвленного накрытия π , и для каждой компоненты $\{\tilde{U}_{ij}\}$ отображение $\pi|_{\tilde{U}_{ij}} : \tilde{U}_{ij} \rightarrow U_i$ является гомеоморфизмом. Можно также рассматривать все эти отображения как накрытия порядка $k_j = 1$.

Пусть теперь U_i содержит точку ветвления y . Будем считать U_i достаточно малой окрестностью, а именно, настолько малой, чтобы U_i не содержало других точек ветвления, отличных от y , и чтобы каждая компонента \tilde{U}_{ij} , $1 \leq j \leq n_i$ содержала только одну точку x_j из прообраза $\{x_1, \dots, x_{n_i}\} = \pi^{-1}(y)$. Если это условие выполнено, то каждое из отображений

$$\pi|_{\tilde{U}_{ij} \setminus \{x_j\}} : \tilde{U}_{ij} \setminus \{x_j\} \rightarrow U_i \setminus \{y\}, \quad 1 \leq j \leq n_i,$$

является накрытием некоторого порядка k_j (возможно что $k_j = 1$).

Теперь опять рассмотрим все U_i . Для каждого U_i из покрытия $\{U_i\}$ многообразия M выберем только одну компоненту связности \tilde{U}_{ij} . Зафиксируем этот выбор. Тогда этот выбор определит некоторый орбифолд O следующим образом. M будет подстилающим пространством этого орбифолда, $\{U_i\}$ – требуемым покрытием M (см. Определение 7), а в качестве \tilde{U}_i для каждого множества U_i берем выбранную компоненту \tilde{U}_{ij} (если U_i достаточно малая окрестность, то \tilde{U}_{ij} гомеоморфна \mathbf{R}^2). U_i ставится в соответствие группа \mathbf{Z}_{k_j} – циклическая

группа порядка k_j . Эта группа действует на $\tilde{U}_i = \mathbf{R}^2$ как группа поворотов вокруг начала координат на углы, кратные π/k_j .

На каждом из этих орбифолдов задана метрика, так как метрики на каждом из множеств \tilde{U}_{ij} , индуцированные метрикой на \tilde{M} , удовлетворяют Определению 8 (см. пункт 2). Таким образом, можно говорить о кривизне орбифолдов.

Утверждение о том, что \tilde{M} является пространством А.Д.Александрова кривизны $\leq \chi$, эквивалентно утверждению о том, что все наши орбифолды имеют кривизну $\leq \chi$. Покажем, что это требование выполняется. Применим теорему 5.3 из [1], утверждающую следующее:

Пусть Q – это орбифолд с метрикой, индуцированной гладкой римановой метрикой его подстилающего пространства Q_0 . Следующие условия необходимы и достаточны, чтобы кривизна Q была $\leq \chi$.

(1) Секционная кривизна Q_0 не превосходит χ .

(2) Локально замыкание каждой линейно связной компоненты каждого слоя является выпуклым множеством в Q_0 .

(3) Для каждой точки $x \in Q_0$ кусочно-сферический полиэдр \tilde{S}_x удовлетворяет условию $SAT(1)$.

В нашем случае подстилающее пространство Q_0 – это многообразие M , его секционная кривизна совпадает с гауссовой и не превосходит χ , линейно-связные компоненты каждого слоя – конечное множество точек на M (это в точности точки ветвления разветвленного накрытия π), \tilde{S}_x – это окружность длины $2\pi k_j$, а Q – наш орбифолд O . Условие $SAT(k)$, наложенное на метрическое пространство, означает, что это пространство удовлетворяет Определению 4 (см. пункт 2), но не локально, для некоторой окрестности U_x , а глобально. Очевидно, что все условия теоремы выполнены, и пространство \tilde{M} имеет кривизну $\leq \chi$ по А.Д.Александрову.

Предложение доказано. ■

Из Предложений 1 и 2 для наших частных случаев вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Пусть сфера Римана \tilde{S} отображается на сферу Римана S с помощью рациональной функции f . Тогда на \tilde{S} существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение f является субметрией, и эта метрика превращает \tilde{S} в пространство кривизны ≤ 1 . ■

Следствие 2. Пусть тор \tilde{T} отображается на сферу Римана S с помощью эллиптической функции v . Тогда на \tilde{T} существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение v является субметрией, и эта метрика превращает \tilde{T} в пространство кривизны ≤ 1 . ■

Следствие 3. Пусть многообразие \tilde{N} – сфера с g ручками, $g > 0$, отображается на сферу Римана S с помощью отображения h (отображение h определяется в пункте б). Тогда на \tilde{N} существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение h является субметрией, и эта метрика превращает \tilde{N} в пространство кривизны ≤ 1 . ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Charney R., Davis M. *Singular metrics of nonpositive curvature on branched covers of riemannian manifolds* // American Journal of Mathematics 115 (1993). P.929-1009.
2. Бураго Ю., Громов М., Перельман Г. *Пространства А.Д.Александрова с ограниченными снизу кривизнами* // УМН. 1992. N 2. С.16.
3. Гурвиц А., Курант Р. *Теория функций*. М.: Наука, 1986.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ФАСЕТНОСТИ ГРЕБНЕВЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ МНОГОГРАННИКА СВЯЗНЫХ $2k$ -ФАКТОРОВ

В.А. Мищенко

In this paper a polytope — convex hull of connected k -factors, where k is even, is considered. A necessary condition are derived, under which a comb inequality defines a facet of the polytope. It restrict the number of combs, which pretend to induce a facet.

1. Введение

В последние годы рядом авторов активно развивается полиэдральный подход к решению задач дискретной оптимизации (ДО), согласно которому с задачей ассоциируется выпуклая оболочка векторов инцидентий допустимых решений [5]. При этом вершины получающегося многогранника и допустимые решения задачи находятся во взаимно-однозначном соответствии, что позволяет применять для ее решения методы линейного программирования (ЛП) и целочисленного линейного программирования. Однако, как правило, задача построения полного линейного описания выпуклой оболочки достаточно сложна как с теоретической, так и с алгоритмической точки зрения. Но даже если такое описание имеется, применение аппарата ЛП существенно затрудняется большим количеством ограничений. Поэтому ограничения, участвующие в линейном описании многогранника, целесообразно использовать в качестве отсекающих плоскостей, отталкиваясь от того или иного релаксационного множества. В связи с этим полезным является даже частичное линейное описание. Особую роль при этом играют опорные неравенства, порождающие грани максимальной размерности (фасеты) многогранника задачи. Важность таких фасетных неравенств объясняется следующими соображениями: во-первых, эти неравенства (с точностью до эквивалентности) входят в каждую линейную систему,

© 1999 В.А. Мищенко

E-mail: mishenko@univer.omsk.su

Омский государственный университет

описывающую многогранник; во-вторых, они являются в известном смысле «достаточно сильными» отсечениями, что подтверждается результатами, полученными в последние годы при решении дискретных экстремальных задач [9].

В данной работе рассматривается многогранник связных k -факторов полного графа. Под k -фактором полного n -вершинного графа ($k < n$, kn – четно) понимается его остовный однородный степени k подграф. Заметим, что при $k = 2$ этот многогранник является многогранником гамильтоновых циклов симметричной задачи коммивояжера, и поэтому его можно рассматривать как обобщение последнего.

Эдмондсом и Джонсоном в [8] было дано линейное описание выпуклой оболочки k -факторов для произвольного k (без условия связности).

В настоящее время известно большое количество классов фасетных неравенств для многогранника связных 2-факторов [11, 12], хотя его полное линейное описание не найдено. Условие связности оказалось довольно трудным препятствием на этом пути.

Важный класс полупространств, опорных к многограннику, ассоциированному с задачей ДО, образуют такие, нормали которых суть векторы инцидентий различных подграфов полного графа. Неравенства, порождающие такие полупространства, называются ранговыми. Характерной особенностью ранговых неравенств является то, что они образуют множества всех опорных неравенств с коэффициентами 0 и 1 в левой части. Для многогранника связных k -факторов при $k = 2$ М.Гретшелем и В.Паллейбланком в [12] полностью описан класс фасетных ранговых неравенств. Этот класс, содержащий, в частности, широко известные неравенства 2-сочетаний (введенные Эдмондсом в [7]), совпадают с множеством простых деревьев клик [12]. При $k > 2$ вопрос о полной характеристизации ранговых неравенств, порождающих фасеты многогранника связных k -факторов, остается открытым.

В [4] получены достаточные и ряд необходимых условий фасетности ранговых неравенств для этого многогранника, с помощью которых выделены три класса фасетных неравенств. Структура левых частей последних позволяет говорить, что полученные результаты являются обобщающими по отношению к случаю $k = 2$. Этими классами являются так называемые тривиальные фасеты, совпадающие с ограничениями единичного куба, неравенства, порожденные кликами, и неравенства, порожденные графами Эдмондса [7] (при некоторых дополнительных условиях).

В данной работе рассматриваются ранговые неравенства, порожденные так называемыми простыми гребнями, которые являются обобщением графов Эдмондса. В [10] показано, что при $k = 2$ гребневые неравенства порождают фасеты многогранника симметричной задачи коммивояжера. Для этих неравенств в [3] получены необходимые условия фасетности относительно многогранников связных 3-факторов и 4-факторов. Представленная ниже теорема обобщает случай 4-факторов до произвольного четного фактора.

2. Основные понятия и факты

Пусть $K_n = (V, E)$ – полный неориентированный n -вершинный граф без петель и кратных ребер. Для любого подграфа, отличного от K_n , через VG и EG будем соответственно обозначать множества его вершин и ребер. Граф G_1 называется подграфом графа G_2 (обозначение $G_1 \subseteq G_2$), если $VG_1 \subseteq VG_2$ и $EG_1 \subseteq EG_2$. Для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv , где u, v – вершины из V , инцидентные ребру e .

Каждое множество $R \subset E$ индуцирует некоторый подграф T , в котором $ET = R$ и VT – совокупность вершин из V , инцидентных ребрам из R . Граф, индуцированный множеством ребер R , иногда будем обозначать через R . Для подграфов G, F из K_n положим $G \cup F = (VG \cup VF, EG \cup EF)$, $G \cap F = EG \cap EF$, и если $F \subseteq G$, то $G \setminus F = (VG, EG \setminus EF)$.

Кликой будем называть произвольный полный подграф графа K_n .

Степень вершины $u \in V$ относительно графа $G \subset K_n$, т.е. количество ребер графа G , инцидентных вершине u , будем обозначать через $d_G(u)$. Если $G = K_n$, то в обозначении $d_G(u)$ символ G будем опускать.

Степенной последовательностью графа называется список степеней его вершин. Последовательность $d = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ целых неотрицательных чисел ниже называется m -последовательностью; m -последовательность d называется графической, если существует граф, степенная последовательность которого с точностью до упорядочения совпадает с d . Этот граф называется реализацией m -последовательности d .

Назовем m -последовательность правильной, если $\sum_{i=1}^m d_i$ – четное число.

При этом ясно, что согласно «леммы о рукопожатиях» всякая графическая последовательность является правильной.

Для последовательностей будем также использовать запись $d = (c_1^{k_1}, c_2^{k_2}, \dots, c_p^{k_p})$, где числа c_i попарно различны, а показатель k_i означает количество повторений числа c_i в последовательности d .

С графом K_n свяжем евклидово пространство R^E размерности $(n^2 - n)/2$, взаимно-однозначно поставив в соответствие каждому ребру ось координат в R^E . Это пространство может рассматриваться как множество вектор-столбцов x , компоненты которых индексируются элементами из E . Если $x \in R^E$ и $R \subset E$, то через $x(R)$ обозначим линейную форму $\sum_{e \in R} x_e$.

Вектором инцидентий произвольного подграфа $G \subseteq K_n$ называется вектор $x^G \in R^E$ с компонентами $x_e^G = 1$ при $e \in EG$, $x_e^G = 0$ при $e \notin EG$. Последнее правило, очевидно, задает взаимно однозначное соответствие между множеством подграфов графа K_n и множеством вершин единичного куба в пространстве R^E . На основании этого соответствия там, где это не вызовет недоразумений, $(0,1)$ -вектор x мы будем также называть подграфом графа K_n .

Множество $P \subset R^E$ называется многогранником, если P является выпуклой оболочкой конечного числа точек. Под размерностью $\dim P$ многогранника P будем понимать уменьшенную на 1 мощность максимального аффинно независимого семейства его точек. Линейное неравенство $a^T x \leq a_0$

$(a, x \in R^E, a \neq 0, a_0 \in R^1)$ называется опорным относительно многогранника P , если существуют такие $x', x'' \in P$, что $a^T x' = a_0$ и $a^T x'' < a_0$. Всякое опорное к P неравенство порождает множество $\{x \in P | a^T x = a_0\}$, которое называется гранью многогранника P . Опорное к P неравенство называется фасетным, если оно порождает фасету многогранника P . Множество всех вершин многогранника P будем обозначать через $vert P$. Наконец, опорные к P неравенства $a^T x \leq a_0$ и $c^T x \leq c_0$ называются эквивалентные (относительно P), если они порождают одну и ту же грань.

Как уже говорилось, фасетные неравенства играют особую роль для многогранника, так как каждое из них (с точностью до эквивалентности) присутствует в любой системе линейных уравнений и неравенств, описывающих этот многогранник.

Обозначим через $\tau_{k,n}$ множество всех связных k -факторов в K_n . Многогранником связных k -факторов является множество

$$P_{k,n} = conv\{x^H \in R^E | H \in \tau_{k,n}\}.$$

Так как $\tau_{1,n} = \emptyset$, $\tau_{n-1,n} = \{K_n\}$ и случаи $n \leq 4$ тривиальны с точки зрения построения линейного описания многогранника $P_{k,n}$, ниже мы будем всюду полагать, что $2 \leq k \leq n - 2$, и $n \geq 5$.

Пусть $G \subset K_n$. Ранг $r_r(G)$ подграфа G относительно $\tau_{k,n}$ определим так:

$$r_k(G) = \max\{|EG \cap EH|, \text{ при условии, что } H \in \tau_{k,n}\}.$$

Ранговым неравенством, индуцированным графом G , называется линейное неравенство вида

$$x(EG) \leq r_k(G). \tag{1}$$

Как уже говорилось, ранговые неравенства в силу определения величины $r_k(G)$ образуют класс всех опорных к $P_{k,n}$ неравенств с коэффициентами 0 и 1 в левой части. Кроме того, нормаль порождаемой неравенством (1) гиперплоскости в R^E определяется подграфом G (является его вектором инциденций). Поэтому представляет интерес следующий вопрос: существуют ли среди ранговых неравенств фасетные неравенства и если существуют, то какими графами они индуцируются?

В [4] доказано следующее необходимое условие фасетности рангового неравенства относительно $P_{k,n}$ при $k \geq 2$.

Теорема 1. Пусть неравенство $a^T x \leq a_0, a \neq 0$ опорно к $P_{k,n}, \{x^1, x^2, \dots, x^t\}$ — множество вершин порождаемой им грани. Если $\left| \bigcap_{i=1}^t E x^i \right| \geq 2$ или $\left| E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^t E x^i \right) \right| \geq 2$, то неравенство $a^T x \leq a_0$ не является фасетным. ■

Определение . Пусть $P, D_1, D_2, \dots, D_q \subset K_n$ — семейство клик, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $|VP| = p, |VD_i| = d_i, i = 1, \dots, q;$

- 2) $VD_i \cap VD_j = \emptyset$;
 3) $|VD_i \cap VP| = 1$.

Тогда граф $F = P \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_q$ называется простым гребнем. При этом P будем называть ручкой простого гребня F , или просто ручкой, а D_i — зубом простого гребня F или просто зубом.

Кроме того, пусть в дальнейшем $P_0 \subset K_n$ — клика порядка p_0 , такая, что $VP_0 = VK_n \setminus VF$. Из вышесказанного следует, что $p + q(d - 1) + p_0 = n$.

Следующие параграфы посвящены поиску необходимых условий на величины p , q , d_i , p_0 , при которых ранговое неравенство, порожденное простым гребнем F :

$$x(EF) \leq r_{2k}(F).$$

может быть фасетным для многогранника связных $2k$ -факторов.

3. Необходимое условие фасетности гребневых неравенств

В дальнейшем будем рассматривать только графы без петель и кратных ребер.

Для доказательства теоремы нам понадобится несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть G_n — связный граф, в котором ровно n вершин степени $2k$, $k \geq 2$, тогда, если $n \geq 2k - 1$, то существует связный граф с $n + 1$ вершиной степени $2k$ и таким же набором степеней остальных вершин.

Доказательство. Докажем, что в G_n существует k попарно несмежных ребер.

Предположим, что не существует k попарно несмежных ребер, тогда пусть $H \subseteq G_n$ — максимальное паросочетание. По предположению $|EH| \leq k - 1$, то есть $|VH| \leq 2k - 2$. Отсюда следует, что по крайней мере одна вершина степени $2k$ не принадлежит VH . Пусть $u \in VG_n \setminus VH$. Так как $d_G(u) = 2k$, то u инцидентна $2k$ вершинам, а поскольку $|VH| \leq 2k - 2$, то существует $v \in VG \setminus VH$, инцидентная u . Ребро uv не является смежным ни для какого ребра из EH , значит, $EH \cup \{uv\}$ — совокупность попарно несмежных ребер, и $|EH| < |EH \cup \{uv\}|$, что противоречит максимальнойности H . Отсюда следует, что в G_n существует k попарно несмежных ребер.

Построим G_{n+1} . Добавим к VG_n вершину w , то есть $VG_{n+1} = VG_n \cup \{w\}$. Пусть $e_i = u_i v_i$, $i = 1 \dots k$ — совокупность попарно несмежных ребер из G_n . Тогда $EG_{n+1} = (EG_n \setminus (\cup_{i=1}^k e_i)) \cup (\cup_{i=1}^k u_i w) \cup (\cup_{i=1}^k v_i w)$.

Из построения видно, что $d_{G_{n+1}}(w) = 2k$, а степени вершин G_n не изменились. Следовательно, G_{n+1} имеет ровно $n + 1$ вершину степени $2k$ и такой же, как у G_n , набор степеней остальных вершин. ■

Из леммы 1 очевидно следует существование связных $2k$ -факторов при $k \geq 2$.

Лемма 2. При $n \geq 2k + 2$ n -последовательность $(2k^{n-1}, 2)$ может быть реализована связным графом.

Доказательство. Докажем по индукции. Пусть G_n – граф, реализующий n -последовательность $(2k^{n-1}, 2)$. Построим G_{2k+2} . Для этого возьмем $VG_{2k+2} = VK_{2k+1} \cup \{u\}$. Выберем ребро $v_1v_2 \in K_{2k+1}$, тогда $EG_{2k+2} = (EK_{2k+1} \setminus \{v_1v_2\}) \cup \{uv_1, uv_2\}$. Легко видеть, что $d_{G_{2k+2}}(u) = 2$, а $\forall v \in VK_{2k+1} d_{G_{2k+2}}(v) = 2k$. Таким образом, база индукции у нас есть.

Предположим, что граф G_{n_0} $n_0 \geq 2k + 2$ существует. В G_{n_0} ровно $n_0 - 1$ вершин степени $2k$, и так как $n_0 - 1 \geq 2k + 2 - 1 \geq 2k - 1$, то по лемме 1 существует G_{n_0+1} . По принципу математической индукции G_n существует при $n \geq 2k + 2$. ■

Лемма 3. При $n \geq 2k + 3, 1 \leq l \leq n$ n -последовательность $((2k)^{n-l}, (2k - 2)^l)$ может быть реализована связным графом.

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи $l = 1$ и $l = 2$. Построим связные графы G_1 и G_2 , реализующие соответственно $(2k + 3)$ -последовательности $((2k)^{2k+2}, (2k - 2)^1)$ и $((2k)^{2k+1}, (2k - 2)^2)$. Пусть G – такой граф, что $VG = VK_{2k+1} \cup \{w\}$. Так как K_{2k+1} состоит из $2k + 1$ вершины степени $2k$, то из доказательства леммы 1 следует, что существуют попарно несмежные ребра $e_1, e_2, \dots, e_k \in EK_{2k+1}$. Пусть $e_i = u_i v_i$, где $i = 1 \dots (k - 1)$. Тогда $EG = (EK_{2k+1} \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} e_i)) \cup (\cup_{i=1}^{k-1} u_i w) \cup (\cup_{i=1}^{k-1} v_i w)$. Граф G реализует $(2k + 2)$ -последовательность $((2k)^{2k+1}, (2k - 2)^1)$. Из существования G по лемме 1 следует существование связного графа G_1 .

Теперь построим G_2 . Пусть $VG_2 = VG \cup \{w\}$. Так как G содержит $2k + 1$ вершину степени $2k$, то из доказательства леммы 1 следует, что существуют попарно несмежные $e_1, e_2, \dots, e_k \in EK_{2k+1}$. Пусть $e_i = u_i v_i$, где $i = 1 \dots (k - 1)$. Тогда $EG_2 = (EG \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} e_i)) \cup (\cup_{i=1}^{k-1} u_i w) \cup (\cup_{i=1}^{k-1} v_i w)$. Из построения видно, что граф G_2 реализует $(2k + 3)$ -последовательность $((2k)^{2k+1}, (2k - 2)^2)$, также из построения следует его связность.

Докажем существование связных реализаций n -последовательностей $((2k)^{n-1}, (2k - 2)^1)$ и $((2k)^{n-2}, (2k - 2)^2)$ индукцией по n . При $n = 2k + 3$ графы G_1 и G_2 являются реализациями соответствующих последовательностей. Они и станут базой индукции. Предположим, что существуют связные графы, реализующие n_0 -последовательности $((2k)^{n_0-1}, (2k - 2)^1)$ и $((2k)^{n_0-2}, (2k - 2)^2)$, при $n_0 \geq 2k + 3$. В этих графах вершин степени $2k$ не менее, чем $2k - 1$, следовательно, по лемме 1 существуют связные графы, реализующие $(n_0 + 1)$ -последовательности $((2k)^{n_0}, (2k - 2)^1)$ и $((2k)^{n_0-1}, (2k - 2)^2)$. По принципу математической индукции для любого $n \geq 2k + 3$ существуют связные реализации n -последовательностей $((2k)^{n-1}, (2k - 2)^1)$ и $((2k)^{n-2}, (2k - 2)^2)$.

Докажем случай $3 \leq l \leq n$. Если $3 \leq l \leq (2k + 1)$, то возьмем граф K_{2k+1} и выберем в нем цикл C длины l . В силу полноты K_{2k+1} такой цикл существует. Тогда пусть граф G_l , такой, что $VG_l = VK_{2k+1}$, а $EG_l = EK_{2k+1} \setminus EC$. Очевидно, что граф G_l связный и реализует $(2k + 1)$ -последовательность $((2k)^{2k+1-l}, (2k - 2)^l)$. Он будет базой индукции. В случае $(2k + 1) < l \leq n$ в

качестве базы индукции G_l возьмем $(2k - 2)$ -фактор на l вершинах. Существование такого графа следует из леммы 1. Таким образом, при $3 \leq l \leq n$ база индукции есть.

Предположим, что существует граф G_{l,n_0} , реализующий n_0 -последовательность $((2k)^{n_0-l}, (2k-2)^l)$. Докажем, что в нем существует k попарно несмежных ребер. Предположим что это не так. Пусть $H \subseteq G_{l,n_0}$ — максимальное паросочетание. По предположению $|EH| \leq k - 1$, то есть $|VH| \leq 2k - 2$. Пусть существует вершина u степени $2k$, не принадлежащая VH , тогда в силу того, что $|VH| \leq 2k - 2$, существует $v \in VG_{l,n_0} \setminus VH$, инцидентная u . Ребро uv не является смежным ни для какого ребра из EH , значит, $EH \cup \{uv\}$ — совокупность попарно несмежных ребер и $|EH| < |EH \cup \{uv\}|$, что противоречит максимальнойности H . Отсюда следует, что в G_{l,n_0} существует k попарно несмежных ребер.

Пусть все вершины из $VG_{l,n_0} \setminus VH$ имеют степень $2k - 2$, тогда в силу того, что $|VH| \leq 2k - 2$, а $|VG_{l,n_0}| \geq 2k + 1$, существуют две вершины $u, v \in VG_{l,n_0} \setminus VH$ степени $2k - 2$. Из максимальнойности H следует, что u и v инцидентны всем вершинам из H . Пусть $u_0v_0 \in EH$. Ребра u_0u и v_0v существуют и не являются смежными ни для какого ребра H , кроме u_0v_0 . Тогда пусть H_1 такой, что $VH_1 = VH \cup \{u, v\}$, а $EH_1 = (EH \setminus u_0v_0) \cup \{u_0u, v_0v\}$. По построению H_1 является паросочетанием, и $|EH_1| > |EH|$, что противоречит максимальнойности H . Таким образом, существование в G_{l,n_0} k попарно несмежных ребер доказано. Построим G_{l,n_0+1} . Добавим к VG_{l,n_0} вершину w , то есть $VG_{l,n_0+1} = VG_{l,n_0} \cup \{w\}$. Пусть $e_i = u_i v_i$, $i = 1 \dots k$ — совокупность попарно несмежных ребер из G_n . Тогда $EG_{l,n_0+1} = (EG_{l,n_0} \setminus (\cup_{i=1}^k e_i)) \cup (\cup_{i=1}^k u_i w) \cup (\cup_{i=1}^k v_i w)$. Из построения видно, что $d_{G_{l,n_0+1}}(w) = 2k$, а степени вершин G_{l,n_0} не изменились. Следовательно, G_{l,n_0+1} реализует $(n_0 + 1)$ -последовательность $((2k)^{n_0+1-l}, (2k - 2)^l)$. По принципу математической индукции при $3 \leq l \leq n$ и $n \geq 2k + 3$ существует связный граф, реализующий n -последовательность $((2k)^{n-l}, (2k - 2)^l)$. ■

Теорема 2. Пусть $F \subset K_n$ — простой гребень. Если выполняются следующие условия:

- a) $p_0 = 0$ или $p_0 \geq 2k + 1$,
- b) $d_i \geq 2k + 2$, $i = 1 \dots q$,
- c) $p \geq 2k + 3$,

то ранговое неравенство

$$x(EF) \leq r_{2k}(F)$$

не является фасетным к $P_{2k,n}$.

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) $p \geq 2k + 3, q \leq p, d_i \geq 2k + 2, p_0 = 0$; 2) $p \geq 2k + 3, q \leq p, d_i \geq 2k + 2, p_0 \geq 2k + 1$ и покажем, что в этих случаях неравенство $x(EF) \leq r_{2k}(F)$ не является фасетным.

1) Сначала рассмотрим случай $p_0 = 0$, то есть, когда $VF = VK_n$.

Из определения ранга следует, что $r_{2k}(F) \leq k|VF|$. Покажем, что $r_{2k}(F) = k|VF|$, для чего конструктивно построим граф H^* , на котором достигается оценка $|EH^* \cap EF| = k|VF|$.

Пусть H_1 — связная реализация p -последовательности $((2k)^{p-q}, (2k-2)^q)$ на множестве вершин VP . Поскольку $p \geq 2k+3$, то по лемме 3 такой граф существует. Так как P — клика, то $H_1 \subseteq P$. При этом можно так построить H_1 , что вершины, в которых зубья присоединяются к ручке, будут иметь степень $2k-2$. Другими словами:

$$\begin{aligned} d_{H_1}(u) &= 2k-2, u \in VP \cap (\bigcup_{i=1}^q VD_i); \\ d_{H_1}(u) &= 2k, u \in VP \setminus (\bigcup_{i=1}^q VD_i). \end{aligned}$$

Далее на множестве вершин VD_i построим граф H_{2i} — связную реализацию d_i -последовательности $((2k)^{d_i-1}, 2)$, для каждого $i = 1, \dots, q$. Это возможно по лемме 2. Так как D_i — клика, то $H_{2i} \subseteq D_i$. Кроме того можно так построить H_{2i} , что вершина, в которой зуб присоединяется к ручке, будет иметь степень 2. Другими словами выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} d_{H_{2i}}(u) &= 2, \{u\} = VD_i \cap VP, i = 1, \dots, q; \\ d_{H_{2i}}(u) &= 2k, u \in VD_i \setminus VP, i = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Построим граф H^* из H_1 и H_{2i} , $i = 1, \dots, q$ по следующей схеме $EH^* = EH_1 \cup (\bigcup_{i=1}^q EH_{2i})$. По построению H_1 и H_{2i} , $i = 1, \dots, q$ справедливо равенство $VH^* = VF$. Так как $p_0 = 0$, то $VH^* = VK_n$.

Из построения H_1 и H_{2i} справедливо равенство

$d_{H^*}(u) = 2k$, $u \in VF \setminus (VP \cap (\bigcup_{i=1}^q VD_i))$. Для каждого $i = 1, \dots, q$, если вершина $u \in VD_i \cap VP$, то $d_{H^*}(u) = d_{H_1}(u) + d_{H_{2i}}(u) = (2k-2) + 2 = 2k$, в силу того, что $|VP \cap VD_i| = 1$.

Таким образом, H^* — остовный однородный степени $2k$ подграф. Кроме того из связности H_1 и H_{2i} следует связность H^* , и значит, $H^* \in \tau_{2k,n}$. По построению $EH^* \subset EF$, значит, $|EH^* \cap EF| = |EH^*| = k|VF|$.

Рассмотрим ребро $e_0 = u_0v_0 \notin EF$, $u_0, v_0 \in VF$. Такое ребро существует, например, пусть $u_0 \in VD_i \setminus VP$, $v_0 \in VP \setminus VD_i$, так как $d_i \geq 2k+2$ при $i = 1 \dots q$, $p \geq 2k+3$ и $|VD_i \cap VP| = 1$, то такие вершины существуют. В этом случае $e_0 \notin EF$. По тем же соображениям существует еще одно ребро $e_1 = u_1v_1 \notin EF$, $u_1, v_1 \in VF$, отличное от e_0 .

Пусть $e_0 \in EH_0$, где $H_0 \in \tau_{2k,n}$. Покажем, что тогда

$$|EH_0 \cap EF| < r_{2k}(F).$$

Так как $H_0 \in \tau_{2k,n}$, то $d_{H_0 \cap F}(u) \leq 2k$, где $u \in VF$.

Поскольку $e_0 \notin EF$, следовательно $e_0 \notin E(H_0 \cap F)$, значит, верны неравенства $d_{H_0 \cap F}(u_0) \leq 2k-1$, $d_{H_0 \cap F}(v_0) \leq 2k-1$.

Заметим, что $V(H_0 \cap F) = VF = VK_n$. Тогда

$$\begin{aligned} |EH_0 \cap EF| &= |E(H_0 \cap F)| = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF} d_{H_0 \cap F}(u) = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF \setminus \{u_0, v_0\}} d_{H_0 \cap F}(u) + \\ &+ \frac{1}{2} (d_{H_0 \cap F}(u_0) + d_{H_0 \cap F}(v_0)) \leq \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot (|VF| - 2) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (2k-1 + 2k-1) = k|VF| - 2k + 2k-1 = k|VF| - 1 < k|VF|. \end{aligned}$$

Следовательно, $|EH_0 \cap EF| < r_{2k}(F)$, то есть $x^H(EF) < r_{2k}(F)$. В силу произвольности H_0 , из того, что $x^H(EF) = r_{2k}(F)$, где $H \in \tau_{2k,n}$, следует, что $e_0 \notin EH$ и в силу равноправности e_0 и e_1 , $e_1 \notin EH$.

Так как неравенство $x(EF) \leq r_{2k}(F)$ опорно к многограннику $P_{2k,n}$ и для каждого $H \in \tau_{2k,n}$, для которого $x^H(EF) = r_{2k}(F)$, следует, что $e_0, e_1 \notin EH$, а значит

$$\left| E \setminus \left(\bigcup_{x^H(EF)=r_{2k}(F)} H \right) \right| \geq 2$$

и по теореме 1 неравенство $x(EF) \leq r_{2k}(F)$ не является фасетным для многогранника связанных $2k$ -факторов.

2) Теперь рассмотрим случай $p_0 \geq 2k+1, p \geq 2k+3, d_i \geq 2k+2$ при $i = 1 \dots q, q \leq p$.

Из определения ранга следует, что $r_{2k}(F) \leq k|VF|$. Докажем, что не существует связного $2k$ -фактора H , для которого $|EH \cap EF| = k|VF|$.

Пусть H — произвольный связный $2k$ -фактор. Так как H — остовный, то существует такое ребро $e = u^*v^* \in EH$, что $u^* \in VF, v^* \notin VF$. Ясно, что $V(H \cap F) = VF$.

Так как $e \notin VF, H \in \tau_{2k,n}$, то $d_{H \cap F}(u^*) \leq 2k-1, u^* \in V(H \cap F)$ и для любой вершины $u \in V(H \cap F), d_{H \cap F}(u) \leq 2k$, так как $H \in \tau_{2k,n}$. Тогда

$$\begin{aligned} |EH \cap EF| &= |E(H \cap F)| = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF} d_{H \cap F}(u) = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF \setminus \{u^*\}} d_{H \cap F}(u) + \\ &+ \frac{1}{2} d_{H \cap F}(u^*) \leq \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot (|VF| - 1) + \frac{1}{2} \cdot (2k - 1) = \frac{2k|VF|}{2} - k + k - \frac{1}{2} = \\ &= k|VF| - \frac{1}{2} < k|VF|. \end{aligned}$$

Так как H — произволен, то $r_{2k}(F) = \max\{|EH \cap EF|, H \in \tau_{2k,n}\} < k|VF|$. Так как $r_{2k}(F)$ — целое число, то $r_{2k}(F) \leq k|VF| - 1$. Построим $2k$ -фактор H^* , удовлетворяющий условию $|EH^* \cap EF| = k|VF| - 1$.

Пусть H_1 и H_{2i} такие же, как в случае $p_0 = 0$, и $H_3 = H_1 \cup (\bigcup_{i=1}^q H_{2i})$. Как и в предыдущем случае, H_3 связный однородный степени $2k$ подграф, но не остовный, так как существует остаток $VK_n \setminus VF, |VK_n \setminus VF| = p_0 \geq 2k+1$. Построим на вершинах $VK_n \setminus VF$ связный $2k$ -фактор и удалим из него произвольное ребро. Получится граф H_4 — связная реализация p_0 -последовательности $((2k)^{p_0-2}, (2k-1)^2)$.

Пусть w_1 и $w_2 \in VH_4$ — вершины степени $2k-1$. Выберем произвольное ребро $e_0 \in H_3, e_0 = u_0v_0$. Построим H^* по следующей схеме: $EH^* = (EH_3 \setminus \{e_0\}) \cup EH_4 \cup \{u_0w_1, v_0w_2\}$. По построению $VH^* = VK_n$, и $d_{H^*}(u) = 2k$ для любой вершины $u \in VK_n$. Кроме того H^* связный в силу связности H_3 и H_4 , значит H^* является связным $2k$ -фактором. Заметим, что $EH^* \cap EF = (EH_3 \setminus e_0) \cap EF = (EH_3 \cap EF) \setminus e_0$, поэтому $|EH^* \cap EF| = |EH_3 \cap EF| - 1$, так как $e_0 \in EF$. По доказанному для случая $p_0 = 0$, имеем $|EH_3 \cap EF| = k|VF|$. Следовательно, $|EH^* \cap EF| = k|VF| - 1, r_{2k}(F) = k|VF| - 1$.

Возьмем пару ребер $e_0 = u_0v_0 \notin EF$, $u_0, v_0 \in VF$ и $e_1 = u_1v_1 \notin EF$, $u_1, v_1 \in VF$. Как было доказано выше, такие ребра существуют.

Пусть $e_0 \in EH_0$, где $H_0 \in \tau_{2k,n}$. Покажем, что тогда

$$|EH_0 \cap EF| < r_{2k}(F).$$

В силу связности и остовности H_0 существует такое ребро $e_2 = u_2v_2$, что $u_2 \in VF, v_2 \in VK_n \setminus VF$. Так как $u_0, v_0 \in VF$, то $e_2 \neq e_0$.

Если $u_2 \neq u_0, u_2 \neq v_0$, то $d_{H_0 \cap F}(u) \leq 2k$, где $u \in VF$. Так как $e_0, e_2 \notin EF$, следовательно, $e_0, e_2 \notin E(H_0 \cap F)$, а значит, $d_{H_0 \cap F}(u_0) \leq 2k - 1, d_{H_0 \cap F}(v_0) \leq 2k - 1, d_{H_0 \cap F}(u_2) \leq 2k - 1$.

Заметим, что так как H_0 — остовный, то $V(H_0 \cap F) = VF$. Тогда

$$\begin{aligned} |EH_0 \cap EF| &= |E(H_0 \cap F)| = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF} d_{H_0 \cap F}(u) = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF \setminus \{u_0, v_0, u_2\}} d_{H_0 \cap F}(u) + \\ &+ \frac{1}{2} (d_{H_0 \cap F}(u_0) + d_{H_0 \cap F}(v_0) + d_{H_0 \cap F}(u_2)) \leq \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot (|VF| - 3) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (2k - 1 + 2k - 1 + 2k - 1) = \frac{2k|VF|}{2} - 3k + 3k - \frac{3}{2} = \\ &= k|VF| - 1\frac{1}{2} < k|VF| - 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $|EH_0 \cap EF| < r_{2k}(F)$, то есть $x^H(EF) < r_{2k}(F)$.

В случае $u_2 = u_0$, так как $e_0, e_2 \notin EF$, то $d_{H_0 \cap F}(u_0) \leq 2k - 2$ и $d_{H_0 \cap F}(v_0) \leq 2k - 1$.

Аналогично получаем, что $|EH_0 \cap EF| < r_{2k}(F)$, то же самое для случая $u_2 = v_0$.

В силу произвольности H_0 , из равенства $x^H(EF) = r_{2k}(F)$, где $H \in \tau_{2k,n}$ следует $e_0 \notin EH$. Аналогичными рассуждениями получим $e_1 \notin EH$.

Так как неравенство $x(EF) \leq r_{2k}(F)$ опорно к многограннику $P_{2k,n}$ и для любого $2k$ -фактора H , удовлетворяющего уравнению $x^H(EF) = r_{2k}(F)$, имеем $e_0, e_1 \notin EH$, то

$$\left| E \setminus \left(\bigcup_{x^H(EF)=r_{2k}(F)} H \right) \right| \geq 2.$$

Отсюда по теореме 1 неравенство $x(EF) \leq r_{2k}(F)$ не является фасетным для многогранника связных $2k$ -факторов. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация*. М: Наука, 1983. 335 с.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*. М.: Наука, 1990. 383 с.

3. Мищенко В.А. *Необходимые условия фасетности гребневых неравенств для многогранников 3 и 4-факторов*: Дипломная работа. Омск, 1997. 33 с.
4. Симанчёв Р.Ю. *О ранговых неравенствах, порождающих фасеты многогранника связанных k -факторов* // Дискретный анализ и исследование операций. Новосибирск, 1996. Т. 3. N 3. С.84-110.
5. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования*: В 2 т. М.: Мир, 1991. 702 с.
6. Харари Ф. *Теория графов*. М.: Мир, 1973. 300 с.
7. Edmonds J. *Maximum matching and a polyhedron with 0,1- vertices* // Journal of Research of the National Bureau of Standards B. 1965. P.125-130.
8. Edmonds J., Johnson E.L. *Matching: a well-solved class of integer linear programs* / Ed. by R.Guy, H.Hanani, N.Sauer and J.Schonheim. / Combinatorial structures and their applications. // Gordon and Breach, New York, 1970. P.89-92.
9. Grötschel M. Holland O. *Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems* // Mathematical Programming. 1991. N51. P.141-202.
10. Grötschel M. Padberg M.W. *On the symmetric travelling salesman problem II: lifting theorem and facets* // Mathematical Programming. 1979. N16. P.281-302.
11. Grötschel M. Padberg M.W. *Polyhedral theory* // Ed. by E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.N.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys, The Traveling Salesman Problem // John Wiley & Sons Ltd., 1985. P.251-305.
12. Grötschel M. Pulleyblank W.R. *Clique tree inequalities and the symmetric traveling salesman problem* // Math. of Operations Research. 1986. Vol. 11. N 4. P.537-569.

ХРОНОЛОГИЯ И ЛОРЕНЦЕВА ФУНКЦИЯ РАССТОЯНИЯ

А.Н. Романов

The global hyperbolicity of distinguishing space-time with finite Lorentz function of distance is proved. The chronological maps of such causal space-times are studied

В данной работе рассматриваются лоренцевы многообразия, которые в отличие от римановых имеют метрики сигнатуры $(-+++)$. Приложения лоренцевой геометрии, рассматривающей лоренцевы многообразия, используются в разделах теоретической физики, изучающих свойства пространства-времени.

Далее будут рассматриваться лоренцевы многообразия, в которых условие конечности лоренцевой функции расстояния является инвариантом относительно конформных преобразований метрики (терминология взята из [1]).

В дальнейшем будем использовать следующее утверждение:

Лемма 1. *Пространство-время (M, g) глобально гиперболично тогда и только тогда, когда оно сильно причинно и (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$.*

Доказательство. См. [1], теорема 3.30. ■

Здесь через $C(M, g)$ обозначен класс лоренцевых метрик на многообразии M , глобально конформных метрике $g : g' \in C(M, g) \Leftrightarrow g' = \Omega g$ для некоторой гладкой функции $\Omega : M \rightarrow (0, \infty)$.

Разделим лоренцевы многообразия на два непересекающихся класса: A и B . Класс B характеризуется следующим свойством. Пусть между точками $p, s \in M$ выполнены следующие соотношения: $s \in cl(J_p^+)$, но $s \notin J_p^+$. Таким образом, любую окрестность U_s точки $s \in M$ можно достичь направленной в будущее причинной кривой γ , выходящей из p , однако сама точка s остается недостижимой. Допустим теперь, что имеет место следующая ситуация: существует настолько малая окрестность U_s точки s , что для того, чтобы достичь ее направленной в будущее причинной кривой, выходящей из p , необходимо,

чтобы, во-первых, эта кривая γ целиком находилась бы в некотором (фиксированном) компактном множестве K , а, во-вторых, ее риманова длина (измеренная в любой заранее выбранной римановой метрике), была бы больше любого наперед заданного положительного числа N . Другими словами, чтобы «подойти» достаточно близко к точке s , причинная кривая γ должна совершить достаточно большое количество «оборотов» во множестве K .

Если такая ситуация имеет место в некотором многообразии (M, g) , то будем относить его к классу B , в противном случае будем считать данное лоренцево многообразие относящимся к классу A .

В качестве гипотезы можно выдвинуть предположение, что к классу B относятся лишь многообразия, не являющиеся причинными, то есть содержащие замкнутые причинные кривые. Однако это утверждение требует отдельного доказательства. В дальнейшем же будут приведены результаты, касающиеся только лоренцевых многообразий, принадлежащих классу A (даже если это не будет отдельно оговорено).

Следующее утверждение позволяет делать некоторые выводы о топологии лоренцева многообразия, исходя из его причинной структуры.

Лемма 2. Пусть пространство-время (M, g) принадлежит классу A . Если для некоторых точек $p, s \in M$, множество $J_p^+ \cap J_s^-$ не замкнуто в M , а $I_p^+ \cap I_s^- \neq \emptyset$, то тогда (замкнутое) множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ не является компактным.

Доказательство.

Допустим, что множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ компактно. Так как множество $J_p^+ \cap J_s^-$ не замкнуто, то существует точка $q \in cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ такая, что $q \notin J_p^+ \cap J_s^-$. В этом случае $q \notin J_p^+$ (случай $q \notin J_s^-$ доказывается аналогично).

Рассмотрим последовательность точек $q_n \subset J_p^+ \cap J_s^-$ такую, что $q_n \rightarrow q$, т.е. сходящуюся к q (сходимость в исходной топологии многообразия M).

Таким образом, имеем:

$$q_n : p \leq q_n, q_n \rightarrow q.$$

Так как $p \leq q_n$, то $\forall n$ существует причинная кривая γ_n , идущая из p в q_n . Продолжим γ_n до непродолжаемой причинной кривой. Любая окрестность точки q содержит все точки q_n , начиная с некоторого n . А так как $q_n \in \gamma_n$, то q является точкой накопления последовательности причинных непродолжаемых кривых γ_n . Отсюда следует (см. [1], предложение 2.18), что существует причинная непродолжаемая кривая γ , являющаяся предельной для последовательности γ_n и такая, что $q \in \gamma$. Выберем параметризацию γ так, что $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow M$ и $\gamma(0) = q$, причем уменьшение параметра t кривой γ соответствует движению по ней в прошлое.

Рассмотрим часть кривой γ , идущую в прошлое от точки $q : \gamma(-\infty, 0]$. Заметим, что для любой точки $a \in \gamma(-\infty, 0]$ выполняется соотношение: $a \in cl(J_p^+)$. Действительно, т.к. γ – предельная кривая последовательности γ_n , то существует подпоследовательность $\gamma_m \subset \gamma_n$ такая, что для любой точки $a \in \gamma$ каждая ее окрестность U_a пересекает все, за исключением конечного числа,

кривые из γ_m . Взяв точки r_m такие, что $r_m \in \gamma_m, r_m \in U_a$, получим сходящуюся к a последовательность $r_m : r_m \rightarrow a$. Если выполнено еще соотношение $r_m \in J_p^+$, то получим, что $a \in cl(J_p^+)$. В данном случае включение $r_m \in J_p^+$ выполняется всегда. В самом деле, если $r_m \notin J_p^+$ то это означает, что кривая γ (вместе с кривыми γ_m) покинула область $cl(J_p^+)$. Однако выйти из $cl(J_p^+)$ γ может лишь через точку p , так как все γ_m «фокусируются» в p (по их определению), а γ – предельная кривая для последовательности γ_m . Но такого быть не может, так как это означало бы существование отрезка (лежащего на кривой γ), соединяющего точки p и q и являющегося частью причинной кривой (γ – причинна), что противоречит выбору точки $q : q \notin J_p^+$.

Таким образом, мы показали, что $\forall a \in \gamma(-\infty, 0], a \in cl(J_p^+)$ Ясно, что выполнено также включение $a \in cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ (т.к. из $a \leq q, q \ll r \Rightarrow a \ll r$, т.е. $a \in int J_s^-$) В результате имеем: часть кривой γ , идущая в прошлое от точки q , целиком находится во множестве $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$, которое по сделанному предположению является компактным.

По построению кривой γ (см. [1], предложение 2.18), последовательность γ_m сходится к γ равномерно на любом компактном множестве из \mathbf{R} в случае, если кривые γ и γ_m параметризованы длиной дуги, вычисленной относительно (полной) римановой метрики.

Так как ни для какого значения параметра $t \leq 0$ кривая γ не покидает множества $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$, а последовательность γ_m сходится к γ равномерно на любом компактном множестве из \mathbf{R} (то есть кривые γ_m «повторяют» движение γ), то получаем следующую ситуацию: если взять достаточно малую окрестность U_q точки q , то длины кривых γ_m , достигающих этой окрестности, с необходимостью должны быть больше любого наперед заданного положительного числа N . Однако это означает, что пространство-время (M, g) принадлежит классу B , в то время как по условию (M, g) принадлежит классу A .

Полученное противоречие опровергает сделанное предположение о том, что множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ компактно и тем самым доказывает лемму. ■

Следующее утверждение взято из [1].

Лемма 3. Пусть (M, g) – пространство-время. Если для некоторых точек $p, s \in M$, множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ не является компактным, то существует лоренцева метрика $g' \in C(M, g)$, глобально конформная метрике g такая, что $d(a, b) = \infty$ для некоторых точек $a, b \in M$. ■

Теперь применим полученные результаты к исследованию причинной структуры пространства-времени (M, g) , для которого условие конечности расстояния является инвариантом при конформных преобразованиях метрики g .

Теорема 1. Пусть (M, g) – различающее пространство-время. Если пространство-время (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$, то пространство-время (M, g) является глобально гиперболическим.

Доказательство.

Покажем сначала, что (M, g) является причинно простым, (т.е различающим с дополнительным условием, что множества J_p^+ и J_p^- замкнуты для всех $p \in M$).

Покажем, что множество J_p^+ замкнуто для любой точки $p \in M$ (замкнутость J_p^- доказывается аналогично).

Допустим обратное: \exists точка $q \in cl(J_p^+) \setminus J_p^+$. Возьмем в I_q^+ произвольную точку r . Покажем, что множество $J_p^+ \cap J_r^-$ не пусто. Так как $q \in cl(J_p^+)$, то \exists последовательность точек $q_n \subset J_p^+$, сходящаяся к q (сходимость в исходной топологии многообразия M). Так как $q \in I_r^-$ а множество I_r^- открыто (см. [1], лемма 2.5), то для достаточно больших n $q_n \in I_r^-$, т.е. $q_n \ll r$. Тогда из соотношений $p \leq q_n, q_n \ll r$ получаем: $p \ll q_n$ т.е. $r \in I_p^+$. Таким образом, имеем: множество $I_p^+ \cap I_r^-$ не пусто.

Получаем: $J_p^+ \cap J_r^- \neq \emptyset$ (т.к. $I_p^+ \subset J_p^+, I_r^- \subset J_r^-, I_p^+ \cap I_r^-$.)

Множество $J_p^+ \cap J_r^-$ не замкнуто в M ($q \in I_r^- = int J_r^-$):

$$(q \in I_r^- = int J_r^-) : q \in int(J_r^-), q \in cl(J_p^+), q \notin J_p^+ \Rightarrow q \in cl(J_p^+ \cap J_r^-) \setminus (J_p^+ \cap J_r^-).$$

Тогда, по лемме 2, получаем, что множество $cl(J_p^+ \cap J_r^-)$ не компактно. Следуя лемме 3, можно найти метрику $g' \in C(M, g)$ такую, что пространство-время (M, g') не удовлетворяет условию конечности лоренцева расстояния, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, множества J_p^+ и J_p^- замкнуты и пространство-время (M, g) является причинно простым. Причинная простота пространства-времени (M, g) автоматически влечет за собой его сильную причинность. Теперь, по лемме 1 сразу получаем желаемый результат: Пространство-время (M, g) является глобально гиперболическим. ■

Приведем следствие теоремы 1:

Следствие 1. Пусть (M, g) – пространство-время. Если пространство-время (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$, то множества J_s^+ и J_p^+ замкнуты в M . ■

Теорема 1 утверждает, что для пространств с конечной лоренцевой функцией расстояния условия различаемости и глобальной гиперболичности эквивалентны. Следующее утверждение усиливает этот результат.

Теорема 2. Причинное пространство-время (M, g) является глобально гиперболическим тогда и только тогда, когда (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$.

Доказательство.

1) Пусть (M, g) – глобально гиперболическое пространство-время. Так как конформный множитель не меняет структуру пространства-времени, то тогда весь класс лоренцевых метрик $g' \in C(M, g)$ допускает лишь конечные лоренцевы расстояния (см [1], следствие 3.7). Причинность пространства-времени (M, g) следует непосредственно из его глобальной гиперболичности.

2) Пусть (M, g) – причинное пространство-время и условие конечности расстояния выполнено для всех метрик $g' \in C(M, g)$. Покажем, что (M, g) – различающее пространство-время. Допустим обратное: (M, g) – не различающее. Тогда существуют по крайней мере две точки p и s такие что $p \neq s$ и $I_p^+ = I_s^+$ (или $I_p^- = I_s^-$), т.е. имеющие одинаковое хронологическое будущее (или прошлое).

Итак, $I_p^+ = I_s^+$. Пусть α – направленная в будущее времениподобная кривая, выходящая из p . Тогда все точки кривой α , отличные от p , принадлежат множеству I_p^+ . Рассмотрим последовательность точек q_n , ни одна из которых не совпадает с p , такую, что $q_n \in \alpha$, $q_n \rightarrow p$. Вследствие равенства $I_p^+ = I_s^+$ и того, что все q_n лежат в I_p^+ , получаем: $q_n \in I_s^+ \forall n \in \mathbf{N}$. Из соотношений $q_n \rightarrow p$, $q_n \in I_s^+$, получаем: $p \in cl(I_s^+) = cl(J_s^+)$. Меняя в приведенных рассуждениях местами точки p и s , получаем: $s \in cl(I_p^+) = cl(J_p^+)$. Так как по условию для любой метрики $g' \in C(M, g)$, пространство-время (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния, то (см. следствие 1), множества J_s^+ и J_p^+ замкнуты в M . Вместе с приведенными выше включениями это даёт:

$$s \in cl(J_p^+) = J_p^+, p \in cl(J_s^+) = J_s^+.$$

Тогда существует направленная в будущее причинная кривая γ_1 , идущая из s в p , и направленная в будущее причинная кривая γ_2 , идущая из p в s . Объединение этих двух кривых даёт замкнутую причинную кривую $\gamma_1 + \gamma_2$. Однако вследствие причинности (M, g) замкнутых причинных кривых в нём быть не может. Полученное противоречие доказывает, что (M, g) – различающее. Вспоминая, что для любой метрики $g' \in C(M, g)$, пространство-время (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния, то по теореме 1 получаем требуемое утверждение: пространство-время (M, g) является глобально гиперболическим. ■

Применим теперь полученные результаты для сравнения структур гладкости двух пространств, имеющих в некотором смысле одинаковую хронологию.

Гомеоморфизм двух многообразий $f : M \rightarrow M'$ будем называть хронологическим, если $f(I_x^+) = I_{f(x)}^+$ для любой точки $x \in M$. Два пространства-времени в случае существования такого гомеоморфизма называются хронологически гомеоморфными.

Следующий результат взят из [3]:

Лемма 4. Пусть (M, g) и (M', g') – два различающих пространства-времени, и $f : M \rightarrow M'$ – хронологический гомеоморфизм. Тогда f является гладким конформным преобразованием. ■

Для более узкого класса многообразий данное утверждение можно усилить:

Теорема 3. Пусть (M, g) и (M', g') – два причинных пространства-времени, удовлетворяющих условию конечности расстояния для всех метрик, глобально конформных данным. Тогда, если $f : M \rightarrow M'$ – хронологический гомеоморфизм, то f является гладким конформным преобразованием.

Доказательство.

Из теоремы 2 следует, что оба пространства-времени глобально гиперболические, а следовательно, и различающие. Далее, по лемме 4, получаем требуемый результат. ■

Таким образом, в классе пространств с конечным лоренцевым расстоянием хронологическая гомеоморфность эквивалентна диффеоморфности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бим Дж., Эрлих П. *Глобальная лоренцева геометрия*. М.: Мир, 1985.
2. Пенроуз Р. *Структура пространства-времени*. М.: Мир, 1972.
3. Malament D.B. *The class of continuous timelike curves determines the topology of spacetime*. J.Math.Phys. 1977. Vol.18. N 7. P.1399-1404.

НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ И ГРАВИТАЦИОННЫЕ АНАЛОГИИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГИДРАВЛИКИ

Н.Ф. Жихалкина

The calculation of the oil pipeline optimum work is discussed in this paper. The reduction of this problem to the continuous model allows to use the gravitational optimization algorithm.

В качестве исходной проблемы рассматривается задача гидравлического расчета оптимальных режимов работы разветвленного нефтепровода, представляющая собой задачу целочисленного программирования. Сведение ее к непрерывной модели позволяет использовать менее трудоемкие оптимизационные алгоритмы, в частности, рассматривается одно из возможных практических приложений гравитационного метода оптимизации.

Содержательная постановка задачи: на каждой ветке разветвленного нефтепровода (рис. 1) имеется до 20 насосных станций. В свою очередь, на станции



Рис. 1. Две ветки нефтепровода

установлено от 4 до 8 насосов из 30-ти возможных типов, каждый из которых имеет свою характеристику: зависимость напора и КПД от расхода (рис. 2).

Эти насосы могут подключаться различным образом: параллельно, последовательно, параллельно-последовательно (рис. 3). Естественно, что в зависимости от включения, вырабатываемый напор будет различным. Кроме того имеется ряд существенных технических ограничений: геодезические высоты, перевальные точки и т.д. Таким образом, задается карта возможных реализуемых напоров на каждой станции (рис. 4). Задача состоит в нахождении такого

© 1999 Н.Ф. Жихалкина

E-mail: zhihal@univer.omsk.su

Омский государственный университет

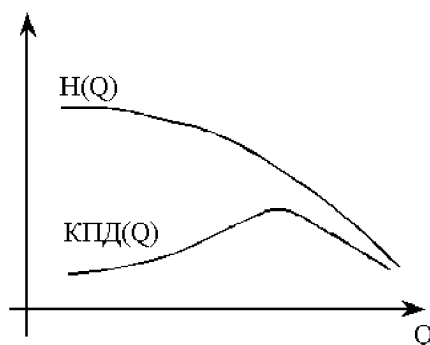
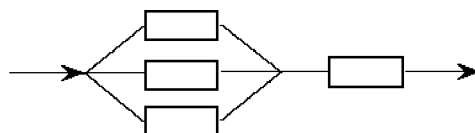
Рис. 2. График зависимости напора H и КПД от расхода Q 

Рис. 3. Параллельно-последовательное соединение насосов

включения насосов, чтобы при постоянном суммарном напоре на всей трассе ($\sum_{i=1}^{N_k} H_i = const_1$, где N_k — число станций, H_i — напор, вырабатываемый на i -й станции), $\sum_{i=1}^{N_k} H_i C_i / \nu_i$ была бы минимальна, где C_i — стоимость электроэнергии и ν_i — КПД насосов на i -й станции.

Переход от дискретной модели к непрерывной позволяет (в некотором приближении) заменить суммы на определенный интеграл. Тем самым исходная задача индуцируется к задаче поиска функции $H(x)$, для которой величина $1 / \int_0^1 (HC(H) / \nu(H)) dx$ максимальна:

$$\sum_{i=1}^{N_k} H_i = const_1 \implies \int_0^1 H dx \approx const_1 \Delta x \approx const,$$

$$\sum_{i=1}^{N_k} \frac{H_i C_i}{\nu_i} \rightarrow \min \implies \frac{1}{\int_0^1 \frac{HC(H)}{\nu(H)} dx} \rightarrow \max.$$

Далее возникает вопрос о выборе метода оптимизации. В настоящее время для решения практических задач поиска экстремума (максимума) функции все чаще применяются оптимизационные алгоритмы, использующие естественные и механические аналогии. Более подробно остановимся на гравитационном алгоритме [1]. В зависимости от постановки задачи и начальных данных существуют различные варианты расчетных формул данного метода. Но все они основаны на том, что вместо одного текущего приближения рассматривается некоторая популяция точек, и на каждой итерации алгоритма суммарный шаг происходит в направлении к наиболее "тяжелым частицам", т.е. к тем точкам, в которых значение целевой функции максимально на данной аппроксимационной сетке.

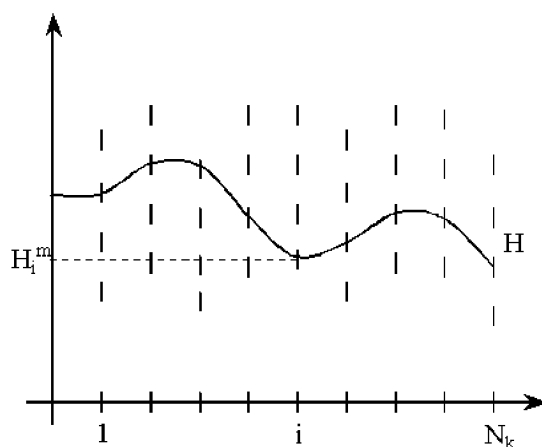


Рис. 4. Карта реализуемых напоров

Если рассматривать график функции $H(x)$ как материальную точку в некотором бесконечномерном пространстве, то расстояние между двумя такими «частицами» H^i и H^j определяется при помощи нормы в пространстве L_2 :

$$\|H^i - H^j\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 |H^i - H^j|^2 dx}.$$

Материальной точке H ставится в соответствие ее масса:

$$M(H) = \frac{1}{\int_0^1 (HC(H)/\nu(H)) dx}.$$

После того, как исходная задача представлена в терминах гравитационного алгоритма, обратимся к одной из реализаций предложенного метода оптимизации (рис. 5). Областью оптимизации является ε -окрестность функ-

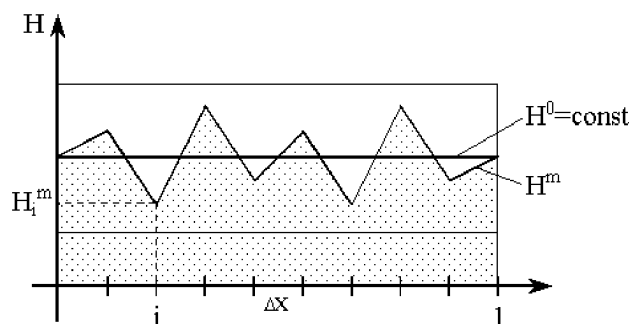


Рис. 5. H^m – представитель текущей популяции точек в L_2

ции $H^0 = const$ на отрезке $[0, 1]$. В качестве начальной популяции рассматривается конечное число функций H^m , представляющих собой ломаные, для которых $\int_0^1 H^m dx = const$ и значение функции в i -й точке разбиения отрезка

$[0, 1]$ ($i = 1 \dots N_k$) равно вырабатываемому на i -й станции напору при одном из возможных включений насосов.

Оптимизационная процедура заключается в корректировке функции H^m на шаге $t + 1$ в зависимости от ее «массы» и «массы» так называемой усредненной функции H^{av} на шаге t :

$$H^m(t + 1) = \alpha H^m(t) + \beta H^{av}(t, m),$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{M^m(t)}{M^m(t) + M^{av}(t, m)} \\ \beta = \frac{M^{av}(t, m)}{M^m(t) + M^{av}(t, m)} \end{cases}$$

и в выборе лучшей с точки зрения критерия оптимизации «частицы». Функция $H^{av}(t, m)$ вычисляется как среднее среди $H^j(t)$, где j принимает все возможные значения от 1 до N_k , либо функции $H^j(t)$ выбираются из некоторой окрестности $H^m(t)$ в соответствии с радиусом взаимодействия [1].

Пусть в первом приближении $\frac{HC(H)}{\nu(H)} = \underbrace{H * \dots * H}_N$. Без ограничения общности можно считать, что функция H четная и на отрезке $[0, 1]$ представима в виде ряда Фурье:

$$H(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x).$$

Теоретические расчеты позволяют сделать следующие выводы:

1) $N = 2$, т.к.

$$\int_0^1 \cos(k\pi x) \cos(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{1}{2}, & k = n, \end{cases}$$

то

$$\int_0^1 F_k dx = \int_0^1 (C_0 + \sum_{n=1}^k C_n \cos(n\pi x))^2 dx = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k C_n^2.$$

Таким образом, $\int_0^1 F_k dx$ не убывает при $k \rightarrow \infty$, следовательно, $\max(M_k) = M_0$, где M_k – «масса», отвечающая функции H^k . Иными словами, целевая функция максимальна на константе.

2) $N = 3$, т.к.

$$\int_0^1 \cos(k\pi x) \cos^2(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq 2n \\ \frac{1}{4}, & k = 2n, \end{cases}$$

то, например,

$$\int_0^1 F_3 dx = \int_0^1 (C_0 + \sum_{n=1}^3 C_n \cos(n\pi x))^3 dx = C_0^3 + \frac{3}{4} C_1^2 (2C_0 + C_2) + \frac{3}{4} C_2^2 (2C_0 + C_1).$$

Нетрудно заметить, что при некоторых очевидных ограничениях на коэффициенты разложения (данные ограничения могут следовать и из физического смысла функции H : неотрицательность, ограниченность и т.д.) получаем те же результаты, что и для $N = 2$.

3) Естественно предположить, что и в общем случае при полиномиальной зависимости $\frac{HC(H)}{\nu(H)}$ от H максимум целевой функции будет достигаться на $H = const$. Но вследствие технических ограничений (максимально и минимально допустимые давления на входе в станцию, максимально допустимое давление на входе в коллектор, на выходе из станции, геодезические высоты и т.д.) такой режим обычно не реализуем на практике. Следовательно, оптимальной стратегией является поиск такого допустимого распределения реализуемых напоров, при котором работающие станции как бы «размазаны» по всей ветке.

Применение гравитационного алгоритма для квадратичной и кубической зависимостей дает аналогичные результаты. В ходе численных экспериментов найдены некоторые ограничения на основные параметры алгоритма: радиус взаимодействия должен быть достаточно велик, обязательна зависимость α и β от «массы», в некоторых случаях фиксация наиболее «тяжелых» частиц позволяет находить лучшие решения.

Следующим шагом является рассмотрение более реалистичной задачи, когда не удастся выявить зависимость критерия оптимизации от функции H . В этом случае также представляется возможным использование гравитационного алгоритма, что, в свою очередь, позволит находить допустимое распределение реализуемых напоров, отвечающее критерию оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жихалкина Н. Ф., Файзуллин Р. Т. *Гравитационные аналогии в задаче оптимизации* // Математические структуры и моделирование. 1999. Омск: ОмГУ. Вып. 2.

МОДЕЛЬ «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ДИАПАЗОНА» И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДОСТИЖЕНИЙ

Е.Ю. Мандрикова

The problem of intellectual progress and improvement of human's activity is very actual now. This article deals with model of intellectual range. The author pays attention on high and low «intellectual boundaries» for such aspects of activity as learning, professional and creative work. Also the author mentions about the general intellectual structure models.

1. Введение

Значение интеллекта и интеллектуальной одаренности для развития человеческой цивилизации возрастает с каждым десятилетием. Конец XX в. стал началом новой эпохи – эпохи «информационной цивилизации». Отсюда все более возрастающее внимание к развитию интеллектуальных возможностей человечества.

Одно из центральных мест занимает диагностика общего интеллекта. Но она нужна не сама по себе, а как средство прогнозирования влияния интеллекта на деятельность. На определенных стадиях развития интеллекта непременно возникает вопрос о том, в какой мере уровень индивидуального интеллекта определяет творческие, учебные или производственные достижения.

Эта проблема имеет два аспекта: временной и структурный. Временной аспект сводится к прогнозу творческой активности взрослых на основе диагностики их уровня интеллекта в раннем возрасте. Структурный аспект состоит в следующем: в какой мере вообще можно судить о продуктивности человека на основе данных психологического тестирования, то есть какова зависимость продуктивности деятельности индивида от уровня и структуры его интеллекта [4].

© 1999 **Е.Ю. Мандрикова**

E-mail: p71mandrikova@econ.omsu.omskreg.ru

Омский государственный университет

Психологи разработали изоцированную математическую шкалу, с помощью которой устанавливаются основания психологических теорий природы и происхождения интеллекта. И в то время как психологи в значительной мере способствовали прогрессу концепции развития интеллекта в процессе обучения, основой всех видов тестирования интеллекта – с определением хоть коэффициента IQ , хоть наличия разнообразных способностей – безусловно остается предположение, что каждое человеческое существо имеет определенную величину интеллектуальных возможностей, которая измеряется определенным образом. Но дать ясное, единое и прежде всего объективное (операциональное) определение интеллекта практически невозможно. В связи с этим маловероятно, чтобы кто-нибудь разработал метод исследования, не зависящий от той или иной концепции интеллекта.

Все определения интеллекта сводятся к единому пониманию интеллекта как способности к усвоению и применению образцов человеческого опыта [10]. Иначе говоря, функция интеллекта состоит, с одной стороны, в приобретении, усвоении устоявшихся образцов поведения и мышления, адекватных ситуации, а, с другой стороны, в применении этих знаний при решении жизненных задач. По мнению большинства авторов, задача интеллекта, в конечном итоге, повысить эффективность реагирования на среду.

Г.Ю. Айзенк разграничил понятия «биологический интеллект», «психометрический интеллект» и «социальный интеллект». Мы будем говорить о психометрическом интеллекте, то есть о свойстве, измеряемом с помощью некоторой системы тестовых заданий. Структура психометрического интеллекта включает в себя несколько иерархических уровней. По мнению Кэттела, у каждого из нас уже с рождения имеется потенциальный, или «жидкий», «текучий», интеллект (*intelligence fluide*). Именно он лежит в основе нашей способности к мышлению, абстрагированию и рассуждению. Примерно к 20 годам этот интеллект достигает своего наибольшего расцвета. С другой стороны, формируется «кристаллический» интеллект (*intelligence cristallisee*), состоящий из различных навыков и знаний, которые мы приобретаем по мере накопления жизненного опыта [3]. На вершине иерархии генеральный фактор (G). Второй этаж занимают флюидный интеллект (Gf), кристаллизованный интеллект (Gc) и фактор визуализации (Gv) [4, 5]. Существует масса иных моделей (Гилфорд, Хебб и др.). Наиболее популярна структура, предложенная Ч. Спирменом, включающая общий интеллект и факторы: числовой, пространственный, вербальный. Особо выделяется креативность (Cr), вербальная и невербальная, как способность породить множество оригинальных продуктов.

Успех в жизнедеятельности человека тесно связан с интеллектом. Общий интеллект лежит в основе таких способностей, как обучаемость, кристаллизованный интеллект, креативность. Соответственно, в связи с этими выделенными способностями можно рассмотреть такие сферы деятельности человека, как учебная, профессиональная, творческая.

2. Влияние уровня интеллекта на деятельность

Интеллект рассматривается как способность, лежащая в основе обучения, но он не является существенным фактором, обуславливающим эффективность обучения. Корреляция тестов общего интеллекта с критериями обучаемости колеблется от -0,03 до 0,61 [5]. При проведении исследований на определение IQ ряд ученых выдвинули предположение о существовании «интеллектуального порога» учебной деятельности. Интеллект определяет лишь верхний («Выше головы не прыгнешь»), а деятельность – нижний предел успешности обучения. Следовательно, учебная успеваемость (N_i) подчиняется следующему неравенству:

$$N(IQ_{\text{порог}}) \leq N_i \leq N(IQ_i),$$

где

$N(IQ_{\text{порог}})$ - уровень интеллекта, необходимый для успешного обучения;

N_i - учебная успеваемость i -го индивида;

$N(IQ_i)$ - уровень общего интеллекта i -го индивида.

Тесты интеллекта широко используются в целях профессионального отбора и распределения кадров. Одним из первых теорию «порога интеллекта» для профессиональной деятельности предложил Д.Н. Перкинс [4]. Согласно его концепции, для каждой профессии существует нижний пороговый уровень развития интеллекта. Люди с IQ ниже определенного уровня не способны овладеть данной профессией. Возможности индивида в определенной профессиональной деятельности ограничены уровнем его интеллекта. Нижний уровень достижений, порог вхождения в деятельность, задается уровнем интеллекта, минимально необходимым для овладения профессией. Символично предел продуктивности профессиональной деятельности определен как

$$P(IQ_{\text{порог}}) \leq P_i \leq P(IQ_i),$$

где

$P(IQ_{\text{порог}})$ - уровень интеллекта, необходимый для данного вида деятельности;

P_i - уровень достижений в профессиональной деятельности i -го индивида;

$P(IQ_i)$ - уровень общего интеллекта i -го индивида.

Успех творческой активности предопределен объемом знаний, зависящим от интеллекта. Творческая активность детерминирована творческой (внутренней) мотивацией, проявляется в особых условиях жизнедеятельности, но верхним ограничителем уровня ее проявления служит уровень общего («текущего», «жидкого», по Р. Кэттелу) интеллекта. Аналогично существует и нижний ограничитель: минимальный уровень интеллекта, до достижения которого креативности не появляется. Условно отношение между творческой продуктивностью и интеллектом можно свести к равенству вида:

$$IQ_{\text{деятельности}} \leq Cr \leq IQ_{\text{индивида}},$$

где $IQ_{\text{деятельности}}$ - уровень интеллекта индивида, необходимый для появления способности к творчеству; Cr - уровень творческой активности; $IQ_{\text{индивида}}$ - уровень общего интеллекта индивида.

3. Модель «интеллектуального диапазона» человека

Существует масса предположений о связи определенного уровня общего интеллекта человека с продуктивностью его деятельности. В.Н. Дружинин в [5] предположил, что между интеллектом и продуктивностью существует некоторая зависимость. Схематично она приведена на рис. 1 с изменениями, дополнениями и комментариями.

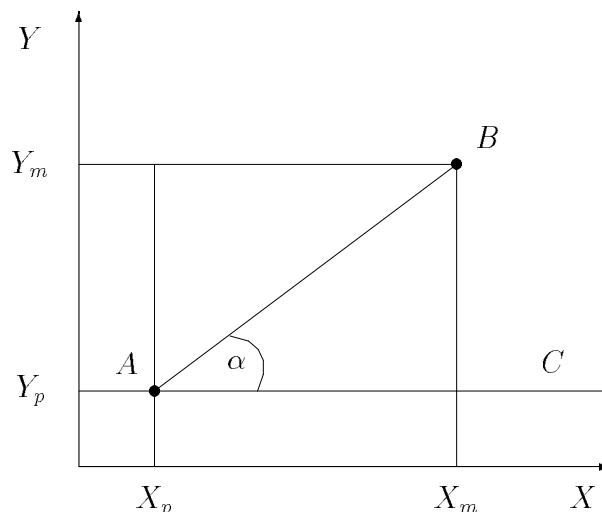


Рис. 1. Модель интеллектуального диапазона человека

На этом рисунке:

X – интеллект (уровень интеллекта определяется успешностью выполнения тестов интеллекта, тождественен флюидному интеллекту (Gf), по Р. Кэттелу, или общему интеллекту, по Ч. Спирмену);

Y – продуктивность (характеризуется мерой успешности индивида в той или иной сфере жизнедеятельности: учебной, профессиональной, творческой);

X_p – «интеллектуальный порог» деятельности;

X_m – индивидуальный интеллект;

Y_p – минимальная продуктивность в деятельности (начальный уровень C);

Y_m – предельная индивидуальная продуктивность;

A – показатель минимальных требований к интеллектуальной продуктивности деятельности;

B – показатель интеллектуального диапазона продуктивности;

α – показатель эффективности интеллектуальной продуктивности k , где $k = \text{tg } \alpha$.

AB – оптимальное соотношение интеллекта и продуктивности индивида.

Длина AB определяет величину интеллектуального диапазона деятельности индивида. За интеллектуальный диапазон деятельности берется область на координатной плоскости, определяемая пороговыми и предельными значениями интеллекта и продуктивности. Прямая AB является «прямой оптимальности интеллектуальных затрат». Координаты точек, принадлежащих данной прямой, являются показателями адекватной продуктивности при определенных «интеллектуальных затратах» (при проявленном индивидом уровне общего интеллекта в конкретных ситуациях, который по величине может быть ниже значения индивидуального интеллекта X_m). Все другие точки, находящиеся в интеллектуальном диапазоне, но не принадлежащие прямой AB , не соответствуют оптимальному соотношению прилагаемых интеллектуальных усилий и получаемой продуктивности деятельности и, следовательно, не поддаются прогнозированию.

Чем больше эффективность интеллектуальной продуктивности k ($0 < k < 1$), тем выше поднимается ее планка по сравнению с минимальными требованиями продуктивности в каком-либо виде деятельности. При фиксированном уровне предельной индивидуальной продуктивности с уменьшением k повышаются требования к интеллектуальным затратам индивида, а с увеличением k уровень IQ индивида может понижаться вплоть (при $k = 1$) до порогового значения. Эффективность интеллектуальной продуктивности подразумевает под собой некоторую интенсивность. То есть при повышении эффективности индивиду для сохранения исходного уровня продуктивности придется интенсивнее мыслить, действовать и т.п. Но вместе с этим уровень интеллекта у индивида уменьшается. Это один из интересных эффектов модели интеллектуального диапазона достижений.

4. Прогнозирование достижений

Прогнозирование индивидуальных достижений опирается на модель «интеллектуального диапазона» и связано с определенными уровнями интеллекта и продуктивности в деятельности. Прогнозирование достижений возможно лишь в некоторых пределах, графически обозначенных на рис.1. Диапазон достижений в каком-либо виде деятельности ограничен сверху и снизу порогами, вне которых достижения либо незначительны, либо невозможны.

Верхняя граница продуктивности (предельный уровень индивидуальных достижений) задается индивидуальным уровнем интеллекта. Предельный уровень достижений является линейной функцией от интеллекта:

$$P_{\max,i} = k \cdot IQ_i + C, \quad P_i \leq P_{\max,i},$$

где $P_{\max,i}$ – предельный уровень индивидуальных достижений (соответствует точке B на рис. 1);

C – начальный уровень компетентности, необходимой для успешного начала деятельности;

IQ_i – уровень интеллекта i -го индивида;

P_i – индивидуальная продуктивность i -го индивида.

Нижнюю границу индивидуальных достижений в деятельности определяют требования деятельности, которые проявляются в феномене «интеллектуального порога». Если IQ индивида ниже определенного значения, то он не может проявить минимально необходимую продуктивность и не проходит естественный отбор. Следовательно, продуктивность индивида не может быть ниже определенного минимального значения, соответствующего уровню нижнего интеллектуального порога деятельности:

$$P_{\min,i} = IQ_{j,\text{порог}}, \quad P_{\min,i} \leq P_i,$$

где

$P_{\min,i}$ – минимальный уровень индивидуальных достижений i -го индивида;

$IQ_{j,\text{порог}}$ – уровень интеллектуального порога j -й деятельности;

P_i – уровень достижений i -го индивида в каком-либо виде деятельности.

В.Н. Дружинин в [5] полагает, что недостаток мотивации и компетентности препятствует индивиду достичь верхнего порога индивидуальных достижений. Он же выделяет три интересных следствия модели диапазона достижений:

- успех вхождения индивида в деятельность определяется лишь уровнем индивидуального интеллекта и сложностью деятельности;
- уровень конкретных индивидуальных достижений зависит от мотивации и компетентности личности, что связано с содержанием деятельности;
- предельно высокий уровень индивидуальных достижений зависит только от индивидуального IQ , а не от трудности деятельности и ее содержания.

Для развития теорий интеллекта и способностей необходимо переходить от факторных и корреляционных моделей описания структуры интеллекта и параметров деятельности к математическим. Приведенная в работе модель описывает степень адекватности уровня интеллекта и продуктивности индивида в каком-либо виде деятельности. С помощью этой модели можно описать некоторые известные эмпирические зависимости и факты. Вполне возможно, что с помощью этой модели можно будет предсказать какие-либо новые эффекты. Предложенная модель «интеллектуального диапазона» достижений не является математической в полном значении этого слова, но она дает толчок к дальнейшим исследованиям с употреблением математического аппарата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенк Г.Ю. *Интеллект: новый взгляд* // Вопросы психологии. 1995. N 1. С.111-131.
2. Де Боно Э. *Латеральное мышление*. СПб, 1997.
3. Годфруа Ж. *Что такое психология?* : В 2 т. Пер. с фр. М, 1996. Т.1.

4. Дружинин В.Н. *Психология общих способностей*. М., 1995.
5. Дружинин В.Н. *Структура психометрического интеллекта. Прогноз индивидуальных достижений* // Основные современные концепции творчества и одаренности. М., 1997.
6. Мур Л.П. *Вы умнее, чем вы думаете* / Пер. с англ. Мн., 1996.
7. Сергеев Б.Ф. *Стать гением: от инстинкта к разуму*. Л., 1991.
8. Холодная М.А. *Психология интеллекта: парадоксы исследования*. Томск, 1997.
9. Шадриков В.Д. *Психология деятельности и способности человека*. М., 1996.
10. Юркевич В.С. *Основные подходы к изучению природы интеллекта* // Вопросы психологии. 1972. N 4.

ИЗМЕНЕНИЕ ОПТИКО-ДЕРМАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ В ПРОЦЕССЕ ОНТОГЕНЕЗА ЧЕЛОВЕКА

Л.В. Молчанова, О.К. Родионова

Some results of optic – dermal index (ODI) data processing are discussed. The peculiarities of ODI changes during human being life time are shown for some special groups of patients.

1. Введение

Исследования, проводимые с помощью клинических методов, являются исследованиями, как правило, отдельных органных комплексов и используют либо животных, либо кровь, либо трупный материал. Это дает опосредованное представление о протекающих в живом организме процессах. Методика, разработанная в Новосибирском Институте Общей патологии и Экологии человека СО РАМН, основывается на воздействии электромагнитного поля оптического диапазона частот на кожу человека. Суть методики сводится к выявлению возможности нового видения состояния кожи человека как кожного анализатора.

Использование метода световой диагностики в настоящее время является одним из немногих методов, способных оценить состояние большого количества органов не инвазивно и за короткий промежуток времени. Более того, это дает возможность понимания специфичности внутренней ситуации в каждом возрасте. Из клинических наблюдений известно, что каждый возраст обладает совершенно определенной предрасположенностью к различным заболеваниям, кроме того, неодинаковы в различном возрасте течение и исход болезни, различны реакции на воздействия разных физических, механических и химических агентов.

В основе метода лежит свойство кожи поглощать и отражать электромагнитные волны оптического диапазона частот. Специальным прибором измерялся так называемый оптико – дермальный показатель (или ОДП). Под оптико

© 1999 О.К. Родионова, Л.В.Молчанова

E-mail: rok@rav.sccc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

Институт общей патологии и экологии человека СО РАМН

– дермальным показателем понимается процентное значение поглощения оптического излучения длины волны $\lambda = 540\text{нм}$. (В работах Ильиной А.А (1947) и Терского И.А., Сидько Ф.Я. (1960) [1],[2],[3] было показано, что при данной длине волны наблюдается единственный глубокий максимум поглощения света кожей человека.) В работах Молчановой Л.В. и Казначеева С.В. [4],[5],[6] обосновано применение этого метода для ранней диагностики патологических процессов внутренних органов человека.

2. Возрастная динамика

Объектом исследования явились 1643 человека: мужчины и женщины в возрасте от одного до восьмидесяти лет, различных национальностей, проживающих на территории г.Новосибирска и Новосибирской области, считающиеся практически здоровыми. Оценка полученных результатов проводилась методами математической статистики.

При обследовании пациентов с поверхности их кожи снимались значения ОДП в 50 определенных анатомических областях.

В результате статистической обработки полученных при обследовании пациентов данных и их исследования были выявлены три характерных участка временного изменения ОДП. Как видно из графиков на рис.1 – 2¹, характер изменения ОДП с возрастом у мужчин и женщин сходен, но имеет различные точки изменения направления кривой возрастной зависимости ОДП. С биологической точки зрения граничные точки характерных участков временного изменения ОДП соответствуют половому созреванию объекта (мужчин или женщин) и климактерическому периоду.

Значимость различия значений ОДП мужчин и женщин для большинства органов подтверждается результатами статобработки данных. В таблице приведены данные проверки гипотезы о равенстве средних значений ОДП у мужчин и женщин для некоторых органов с помощью t – критерия при 5 – процентном уровне значимости.

Анатомическая область	Выборочное значение	Табличное значение
Поджелуд. железа	0.46523	1.96243
Мочевой пузырь	4.27640	1.96688
Печень	5.29037	1.96148
Сердце	6.33453	1.96150
Стопа левая, верх	1.23900	1.96385

¹Регрессионные кривые и поверхности здесь и далее представляют собой полиномы 4 степени и получены методом наименьших квадратов.

3. Особенности возрастного поведения отдельных органов

Исследование динамики зависимости средних значений показателей от возраста пациентов позволило выявить интересную закономерность: почти для всех показателей достаточно явно прослеживаются три этапа их изменения: быстрый рост, медленное убывание или стабилизация, рост или убывание, в зависимости от пола пациента или органа (см. рис. 1 – 2).

При этом изменение достаточно хорошо описывается кусочно-линейной аппроксимацией (также отмечено на рис. 1 – 2):

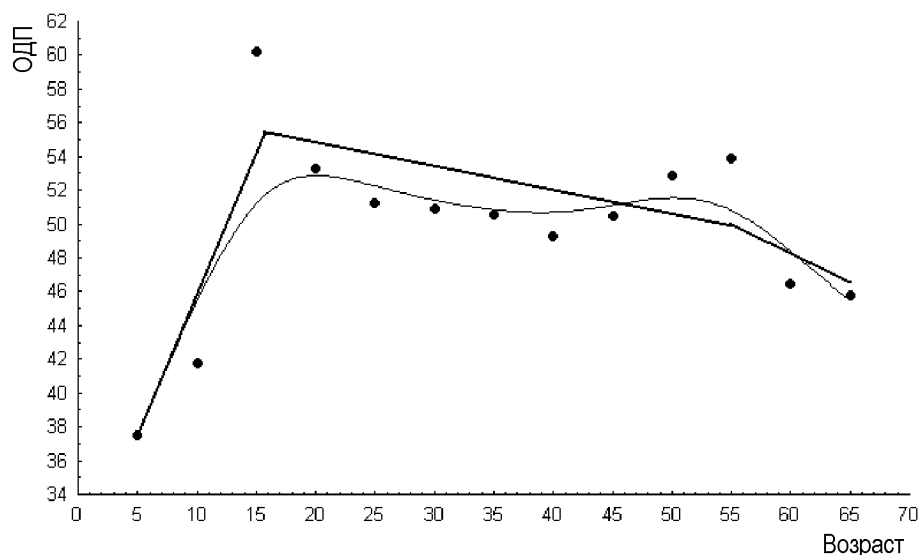


Рис. 1.

Изменение среднего ОДП для женщин в процессе онтогенеза

$$c(x) = \begin{cases} a_1x + b_1, & \text{для } x < A \\ a_2x + b_2, & \text{для } A \geq x < B \\ a_3x + b_3, & \text{для } x \geq B \end{cases}$$

Особенностью аппроксимации является то, что точки A и B сами являются неизвестными параметрами и требуют нахождения наряду с параметрами a_i и b_i , т.е. мы имеем следующую задачу оптимизации, решаемую методом наименьших квадратов совместно с методом безусловной минимизации (метод Ньютона) с применением штрафных функций:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i)]^2 \longrightarrow \min \\ a_1A + b_1 &= a_2A + b_2 \\ a_2B + b_2 &= a_3B + b_3, \end{aligned} \tag{1}$$

что сводится к итерационному решению задачи

$$Q = S + M[(a_1A + b_1 - a_2A - b_2)^2 + (a_2B + b_2 - a_3B - b_3)^2],$$

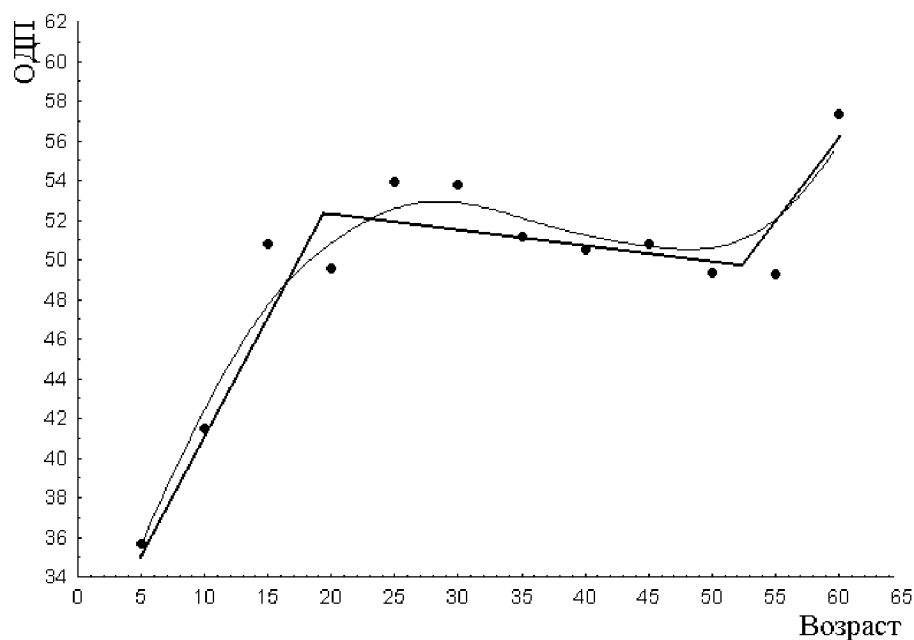


Рис. 2.

Изменение среднего ОДП для мужчин в процессе онтогенеза

где M - коэффициент штрафа.

В предлагаемом алгоритме производится направленный выбор разбиения (точек A и B) с решением задачи (1) на каждом шаге. Выбор очередного разбиения осуществляется методом покоординатного спуска с переменным шагом. Алгоритм сходится достаточно быстро (до двух десятков итераций) при начальном приближении

$$\begin{aligned} A &= x_{min} + 1/3(x_{max} + x_{min}), \\ B &= x_{min} + 2/3(x_{max} + x_{min}). \end{aligned}$$

Полученные значения A и B соответствуют предположению о их связи с возрастом: фазе полового созревания, фазе репродуктивного периода и фазе климактерического периода.

Так, при рассмотрении показателя «сердце» для мужчин, за 7 итераций получены значения $A = 12.5$, $B = 51.5$, $a_1 = 2.07$, $b_1 = 30.42$, $a_2 = -0.183$, $b_2 = 58.59$, $a_3 = 1.82$, $b_3 = -44.32$ (A и B определялись с точностью до 0.5).

При рассмотрении изменения ОДП в зависимости от возраста, пола для различных органов выявлено, что некоторым органам свойственны свои характерные участки временного изменения ОДП, что указывает и объясняет различный характер старения органов и тканей человека. Так, например, на рис.3 (сердце) хорошо видно, что ОДП у мужчин и женщин в климактерический период находится в противофазе. Аналогичные зависимости получаются и для других органов, но с различными скоростями изменения. Например, можно сравнить характер изменения ОДП сердца с изменением ОДП печени, представленным на рис.4.

Далее, было выявлено, что мужчины и женщины имеют характерные особенности своего индивидуального развития, причем у мужчин органы и ткани

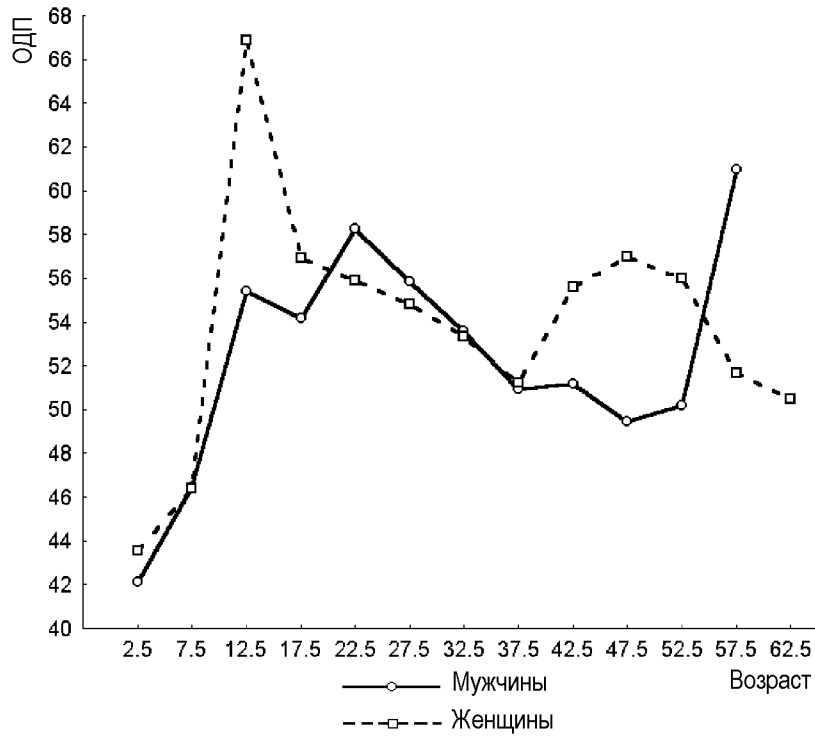


Рис. 3.

Изменение ОДП сердца для мужчин и женщин в процессе онтогенеза

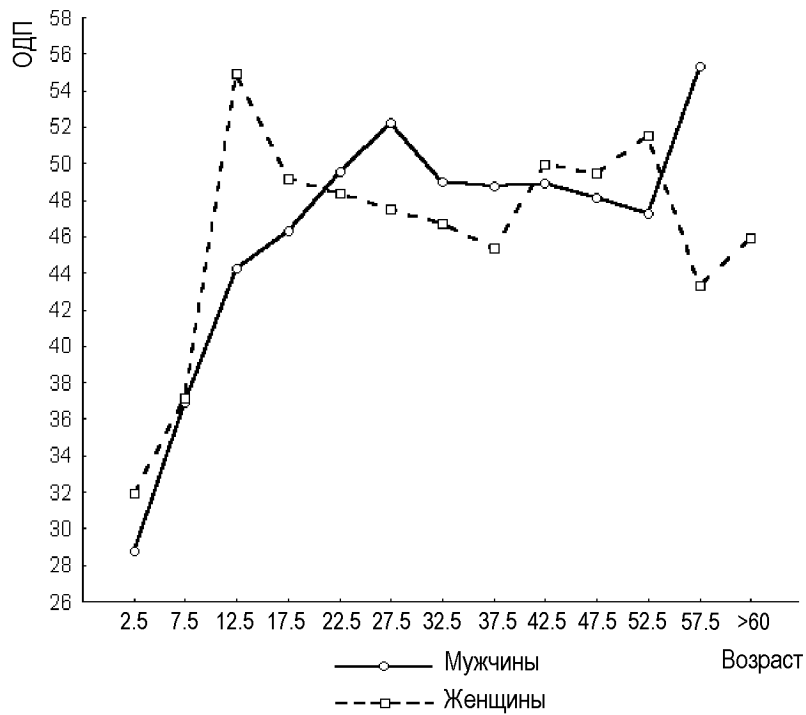


Рис. 4.

Изменение ОДП печени для мужчин и женщин в процессе онтогенеза

имеют тенденцию более быстрого старения, чем те же органы и ткани у женщин. Вероятно, этим можно объяснить, что в среднем продолжительность жизни у женщин выше, чем у мужчин.

При рассмотрении различных генетических групп пациентов (три деления по цвету волос: светло-русые, русые и темные; три деления по цвету глаз: голубоглазые, зеленоглазые и черноглазые) оказывается, что аналогичные органы в процессе онтогенеза имеют различные скорости изменения фаз (см.рис.5). Более того, при рассмотрении корреляционных связей различных органов по-

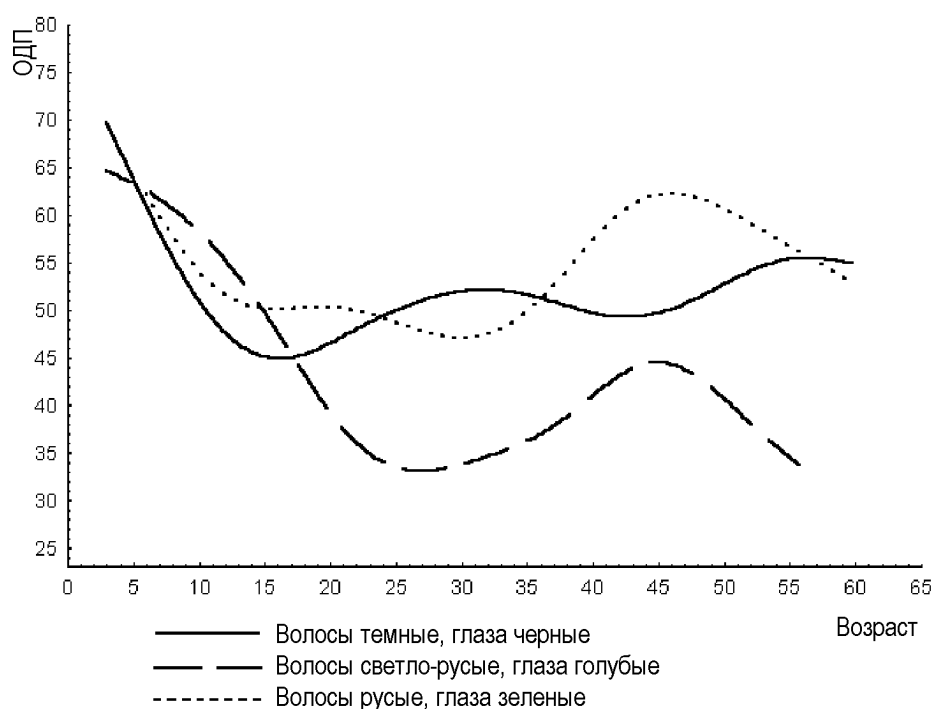


Рис. 5.

Изменение среднего ОДП для мужчин в различных генетических группах в процессе онтогенеза

лучено, что существуют разные межорганные взаимозависимости. Пример таких взаимозависимостей хорошо виден на рис.6. Некоторые другие результаты статобработки приведены в [7], [8].

Интересны результаты, полученные при рассмотрении возрастного изменения ОДП отдельных органов относительно среднего по всем органам ОДП пациента. Если принять это среднее за ноль, можно условно говорить о «теплых», излучающих и «холодных», поглощающих участках кожи. Обработка данных показала, что ОДП некоторых органов на протяжении всей жизни лежат с одной стороны от среднего, другие колеблются вокруг него, а есть и переходящие из одной половины в другую (рис.7). Представляется разумным рассмотреть возможность диагностики патологических или напряженных состояний здоровья пациентов на основе выявления отклонений истинной «свето – тепловой» карты тела от ожидаемой для данных генетической группы и возраста.

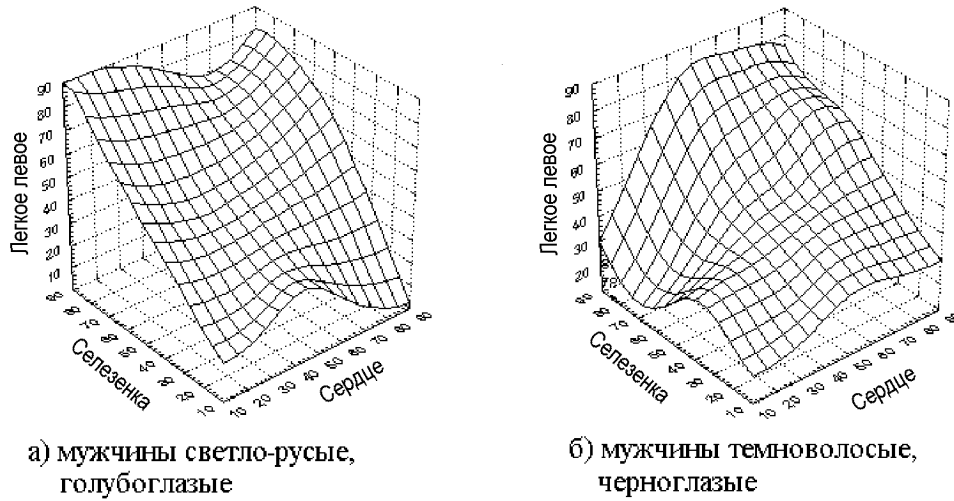


Рис. 6.

Межорганные зависимости для различных генетических групп



Рис. 7.

Возрастное изменение отклонения ОДП от среднего по телу в различных точках для женщин

4. Заключение

В данной работе показано, что диагностические критерии должны учитывать пол, возраст и генетические особенности пациентов. Перспективной представляется возможность изучения межорганных зависимостей на основе изучения распределений ОДП. Представляет интерес также изучение «свето – тепловых» карт тела. Однако, для получения более значимых выводов необходимо увеличение объема выборки для репрезентативного представления всех представляющих интерес групп пациентов, в том числе с четко верифицированными патологическими процессами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильина А.А. *Спектры отражения кожи человека* // ДАН СССР. 1947. Т.LVII. N 9. С.889–892.
2. Ильина А.А. *Спектры пропускания кожи человека* // ДАН СССР. 1946. Т.54. N 7. С.595.
3. Терсков И.А., Сидько Ф.Я. *Связь спектров отражения тела человека со спектрами поглощения и отражения взвеси эритроцитов* // Вопросы биофизики, биохимии и патологии эритроцитов. Красноярск, 1960. С.462–672.
4. Казначеев С.В., Молчанова Л.В. *О возможности использования оптических свойств кожи в диагностике патологических изменений внутренних органов человека* // Бюллетень СО АМН. N 5. 1990. С.59–61.
5. Молчанова Л.В. *Оптические свойства кожи человека как показатель функционального состояния кожного анализатора при адаптации к различным климато – географическим условиям внешней среды* : Автореф... дисс. канд. биолог. наук. Новосибирск: ИОПиЭЧ СО РАМН, 1994.
6. Молчанова Л.В., Казначеев С.В., Понизько О.А. *Оптические свойства кожи человека* // Бюлл. СО РАМН. 1987. N 2. С.66–69.
7. Молчанова Л.В., Казначеев С.В., Родионов А.С., Родионова О.К. *Исследование онтогенеза человека по оптико – дермальному показателю* // Третий Сиб. конгр. по прикл. и индустр. мат.: Тез. докл. – Новосибирск, 1998. Ч.5. С.135–136.
8. Родионов А.С., Родионова О.К., Молчанова Л.В., Казначеев С.В. *Некоторые результаты анализа данных поглощения оптического излучения кожей человека* // Третий Сиб. конгр. по прикл. и индустр. мат.: Тез. докл. – Новосибирск, 1998. Ч.5. С.138–139.

AN APPROXIMATION FOR LARGE-SCALE BRAIN ACTIVITY

R. Faizullin, V. Melnikov

Finite element method and networking techniques are realized for the simulation of complex behavior of the co-operative brain activity. The electroactivity on the cortex surfaces and other brain structures can be decomposed on the two co-ordinated components. We can say the «charges» - neuron's spikes and about «potential fields» - more slow activity. Saccadic imaging can be transformed to the impulsation along cortex layers, motor reaction can be considered as complex sum of interactioned information. There is tally with the rhythms of the cortex and first eigenvalues of associated operator, there is EEG desynchronization.

1. Analogies

Let us consider neuron's reaction on the contribution of its environment (Schmidt 1983). We can see on the Fig.1 that before $t = 0$ there is intricate behavior for the difference ψ of cross-diaphragms potentials. After time $t = 0$ we have standard spikewise neuron's reaction. Before time $t = t_1$ we can see rapid ψ increasing, and after t_1 we have ψ diminishing with more slowly character than for previous increasing.

For times between 0 and T the neuron is closed for the coercion of its neighbours, it is so-called- autoregenerativics process. After time T we can see intricate process once again.

Hence, there are an analogies between spikes motion along the layers of neuros tissue and charge's transferring via the gradient of electrodynamical (or electrohydrodynamical) field. There is external contribution, similar to an external field contribution for natural charges, and also forward charges induction. Next spike is to be generated in the closely-spaced neuron which is bound to be neuron with minimal value of the difference between threshold potential $-\psi_t$ and $\psi(t)$. Then we can say about spikes - so it are «charges» and spatial distribution of the $\psi(t)$ defined gradient of some potential function ϕ . For simple linear case we can write:

© 1999 R. Faizullin, V. Melnikov

E-mail: faizulin@univer.omsk.su

Омский государственный университет

$$\rho_t + (\phi_x \rho)_x + (\phi_y \rho)_y = g \quad (1)$$

where $\rho(x, y, t)$ – is surface density of the charges on the layer, and g – the right part is equal to the sources from the other layers. Remark that it is only one of the possible approaches, so we can consider an charges without density, as the sources.

If we know $\rho(x, y, t)$ in arbitrary moment of the time then we know ψ , ψ_t for active neurons and for others. Hence, for small step τ or in the moment equal to $t + \tau$ system behavior can be described only with the distribution of $\psi(t)$, but not ψ_t . Then we can write Shrödinger's equation for ϕ :

$$i\phi_t = L(\phi) + f \quad (2)$$

where L – is a linear operator and f describes a sources from other layers. We can consider L as elliptic, second order differential operator with arbitrary (may be only first) coefficients. For example, it can be choosen as Laplace operator.

We must describe cross-layers induction in these coefficients and in coefficients by (1). Also, there is analogy with electrohydrodynamical problem (Poljanski 1994).

There is more complex nonlinear behavior during long time for charges and stream function's lines when we have some edges on the blades We hope that the behavior of the activity on the layers of brains structures which modelling as dependent variables will be intricate too.

2. Simulation for brains structures

The equations under consideration can be connected with the «layers» which can be associated to real layers of neuros tissue. Let us consider approximative mesh which lies similar to one of cortex layers (like for current structure analysis problems). Geometrical propeties of the structures and their connections (Fig. 2) can be defined by some well known finite element codes.

For example, crude mesh for cortex model can be constructed of the form of two connected hemisherer which are cuted by the line along motor zone, Fig.3.

On the one side of this line we have Dirichlet condition, and we can consider this as motor zone, but on the other side we have nonhomogeneous Neumann condition for the modelling of somatosensor's information flow in proper direction.

At the first, external field must be defined from Laplace problem solution, without the charges but with potential difference on primary and motor zone for later flow of the charges. Visual information can be simulated from the distribution of unsteady sources on the board of visual zone of the cortex like to charge-producing on metallic boundaries for electrohydrodynamics systems. For example, one can construct external method based on *saccadic* movements of the eyes. At the first, charges on the sensory zone of the cortex were simulated as the quasi-Fourier coefficients obtained by specially designed pattern recognition codes. Another approach deals with direct projection of a external picture to triangulational mesh for the imitation of the result of activity for the primary cortex.

Initially, we have considered the charge as a the continuous function. But from the experemental physiological data, we know that the part of active neurons comparatively not too large, and we know experimantal facts about the localization of cortex activity. Therefore we can model the spreading of spikes better than earlier, with a discrete charge which extends by the field simulated via potential. But we must consider that ϕ is not same every time, when the spikes affects to an under-boundary potential.

The charges or in other words the spikes are going from the zones to motor line. Toroidal mesh is included to every hemisphere and models brains limbic system. The charges are going from cortex to limbic system and from limba to prefrontal zone of the cortex. Thalamic system and the sum of all other brain's parts can be simulated like an parabaloid which is united with prefrontal lob zone and with the parts of limbic model. We can try to change variable coefficients in (1) , (2) to simulation the memory for current flows.

Finite element method and networking techniques are realized for global simulation which include brain imaging and activity interactions (Fix 1977).

By the way, we can observe not only general picture of the spike's distribution, but also pure field induced by individual charge and its trajectory. The observation of the interactions between some charges, may be only two, can give us the result of valid deviation of the particle's way from initial charge's trajectory- without other charges.

3. Eigenvalue problem and EEG

Let us consider eigenvalue problem for Laplace operator which can be defined on the cortex zone:

$$-\Delta v_i = \lambda_i v_i, \quad (3)$$

where λ_i, v_i is i th pair of the eigenvalue and the eigenfunction of Laplace operator. Lanczos algorithm was used to solve this problem like for well known mechanical problems (Parlett 1980).

There is unexpected tally with rhythms of cortex ($\theta, \delta, \alpha, \beta_1, \beta$) for first eigenvalues of associated operator but only in the cases when we take quasi-one-dimensional problem. We consider Dirichlet condition on motor zone and Neumann's condition on sensor zones. So, first eigenvalue is by two order smaller than second eigenvalue, which can be associated with θ rhythm for the brains rhythm (Schmidt 1983) . Third eigenvalue associated with δ rhythm and others with α, β_1, β rhythms. Their fractions approximate rhythms fractions 3 : 6 : 10 : 15 : 25 in the average.

Then we tried to take encephalographic line, like in medical practice. We registered potential difference between two points of one hemisphere. We take a values of potential at 10 meshpoints on two hemispheres (5 from right and 5 from left). Thus from every hemisphere we have gotten 10 encephalographic lines. Every of those is like oscillating process of potential difference near zero, moreover the amplitude of the oscillations does not exceeds a definite boundary. When we obtained

correspondence between our datum and the datum from medical practice, we could consider more subtle structure phenomena – α rhythms desynchronization.

Then, when the number of the neighbours decreased at the instant the charges leaves node of the mesh, we can see positive shift of oscillating frequencies of encephalographic function. More exactly, there is amplitude increasing for the frequencies higher order (Melnikov 1996). It's seems as simulation of the EEG desynchronization phenomena on the Fig. 4, 5.

4. An attempt to model the external environment

Then we made an attempt to model the external environment and the answer to it's influence. We have y as a deformation of an organism. The charges on the motor zone we can consider as same stepped function. We have a equation for y and f . Let

$$-y_{\phi\phi} = f(\phi) \quad (4)$$

$$y(0) = y(2\pi), \quad (5)$$

where f expands into Fourier series of the charges function without 1st coefficient and ϕ is an angle. When the organism is relaxed (we have no charges on motor zone), it is like a simple circle. But, when the charges came, the surface of it lose shape. On the circle we have 3 points that defines 3 vectors, the sum of those vectors give to us the direction and quantity of movement of our «animal». This organism moves on a field with pictures and reacts to them as the pictures projects on the part of the brains mesh.

5. Network realization

Simulations was running on the poor(386s) Netware net.

First of the net's computers worked under simulation of 'virtual world'- creature's motion in the 2-D space (box with some objects).

Second net's computers worked under visual and somatosensor imaging.

Third net's computer worked under creation of motor reaction- general motion plus creature's boundary deformation.

Every part of the brain was considered as a 'layer'. For every 'layer' was related one of the next net's computers where was calculated charges motion, potential media coefficients changing on same layer. There was sited information of layer's geometry plus on-line information of charges and potentials.

Net's server was considered as a place for temporal files- values of charges and potentials on layers, on-line information of virtual world, values of charges on motor zone and on the boundaries of sensor's zones. Files was downloaded (from layer) and uploaded (from neighbouring layers) with uncoherent delays (to prevent collisions).

Our aim was not optimization but searching answers on the next questions- can our creature 'live' during at a long time, are there global effects similar for a real effects (EEG and rhythms) ? Now we try include IP connections in our model plus direct file transfer between layers (simulation without main server).

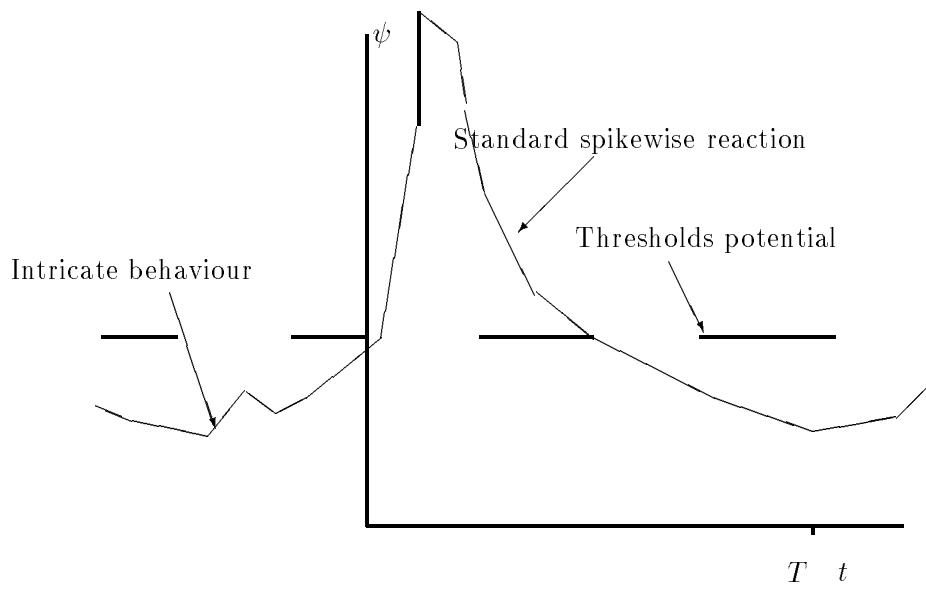


Fig.1. Difference of the diaphragm's potential $-\psi$, spike generation, from 0 to the T neuron is closed for external stimulation

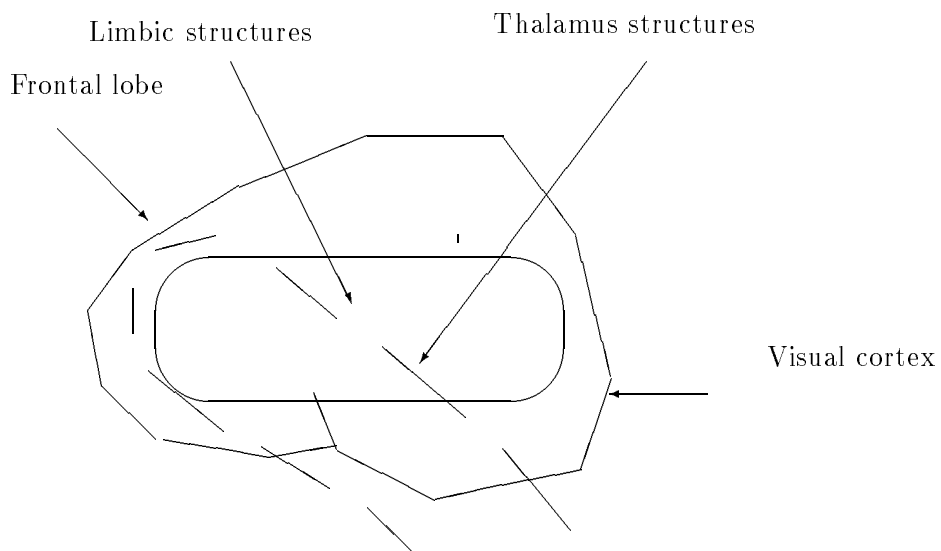


Fig.2. Approximation of the brains structures, view from the side, cortex,limba,thalamus

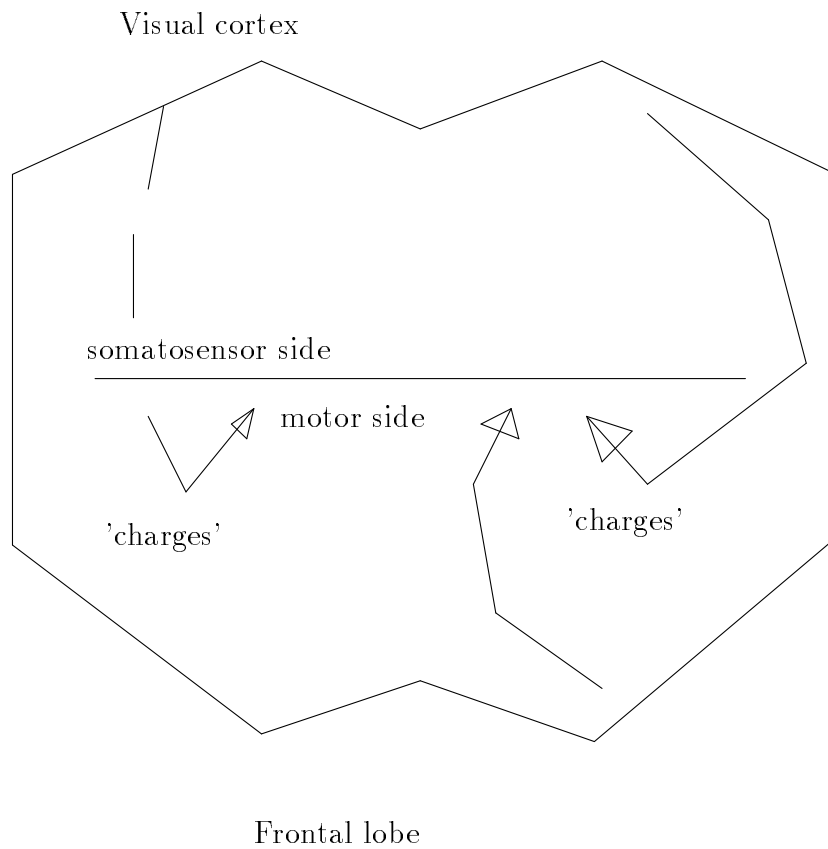


Fig.3. Charges, top view

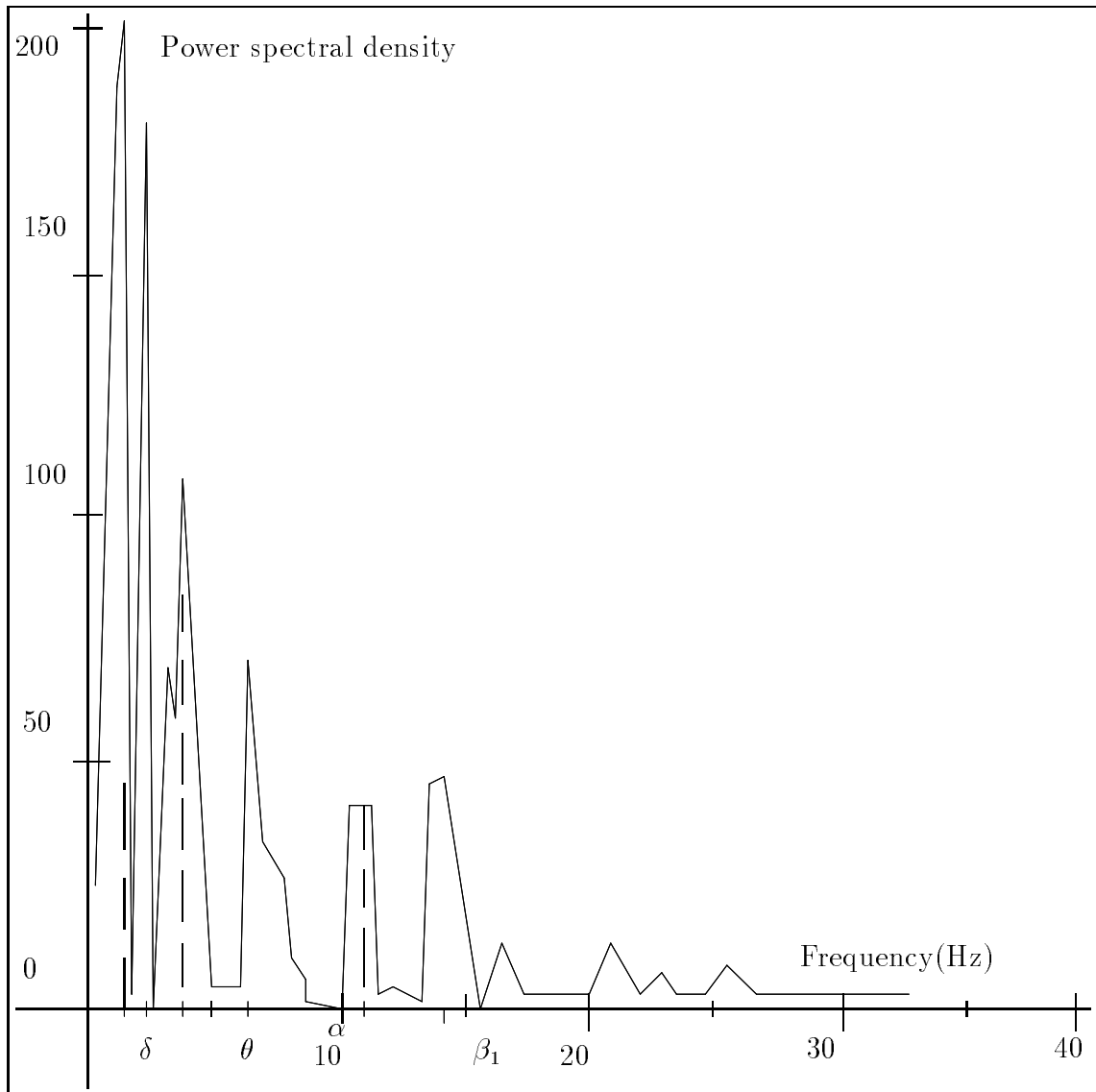


Fig.4. Power density for the standard numbers of the mesh relations

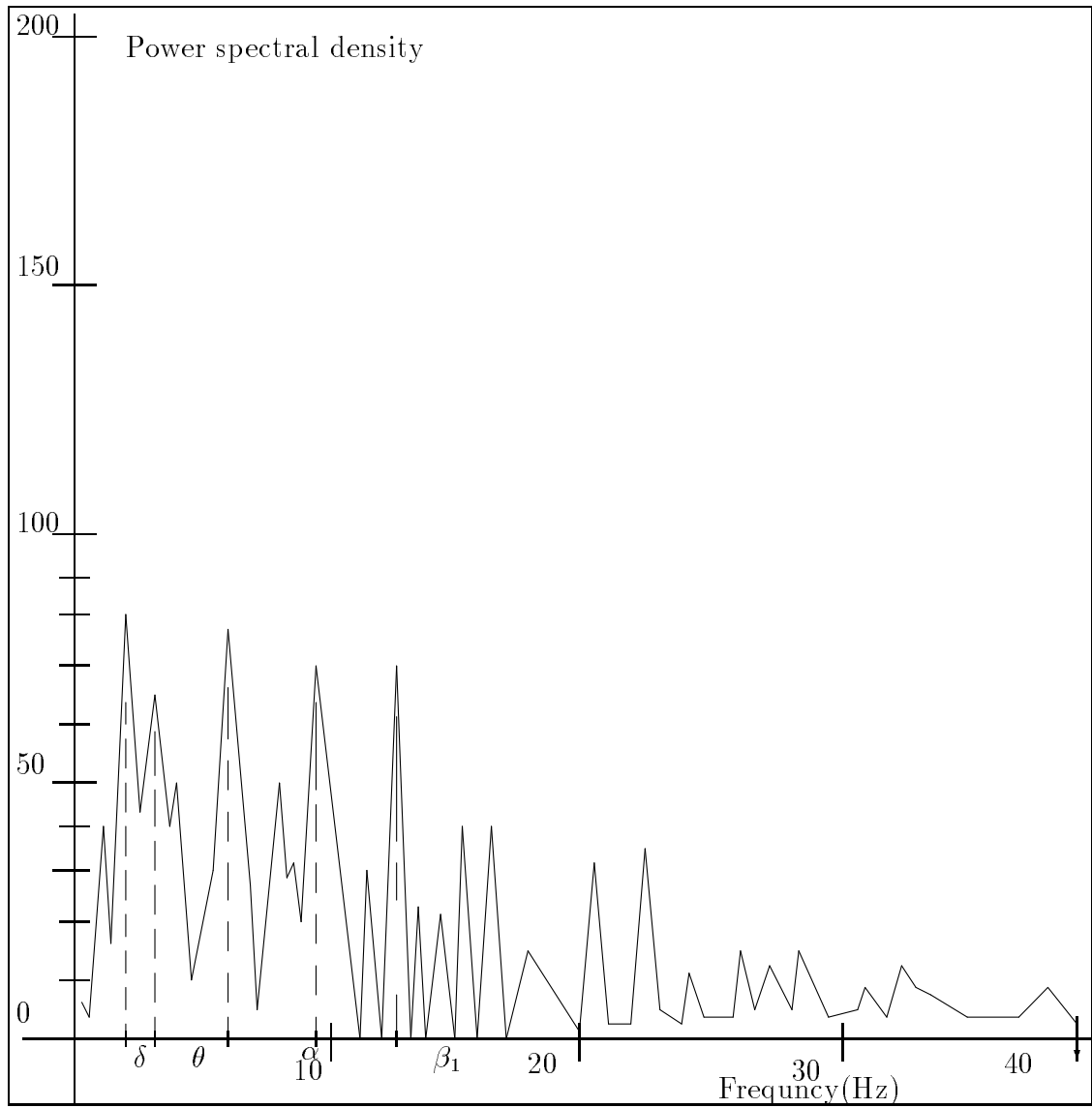


Fig.5. Power density for the decreasing numbers of the mesh relations

ЛИТЕРАТУРА

1. Fix G.F. and Strang G. *Theory of finite element methods*. Moscow: Mir, 1997.
2. Melnikov V.V. *The Unsteady Simulation of Brain's Patterns*. Diploma work, Dept. of Math. Omsk State University. Omsk. Russia. 1996.
3. Parlett B.N. *The Symmetric Eigenvalue problem* // Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. 1980.
4. Poljanski V.A., Sakharov V.I., Faizullin R.T. *Unsteady hydroelectrodynamics calculations in pumps* // Proceedings of the 3 Int.Symp. Hydroelectrodynamics St.Peterburg. Russia. June. (St Pet Univ.). P.134-137 (in Russian).
5. Schmidt R.F. and Thews G. *Human physiology* // Springer-Verlag. N.Y. 1983.

ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ ВЕКТОРНОМУ И КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНОМУ МЕТОДУ С ПОМОЩЬЮ ЗНАКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Л.И. Боженкова

In this paper we describe the symbol model to learn the school-children for vector and coordinate-vector methods.

Использование моделей как основного средства наглядности в обучении математике общепризнано. Согласно В.А. Штофору, «под моделью понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна заменять его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте». К знаковым моделям относятся схемы, таблицы, формулы и т.п. Среди знаковых моделей особое место в обучении занимают предписания по решению задач определенного типа. Различают предписания алгоритмического, полуалгоритмического, полуэвристического, эвристического типов (Л.Н. Ланда). В предписаниях органично соединены содержательные и оперативные знания. Блок-схемная форма записи предписаний выступает в качестве наглядного способа фиксации структурных взаимосвязей между данными и искомыми объектами и моделирует действия и операции по их изучению. Следовательно, предписания являются моделями общих методов решения задач определенного типа. Необходимость таких моделей обуславливается тем, что, как известно из психологии, в мышлении многие из операций мыслительного процесса при усвоении знаний чаще всего не осознаются, что затрудняет применение этих знаний (Груденов Я.И., Кабанова-Меллер Е.Н., Подгорецкая Н.А., Талызина Н.Ф.). Чтобы этого избежать, необходимо при формировании мыслительного процесса выявить эти операции, а затем специально обучать им. Ясно, что это обучение будет тем эффективнее, чем совершенней используется моделирование. Использование предписаний в качестве моделей в практике обучения недооценивается (Л.М. Фридман). При построении моделей используется теоретико-экспериментальный метод моделирования (Н.Ф. Талызина) с учетом анализа сложившихся видов деятельности по решению задач определенных типов. Модель, построенная теоретическим путем, проходит экспериментальную проверку и, в случае необходимости, дальнейшую доработку.

Таблица 1

Классы задач	Типы предписаний, соответствующих классам задач	Форма записи знаковой модели
1. Задачи на построение векторов	Предписания алгоритмического типа по построению суммы, разности двух векторов; вектора, равного произведению вектора на число	Блок-схема
2. Задачи на доказательство равенства векторов	Предписание полуалгоритмического типа	Блок-схема
3. Задачи на доказательство коллинеарности векторов	Предписание полуалгоритмического типа	Блок-схема
4. Задачи на вычисление координат векторов	Предписание алгоритмического типа	Блок-схема
5. Задачи на разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	Предписание алгоритмического типа	Блок-схема
6. Задачи, решаемые векторным методом (без векторного содержания)	Предписание эвристического типа	

Векторный и координатно-векторный методы — фундаментальные понятия современной математики — были включены в школьную программу сравнительно недавно. Анализ содержания школьных и вузовских учебников геометрии с учетом результатов эксперимента позволил выделить среди задач, решаемых векторным и координатно-векторным методами, определенные классы задач. Данная классификация, согласно Д. По́я, предполагает разделение задач на такие классы, что класс задачи предопределяет метод ее решения. В таблице 1 представлены классы задач, решаемых векторным и координатно-векторным методами и соответствующие им предписания, модели общих методов их решения.

Анализ алгоритмических предписаний по решению различных классов задач векторным и координатно-векторным методом показывает, что некоторые из них имеют сходную структуру. Для успешного решения задач на доказательство этим методом необходимо обеспечить элементарность блоков 2–3 этих предписаний. Анализ действующих учебных пособий по геометрии показывает отсутствие таких упражнений. Для формирования умений решать задачи вы-

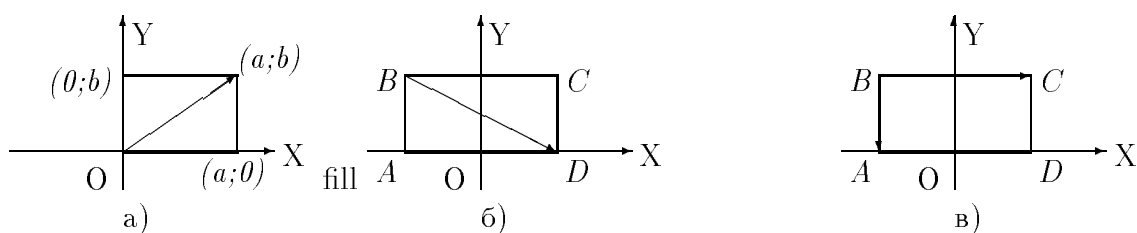


Рис. 1

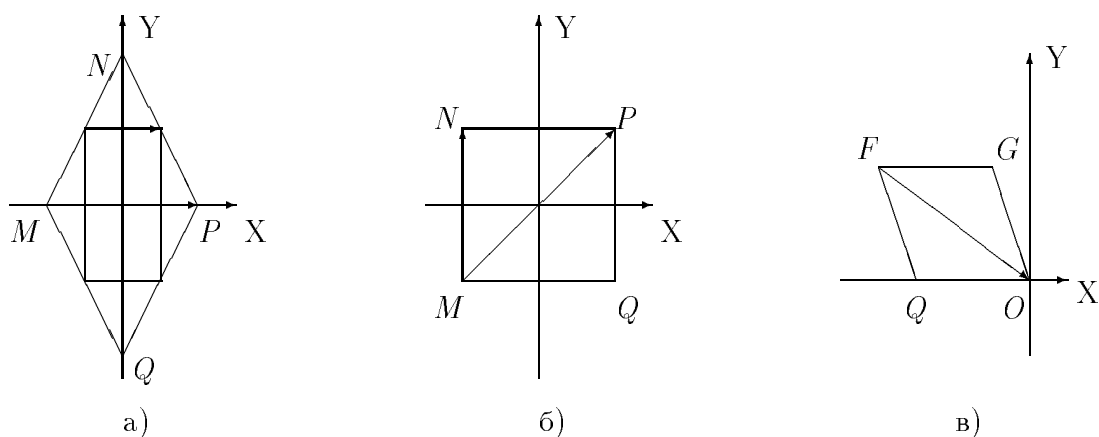


Рис. 2

деленных классов используется теория П.Я. Гальперина.

Рассмотрим в качестве примера фрагменты методики формирования умений решать задачи на доказательство перпендикулярности векторов в координатной форме.

На подготовительном этапе мы предъявляли учащимся упражнения следующего содержания.

Рассмотрите рисунок 1 (рис. 2): а) объясните, почему координаты вершин прямоугольника (ромба) обозначены так, как на рисунке 1 (а) (2 (а)); б) как можно обозначить координаты точек на рисунках 1 (б,в) (2 (б,в))? в) какой выбор системы координат вы считаете наиболее удачным? почему? г) найдите координаты векторов, обозначенных на рисунках.

Экспериментальное обучение показало, что итогом подготовительного этапа явилось понимание учащимися возможности выбора системы координат, введения координат точек и нахождения координат векторов в зависимости от содержания задачи.

На ознакомительном этапе учащиеся составляли алгоритмическое предписание по доказательству перпендикулярности векторов на основе следующего решения набора задач.

1. Даны векторы $\vec{a}(1;0)$ и $\vec{b}(1;1)$. Докажите, что при $\lambda = -1$ векторы $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и \vec{a} перпендикулярны.

2. Даны точки $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(0;4)$, $D(-1;2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.
3. Докажите, что середины сторон любого прямоугольника являются вершинами ромба. При каком условии они будут вершинами квадрата?
4. Дан четырехугольник $ABCD$: $A(-3;0)$, $B(-1;2)$, $C(2;-1)$, $D(0;-2)$. Имеет ли он перпендикулярные стороны?

Прежде чем приступить к решению задач, необходимо было довести до понимания учащихся, что это задачи одного класса. Поэтому предварительно учащиеся ответили на следующие вопросы.

1. Каким методом решаются задачи? (С помощью чего решаются задачи?)
2. Что является общим в требованиях всех задач?
3. Есть что-либо общее в условиях этих задач?
4. Можно ли получить векторы, используя условие задачи?
5. Как установить перпендикулярность векторов?

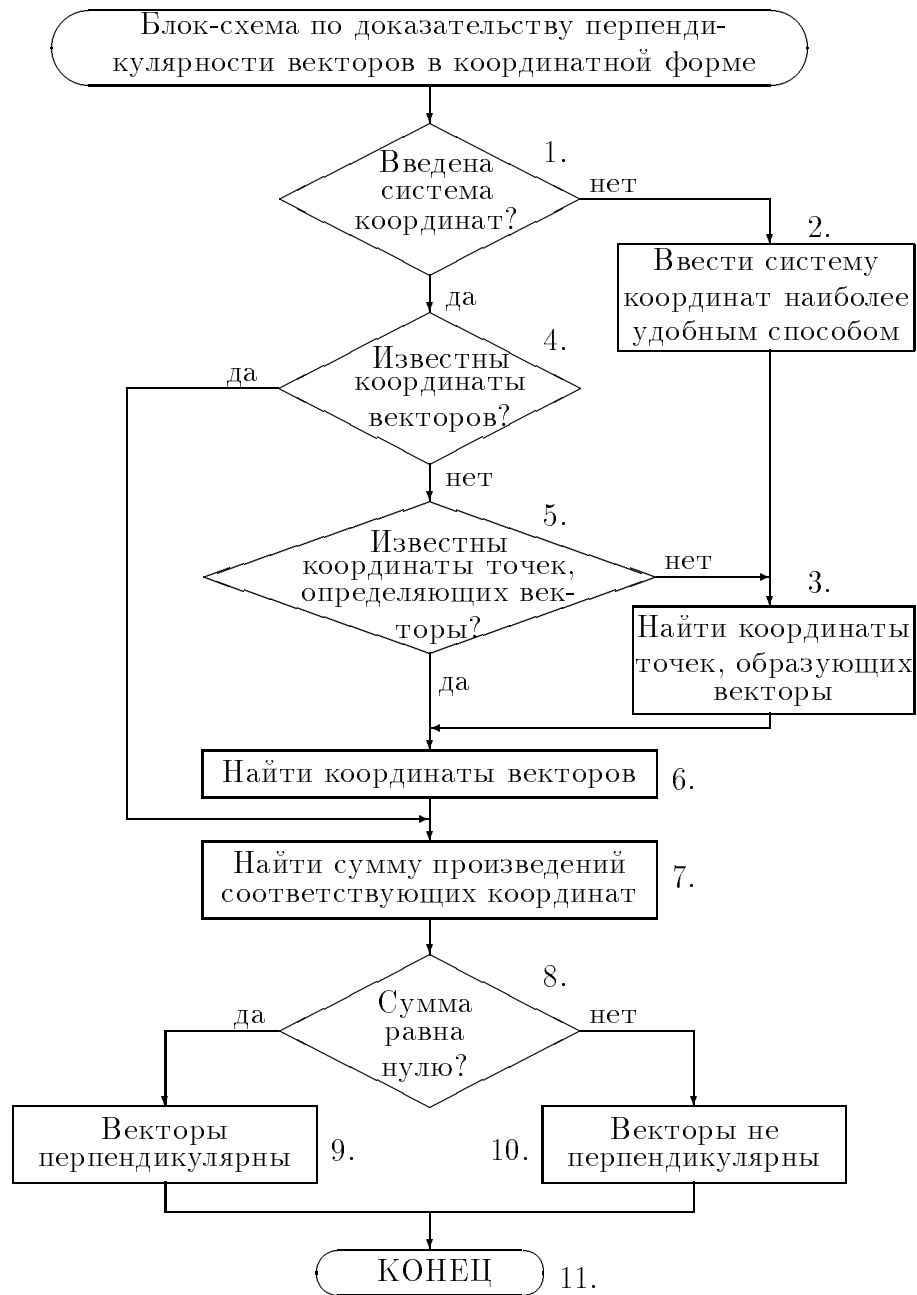
Далее учащиеся самостоятельно решали задачу 1, предварительно коллективно проанализировав ее. Итогом решения задачи 1 явились ответы учащихся на следующие вопросы, сопровождающиеся «открытием» блоков алгоритмического предписания.

1. Была ли введена система координат? Почему? (Открывается первый блок алгоритмического предписания.)
2. Известны координаты векторов, необходимых для решения задачи? («вектор \vec{a} известен, вектор $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ определяется посредством известных операций»). Ответ на вопрос сопровождается открытием блока 4 алгоритмического предписания.
3. Сформулируйте условие, которым вы воспользовались для решения задачи (открываются блоки 6, 7, 8, 9, 11) алгоритмического предписания (Таблица 2).

Учебная деятельность учащихся при решении задачи 2, задачи 3 и задачи 4 организуется аналогично. Итогом решения задачи 2 является «открытие» блоков 5, 6, задачи 3 — блоков 2, 3; задачи 4 — блока 10.

На формирующем этапе продолжается становление умения решать задачи на доказательство перпендикулярности векторов с использованием алгоритмического предписания. Дидактическая цель этого этапа — формирование умения решать задачи рассматриваемого класса сначала с использованием алгоритмического предписания, а затем без его использования.

Таблица 2



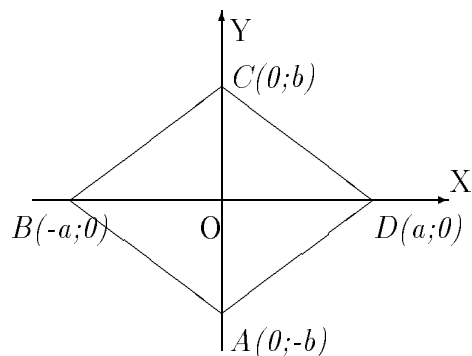


Рис. 3

Чтобы успешно решить задачи на этапе, формирующем умения, необходимо сделать перенос формируемого метода II способом, т.е. решить задачу, значительно отличающуюся от решенных ранее, используя общий метод решения задач данного класса. Эксперимент показал, что часть учащихся отнесла задачу к рассматриваемому классу, т.е. они усвоили общий метод решения задач данного класса на уровне умения. Учащиеся, которые смогли решить задачу только после коллективного поиска метода ее решения, усвоили этот метод на уровне навыка.

Приведем пример деятельности первой части учащихся в процессе решения одной из задач этапа, формирующего умение.

Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

Учащиеся анализируют задачу, используя алгоритмическое предписание и находят «маршрут» — «нет», «да», т.е. выполняются команды блоков: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 (таблица 2). Результат выполнения команды блока 2 — выбор системы координат таким образом, чтобы диагонали ромба лежали на осях координат. Целесообразность выбора обосновывается учащимися (рис. 3).

Далее они вводят обозначения координат точек (команда блока 3) находят координаты векторов (команда блока 6), вычисляют сумму произведений соответствующих координат искомых векторов (команда блока 7) и, проверяя условие блока 8, делают вывод.

На этапе, совершенствующем умение, предусматривается решение любых задач рассматриваемого класса, а также таких, в которых сформированное умение является одним из действий.

ГРАФОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР РЕШЕНИЙ СЮЖЕТНЫХ ЗАДАЧ

Н.А. Жигачева, Н.Г. Рыженко

The article deals with theoretical foundations for building the patterns to solve text problems, and it gives the classification of problems according to their solving complexity.

1. Введение

Метод математического моделирования широко используется во всех областях человеческой деятельности, в том числе и в учебной. Знакомство учащихся с элементами математического моделирования способствует формированию у них не только научного мировоззрения, но и делает их учебную деятельность более осмысленной и продуктивной.

Термин «модель» довольно часто используется в педагогических исследованиях и в школьной практике. В качестве моделей выступают: всевозможные структурно-логические схемы, выполненные с разной степенью подробности; таблицы, рисунки, диаграммы, графы, уравнения, системы уравнений и другие. В них наглядно представлены величины, связи и отношения между ними, задачные ситуации. В реальном процессе решения задачи строится не одна модель, а последовательность. Одни из них (таблицы, рисунки, графы) применяются как вспомогательные для построения решающей модели (по терминологии Л.М.Фридмана) [1, с.91] – уравнения или системы уравнений. Необходимо конкретизировать понятия «модель», в частности – «модель решения» сюжетной задачи, «отношения», «связь». Несмотря на то, что решение задач имеет опыт нескольких столетий и методика решения задач выделилась в специальную дисциплину, само понятие «задача», классификация задач имеют различные трактовки и различные подходы. Очевидно, что вообще вряд ли возможно дать общее определение задачи, которое охватывало бы существенные особенности всех имеющихся в настоящее время определений. Более плодотворным является подход выявления основных характеристических свойств понятия «задача». Применение любого подхода предполагает еще и одновременное использование определенного набора приемов и процедур, служащих инструментом осуществления этого подхода. Именно таковым инструментом и является системный анализ.

2. Системный анализ понятий «задача», «модель», «отношение», «связь»

Условно процесс системного анализа Ю.А.Конаржевский [2, с.54-55] делит на отдельные аспекты. Первый аспект системного анализа – принять анализируемый объект за систему.

Можно считать общепризнанным, что в психолого-педагогических исследованиях задача рассматривается как некая реальная система. Так, Л.М.Фридман, проводя логико-психологический анализ задачи, приходит к выводу, что когда «мы хотим сделать задачи объектом специального изучения, предполагающего рассмотрение задач как особых систем, имеющих определенную структуру» [1, с.13]. При этом задача рассматривается независимо от субъекта, решающего ее. В.И.Крупнич, придерживающийся аналогичной точки зрения на задачу, отмечает: «Каждая задача как сложный объект (система) имеет свое внешнее и внутреннее строение (устройство). Внешнее, то есть смысловое, сюжетное строение задачи назовем информационной структурой задачи. Внутреннее устройство задачи, как системы, называют структурой, то есть то, что остается относительно неизменным при любых преобразованиях задачи в процессе поиска ее решения» [3, с.86]. Заметим, что в дальнейшем мы будем исследовать только структуру решения задачи, которая отлична от структуры задачи.

Отправным пунктом дальнейшего исследования становится понятие *системы*. Существует немало способов классификаций систем и их определений [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Проведя анализ многочисленных определений систем, А.И. Уемов предложил следующее определение: «Вещи m образуют систему относительно заданного свойства P , если в этих вещах имеет место отношение, обладающее свойством P » [7, с.80]. Здесь важно отметить, что свойством P обладают не вещи m , а именно отношения между ними. И как отмечает В.И.Крупнич: «... *под системой понимается непустое множество элементов (объектов), на котором реализовано заранее данное отношение R с фиксированным свойством P* » [3, с.42-43].

Следующий аспект системного анализа – декомпозировать систему, выделить элементы, ее составляющие, дать им количественную и качественную характеристику и классифицировать связи и отношения между ними. В философской литературе можно выявить различные подходы к определению содержания категорий: «связь» и «отношение». Анализ этих подходов подробно дан в [2, 8]. Будем исходить из трактовки этих категорий, предложенных А.И.Уемовым, который рассматривает категорию «связь» как частный случай отношений между явлениями. Характеризуя основные признаки целостной системы, Ю.А.Конаржевский пишет: «... что она (система) не является каким-то механическим конгломератом элементов, а *состоит из совокупности взаимосвязанных, взаимодействующих элементов*». Способ же, при помощи которого эти элементы связаны между собой, характер их связи, называют *структурой* [2, с.19-21]. Понятие структуры (лат. *structura* – строение, связь) равнозначно понятию *упорядоченности* [9, с.182].

Таким образом, в любой системе (задаче) следует различать *состав* и

структуру. Состав – это множество элементов, структура же – способ связи, упорядоченности этих элементов. Наиболее наглядно структура объектов проявляется при построении моделей этих объектов. В литературе хорошо освещены типы математических моделей и этапы математического моделирования, которые достаточно подробно проанализированы С.Ю.Поляковой [10, с.86-97; с.110-122].

«Термин «модель» используется в связи с определенным отношением между объектами. В этом случае это отношение является отношением подобия, определенным на множестве объектов. В каждом частном случае отношения один из объектов является оригиналом, а другой или другие моделями, то есть объектами, подобными оригиналу по некоторым свойствам» [11, с.124]. В теории интеллектуальных систем широкое применение находят *концептуальные модели*. Понятие «концептуальная модель» образуется из двух понятий: «модель» – смысл этого понятия разъяснен в приведенной выше цитате и концепт (лат. *conceptus* – понятие). Тогда: «*система в виде совокупности понятий (концептов), определяющих моделируемый объект, и отношений между понятиями (концептами) называется концептуальной моделью*» [11, с.126].

Эти модели обладают рядом специфических черт:

1. В концептуальных моделях объекты представляются не в количественном (метрическом), а в качественном виде в совокупности их существенных отличительных признаков. В этом смысле концептуальные модели как модели отношений являются условиями построения количественных математических моделей.

2. Концептуальная модель представляет собой абстрактный каркас объекта из наиболее существенных для исследовательской задачи его признаков. Поскольку в этом каркасе элементы как понятия, как абстракции отделены от предметных содержаний, то возникает возможность работать с моделью независимо от объектов, исследуя и выявляя законы, присущие собственно модели. Часто оказывается, что различные по своей природе объекты в концептуальном плане представляются одной и той же структурой, именуемой в концептуальном моделировании *конструктом*.

3. В рамках концептуального моделирования рассматривается некоторый аспект объекта – *предмет исследования* (или при большом количестве учитываемых аспектов – *предметная область*).

4. Конструированию модели может быть сопоставлена только часть предметной области, которая и является *содержанием* концептуальной модели, а процесс сопоставления является процессом *интерпретации* [11, с.126-129].

Использование некоторых понятий из теории интеллектуальных систем можно аргументировать тем, что, как при построении систем, так и при их применении учитываются механизмы обучения человека.

При построении моделей систем нужно учитывать то важное обстоятельство, что, будучи аналогом системы, модель не может достигнуть степени сложности оригинала. В модели стремятся отразить специфические отношения данной системы, специально выделенные для исследования. Моделирование по своей логической структуре напоминает умозаключение по аналогии. Современ-

менная же формальная логика признает лишь эвристическую ценность выводов по аналогии, ведущих к созданию гипотез. Поэтому должны существовать некоторые правила переноса знаний с модели на оригинал. Они, в то же время, могли бы служить правилами экстраполяции (логико-методологическая процедура, состоящая в переносе качественных или количественных характеристик с одной предметной области на другую).

А.И.Уемов установил, что элементы системы могут быть связаны как *внутренними*, так и *внешними* отношениями. Вывод по аналогии о некоторых свойствах модели может быть экстраполирован на оригинал только в том случае, если отношения являются внутренними. Он же сформулировал некоторые принципы определения внутренних отношений.

Если отношение определяется исключительно самими элементами системы, то такое отношение будет обязательно внутренним, а сама система называется замкнутой, или полной.

Примерами внутренних отношений могут служить: логическое отношение следования, родо-видовые отношения и другие.

Отношение может быть внутренним, если система не является замкнутой. Это возможно, если выполняется принцип размерности. На практике принцип размерности осуществляется проверкой свойств, по которым устанавливаются данные отношения. Так, например, отношение между числами (отношение равенства) может быть установлено по разным свойствам:

$a \cdot b = c$ – по мультипликативным свойствам,

$a + b = c$ – по аддитивным свойствам.

Итак, можно дефинировать: *математической моделью решения задачи является кортеж $\langle M; R_1, R_2, \dots, R_m \rangle$* , где M – множество концептов, а R_1, R_2, \dots, R_m – внутренние отношения на этом множестве (не обязательно бинарные).

3. Графовое моделирование отношений

Понятия (концепты) в математической модели могут быть представлены с помощью различных искусственных языков (диаграмм, графов и других). Очень наглядным и широко используемым в математике является «язык графов». Графы являются одним из важных способов задания бинарных отношений на конечных множествах.

Пусть $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Выделим из этого множества подмножество R пар $\langle x; y \rangle$, в которых $x < y$, $R = \{\langle 1; 2 \rangle; \langle 2; 3 \rangle; \langle 3; 4 \rangle; \langle 1; 3 \rangle; \langle 1; 4 \rangle; \langle 2; 4 \rangle\}$ и дадим геометрическое изображение отношения R (рис.1).

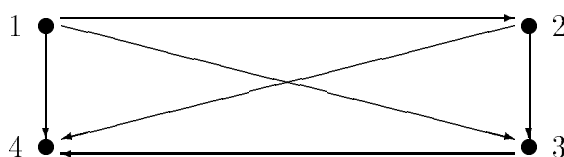


Рис.1

Полученная фигура называется ориентированным графом, или просто графом, а сами точки – вершинами графа. Направленные отрезки, соединяющие вершины графа, – ребра графа (дуги). Граф является моделью $\langle M; \langle \rangle$ с одним (бинарным) отношением строгого порядка \langle . Это отношение строгого порядка можно интерпретировать и другим графом, который называется *деревом* (рис.2). Дерево получается путем «расслоения» графа. Начинаем с вершины 4, которую располагаем на 1 ярусе. Так как в вершину 4 входят три дуги от вершин 1, 2 и 3, то эти вершины располагаем на 2 ярусе, и так далее. Вершины, в которые не входит ни одна дуга, называются *висячими* (вершина 1 на 2 ярусе и вершины 1, 2, 1 на 3 ярусе). В множестве M наибольшим элементом является $x_0 = 4$, он называется *корнем* дерева. Вершины 2 яруса образуют окрестность x_0 , аналогично вершины 3 яруса образуют окрестность вершин 2 яруса. Характерно, что в дереве от каждого элемента к верхнему ярусу идет ровно одна дуга.

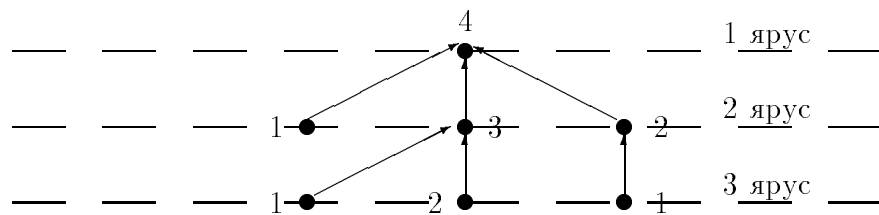


Рис.2

Дерево является моделью бинарного отношения R строгого порядка. Отличительной особенностью дерева является то, что:

- 1) в нем существует наибольший элемент;
- 2) из того, что $x < y$ и $x < z$, следует, что y и z сравнимы ($y < z$ или $y = z$, или $z < y$).

Поэтому отношения строгого порядка \langle на множестве M , удовлетворяющие перечисленным выше двум условиям, называют *отношением древесного порядка* (или *древесным порядком*).

Для дерева существует несколько числовых характеристик, одна из них характеризует *сложность* конечного дерева. Нахождение сложности дерева покажем на конкретном примере. На рисунке 3 изображены деревья, имеющие одинаковое число вершин.

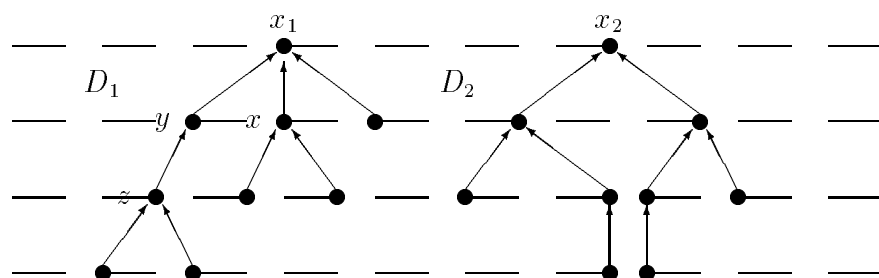


Рис.3

Сложность вершины $\sigma(x_1) = 3 \cdot 9$, где 3 – число дуг, входящих в x_1 ; 9 – число всех вершин, включая и саму вершину x_1 . Аналогично, $\sigma(y) = 1 \cdot 4$; $\sigma(x) = 2 \cdot 3$; $\sigma(z) = 2 \cdot 3$. Суммарная сложность всех вершин и дает сложность дерева: $\sigma(D_1) = 3 \cdot 9 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 43$, соответственно: $\sigma(D_2) = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 38$.

Более подробно с этими и другими понятиями в теории графов можно ознакомиться в [12, 13].

Заметим, что в дальнейшем сложность дерева будем отождествлять со сложностью решения задачи.

4. Семантические графы структур решений сюжетных задач

Для уточнения понятия структурного элемента решения задачи, отношений между элементами и свойства отношений рассмотрим следующие задачи.

1.1 Автомобиль движется равномерно, со скоростью a км/ч. Какой путь он пройдет за b ч?

1.2 Книга стоит a рублей. Сколько денег заплатила библиотека за покупку b книг?

1.3 Производительность бригады a деталей в час. Сколько деталей изготовит бригада за b часов?

Предметная область каждой задачи состоит из трех величин и их значений: c – путь, стоимость, объем выполненной работы; a – скорость, цена, производительность; b – время, количество. Эти три величины связаны тернарным отношением равенства $c = a \cdot b$, которое установлено по мультипликативному свойству. Деревом моделируются только бинарные отношения, в задаче же в основном отношения тернарные. Для моделирования тернарных отношений введем понятие *семантического дерева*, которое отличается от понятия дерева тем, что в каждую вершину привнесена некоторая семантическая информация – одно из значений величин предметной области задачи. В дереве отмечается свойство, по которому установлено отношение равенства (рис.4).

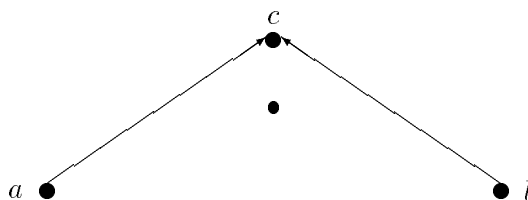


Рис.4

Из трех элементов предметной области один элемент c является неизвестным, при этом он является и искомым, а два других элемента a и b являются известными.

Назовем этот семантический граф (в дальнейшем просто граф) *графом зависимости*: $c = a \cdot b$. В силу обратимости операций умножения и деления,

этот граф является моделью и взаимно обратных задач: $a = c/b$ или $b = c/a$. Сложность графа: $\sigma = 2 \cdot 3 = 6$.

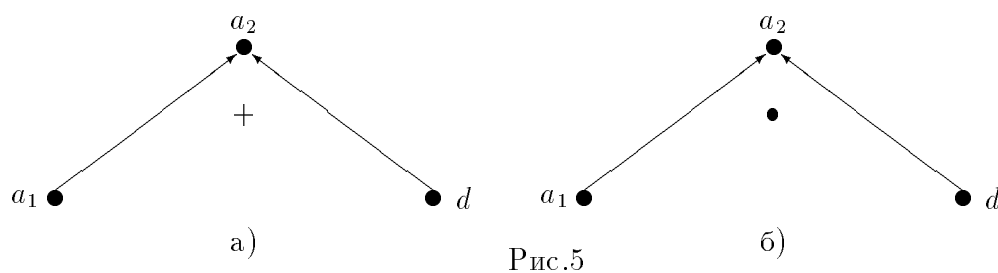
Граф является моделью структур решений задач 1.1 – 1.3 со сложностью решения $\sigma = 6$ (структурные элементы – значения величин; отношение – тернарное отношение равенства, заданное по мультипликативному свойству).

Эта модель удовлетворяет еще одному аспекту системного анализа. Она является интеграционной моделью для решения задач различных сюжетов и решения взаимнообратных задач.

Для выявления других отношений в задачах ограничимся только сюжетными задачами на движение.

Задача 2. Скорость велосипедиста a_1 км/ч, а скорость мотоциклиста на d км/ч больше (в d раз больше). Найти скорость мотоциклиста.

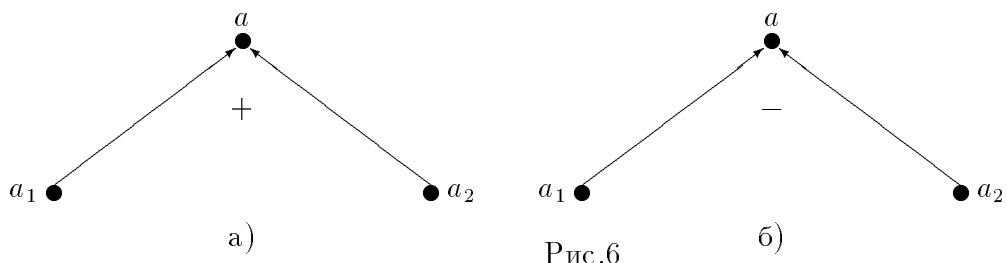
Предметная область задачи состоит из одной основной величины – скорости и двух ее значений: одно значение известно – скорость велосипедиста; другое значение – скорость мотоциклиста неизвестно и является искомым. Кроме основной величины – скорости, в задаче заданы: 1) значение разностного отношения двух значений основной величины (на d км/ч больше), 2) значение кратного отношения между значениями основной величины (в d раз больше). Моделью структуры решения задачи является граф (рис.5).



Граф (рис.5а)) назовем *графом разностного сравнения*, а граф (рис.5б)) – *графом кратного сравнения*. Сложность решения задачи: $\sigma = 2 \cdot 3 = 6$. Эти графы являются моделями решений задач: 1) с соотношением равенства $a_2 = a_1 + d$, заданному по аддитивному свойству, а также взаимно обратных задач: $a_1 = a_2 - d$ или $d = a_2 - a_1$, 2) с соотношением равенства $a_2 = a_1 \cdot d$, заданному по мультипликативному свойству, а также взаимно обратных задач: $a_1 = a_2/d$ или $d = a_2/a_1$.

Задача 3. Из двух пунктов навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Найти их относительную скорость, если скорость первого a_1 км/ч, а скорость второго a_2 км/ч.

Модель структуры решения представлена на рисунке 6а.



Предметная область задачи состоит из одной величины – скорости. Два значения a_1 и a_2 известны, а третье значение a – относительная скорость – неизвестно и является искомым. Моделируется структура решения задачи с отношением равенства $a = a_1 + a_2$. Назовем граф (рис.6а)) *графом суммирования*. В задачах может быть не только отношение соединения (суммирования), но и отнимания: $a = a_1 - a_2$ (рис.6б)). Такой граф назовем *графом отнимания*. Сложность решения задачи: $\sigma = 2 \cdot 3 = 6$.

Рассмотренные графы являются моделями внутренних отношений решений сюжетных задач. Назовем их графами I порядка сложности. Структурными элементами решения задачи (концептами) являются значения величин и результаты разностного или кратного сравнений значений двух значений одной и той же величины.

Модели решений более сложных задач строятся с использованием графов I порядка сложности.

Задача 4. Велосипедист, двигаясь со скоростью 12 км/ч, проехал 24 км. Какое расстояние проедет за это время мотоциклист, скорость которого 36 км/ч? (рис.7)

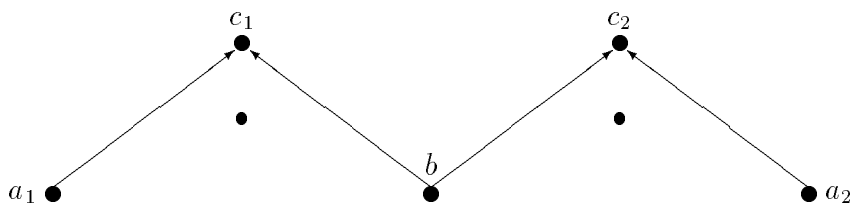


Рис.7

Этот граф не является деревом. Структурный элемент b является общим для двух задачных ситуаций: 1) равномерное движение велосипедиста и 2) равномерное движение мотоциклиста. Расслоим этот граф путем «раздвоения» вершины b (рис.8) в два дерева.

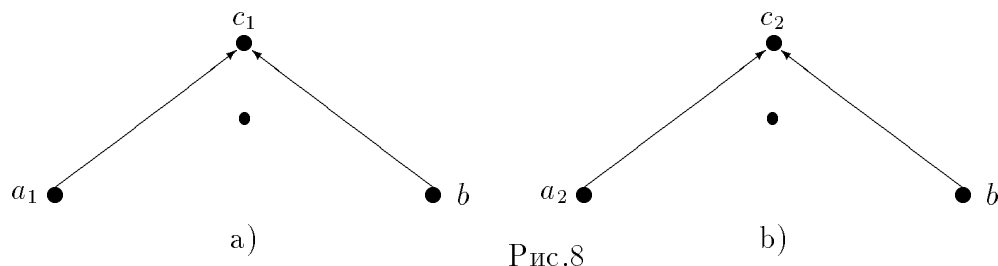


Рис.8

Каждое дерево моделирует одну из задачных ситуаций. Совокупность деревьев образует *лес*. Сложность леса будем характеризовать как суммарную сложность деревьев его составляющих: $\sigma = \sigma(c_1) + \sigma(c_2) = 6 + 6 = 12$.

1. $c_1 = a_1 \cdot b, b = c_1/a_1$.
2. $c_2 = a_2 \cdot b, c_2 = a_2 \cdot c_1/a_1 = (36 \cdot 24)/12 = 72$ км.

Задача 5. Из двух пунктов, расстояние между которыми 96 км, одновременно навстречу друг другу выехали велосипедист со скоростью 12 км/ч и мотоциклист, скорость которого 36 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

Структура решения характеризуется графом (рис.9).

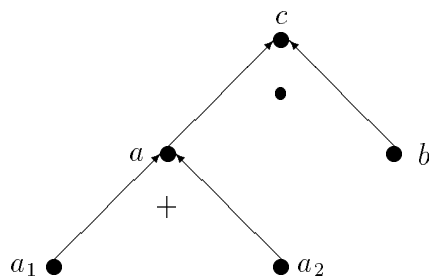


Рис.9

1. $c = a \cdot b,$
2. $a = a_1 + a_2,$
3. $c = (a_1 + a_2) \cdot b, b = c/(a_1 + a_2), b = 96/(36 + 12) = 2$ ч,
 $\sigma = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 16,$

где c км – расстояние, a км/ч – относительная скорость, a_1 км/ч – скорость велосипедиста, a_2 км/ч – скорость мотоциклиста, b ч – время.

Задача 6. Расстояние между двумя пунктами велосипедист проезжает за 8 ч. Мотоциклист, скорость которого на 20 км/ч больше скорости велосипедиста, проезжает это же расстояние за 3 ч. Найти расстояние между пунктами.

Структура решения задачи – лес (рис.10).

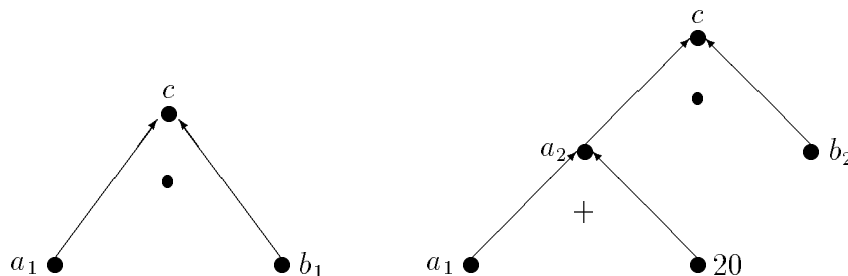


Рис.10

1. $c = a_1 \cdot b_1$,
2. $c = a_2 \cdot b_2$,
3. $a_2 = a_1 + 20$, $c = (a_1 + 20) \cdot b_2$,
4. $a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot b_2 + 20 \cdot b_2$, $a_1 = 20 \cdot b_2 / (b_1 - b_2) = (20 \cdot 3) / (8 - 3) = 12$ ч.
 $\sigma = 6 + 16 = 22$.

Задача 7. Велосипедист проезжает 36 км за 3 ч, а мотоциклист 180 км за 5 ч. Какое расстояние проедут велосипедист и мотоциклист вместе за 6 ч? (рис.11)

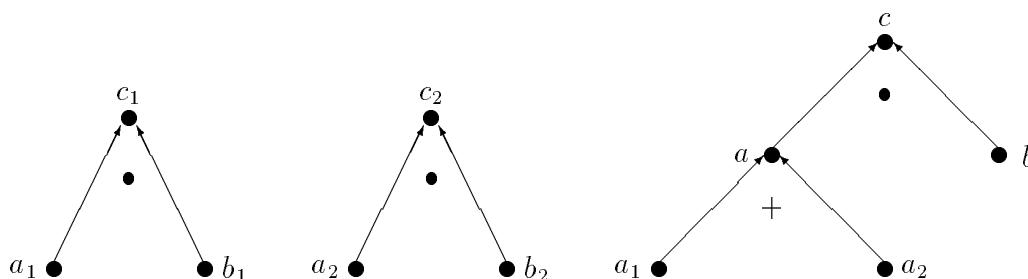


Рис.11

1. $c_1 = a_1 \cdot b_1$, $a_1 = c_1 / b_1$,
2. $c_2 = a_2 \cdot b_2$, $a_2 = c_2 / b_2$,
3. $c = a \cdot b$,
4. $a = a_1 + a_2$,
5. $c = (c_1 / b_1 + c_2 / b_2) \cdot b$, $c = (36 / 3 + 180 / 5) \cdot 6 = 288$ км.
 $\sigma = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 28$.

Количественная оценка сложности решения задачи является объективной основой для систематизации задач в систему, которая в практике преподавания осуществляется интуитивно. Проиллюстрируем это на примере двух задач, взятых из учебника алгебры для 7 класса (Ш.А. Алимов и другие).

Задача 8 (127*). Расстояние между двумя поселками равно 9 км. Дорога имеет подъем, равномерный участок и спуск. Скорость пешехода на подъеме равна 4 км/ч, на равнинном участке – 5 км/ч, на спуске – 6 км/ч. Сколько километров составляет равнинный участок, если пешеход проходит расстояние от одного поселка до другого и обратно за 3 часа и 11 минут?

Модель структуры решения задачи представлена на рисунке 12,

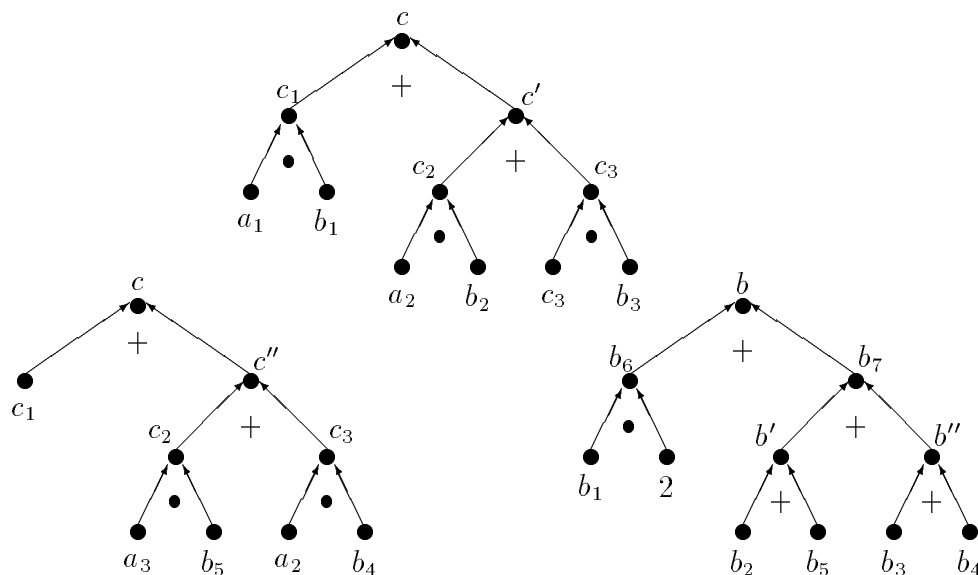


Рис.12

c км – расстояние между поселками,

c_1 км – длина равнинного участка,

a_1 км/ч – скорость пешехода на равнинном участке,

b_1 ч – время пешехода на равнинном участке.

Соответственно:

c_2, a_2, b_2 – значения величин на подъеме,

c_3, a_3, b_3 – значения величин на спуске,

$c' = c_2 + c_3$ – расстояние, пройденное пешеходом на подъеме и спуске.

c_3, a_2, b_4 – значения величин на подъеме, когда пешеход двигался в обратном направлении,

c_2, a_3, b_5 – значения величин при спуске.

b ч – время, затраченное пешеходом для прохождения пути от одного поселка до другого и обратно,

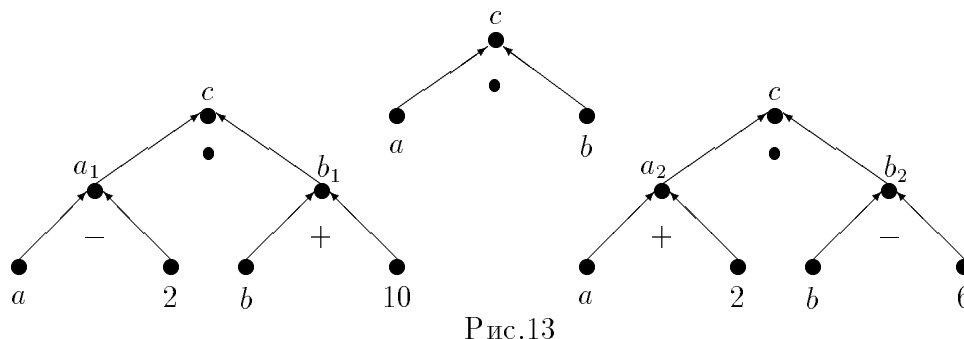
b_1 ч – время на равнинном участке,

$b' = b_2 + b_5$ – суммарное время, затраченное на подъеме, а затем на спуске для прохождения одного и того же участка. Аналогично:

$b'' = b_3 + b_4$.

$$\sigma = (2 \cdot 11 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 152.$$

Задача 9 (754).** Для содержания лошадей был сделан запас сена на некоторое время. Если бы лошадей было на 2 меньше, то этого запаса хватило бы еще на 10 дней; если бы лошадей было на 2 больше, то запаса не хватило бы на 6 дней. Сколько было лошадей и на сколько дней был сделан запас сена? (Рис.13)



c – запас сена,
 a – количество лошадей,
 b – количество дней.
 $\sigma = 2 \cdot (2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3) + 2 \cdot 3 = 58$.

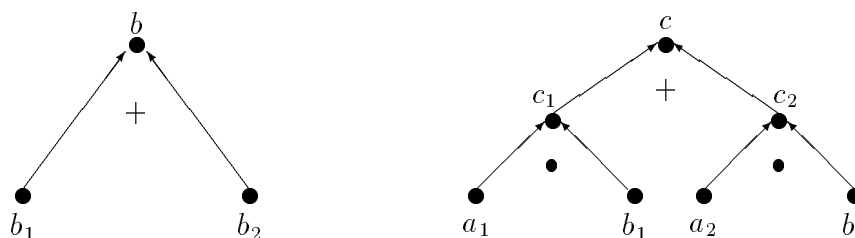
Обучение учащихся моделированию структур решений сюжетных задач позволяет включать их в деятельность по созданию моделей и решению задач одинаковой структуры, но различных сюжетов.

Задача 10. Зоина бабушка развела гусей и кроликов, у которых 25 голов и 54 лапки. Сколько гусей и сколько кроликов у бабушки?

Задача 11. У мальчика было 370 рублей пятирублевыми и двенадцатирублевыми монетами; всего 26 монет. Сколько пятирублевых и сколько двенадцатирублевых монет у него было?

Задача 12. У причала находилось 6 лодок, часть из которых была двухместными, а часть трехместными. Всего в эти лодки может поместиться 14 человек. Сколько двухместных и сколько трехместных лодок было у причала?

Структуры решения этих задач одинаковы. Их модели будут изоморфны модели, приведенной на рисунке 14.



$$\sigma = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 32.$$

Результаты собственного опыта по обучению учащихся моделированию структур решений сюжетных задач начиная с 5 класса позволяют утверждать, что к концу учебного года учащиеся могут решать задачи сложности $\sigma = 32$, а сильные учащиеся – и более сложные задачи.

5. Заключение

В работе изложен один из возможных подходов к моделированию структур решений сюжетных задач и нахождение сложности их решения. При этом:

1. Графовая модель решения задачи выражает программу, создаваемую в процессе анализа задачи, где четко указана последовательность выполняемых действий.

2. Граф служит сохранению информации, предупреждает от блужданий, связанных с повторением уже рассмотренных комбинаций.

3. Один и тот же граф является моделью структуры решения не одной сюжетной задачи, а множества, имеющих одно и то же количество отношений, связанных между собой по одним и тем же свойствам.

4. Структура решения задачи – объективная ее характеристика, а ее количественная оценка является основой для систематизации задач в систему по нарастающей сложности их решения. Структурный анализ решения задач в учебниках 7 класса показал, что наибольшая сложность решения $\sigma = 152$, а наибольшее число задач приходится на сложность $\sigma = 32$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман Л.М. *Логико-психологический анализ школьных учебных задач*. М.: Педагогика, 1977.
2. Конаржевский Ю.А. *Система. Урок. Анализ*. Псков: ПОИПКРО, 1996.
3. Крунич В.И. *Структура и логика процесса обучения математике в средней школе: Метод. разработки по спецкурсу для слушателей ФПК*. М., 1985.
4. Колягин Ю.М. *Задачи в обучении математике*. Ч.1; ч.2. М.: Просвещение, 1977.
5. Колягин Ю.М. *Общие понятия задачи в кибернетическом и системно-психологическом аспекте и его приложения в педагогике математики // Роль и место задач в обучении математике / Под ред. Ю. М. Колягина*. М., 1973.
6. Ильина Т.А. *Системно-структурный подход к исследованию педагогических явлений // Результаты новых исследований в педагогике*. М., 1977.
7. Уемов А.И. *Системы и системные исследования // Проблемы методологии системного исследования*. М., 1972.
8. Ждан Н.А. *Реализация содержательно-деятельных связей в обучении химии как средство повышения системности и осознанности знаний учащихся: / Дисс... канд. пед. наук (13.00.02)*. Омск, 1998.
9. Эткинс П. *Порядок и беспорядок в природ / Пер. с англ*. М.: Мир, 1987.
10. Полякова С.Ю. *Некоторые вопросы математического моделирования общественных процессов // Математические структуры и моделирование*. Вып.1. Омск: ОмГУ, 1998.

11. Ладенко И.С., Разумов В.И., Теслинов А.Г. *Концептуальные основы теории интеллектуальных систем (Систематизация методологических основ интеллектики)* / Со РАН Ин-т Философии и Права. Отв. ред. И.С. Ладенко. Новосибирск, 1994.
12. Шрейдер Ю.А. *Равенство, сходство, порядок*. М.: Наука, 1971.
13. Березина Л.Ю. *Графы и их применение*. М., 1979.

ОБ ЭМПИРИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В 5-6 КЛАССАХ

М.Н. Конопкина

It is not a new idea to refuse from axioms and theorems in Geometry. But, it fact, it is seldom met in practice. The realization of this idea is possible in the field of applied Geometry, by using the empirical method.

1. Введение

В последнее время в печати идет полемика о роли развивающей функции в геометрическом образовании, одними из важнейших составляющих которой являются, на наш взгляд, развитие логики и развитие интуиции (имеется в виду геометрическая интуиция). Неоспоримым является то, что геометрия, как, пожалуй, никакой другой предмет способствует развитию обоих качеств, «поскольку логический и интуитивный аспекты в этом предмете переплетаются» [4] очень тесно.

С другой стороны, противоречия между «сухой логикой» и «живым воображением» является одной из основных причин многих методических трудностей в вопросах геометрического образования [17], начиная с составления школьных программ и кончая оценением знаний учащихся. Существенным препятствием в деле геометрического образования является установившееся за многие годы положение курса геометрии в школе. Мы имеем в виду одно из главных противоречий современных геометрических курсов: первичностью пространственных представлений, формирующихся у человека, и традиционным для России подходом к построению систематического курса геометрии, который навязывает ход размышлений в неестественном направлении - от плоскости к пространству. И еще одно из важнейших препятствий состоит в том, что в школе геометрия изучается только с 7 класса и только в рамках систематического курса, при этом почти полностью отсутствует изучение наглядной геометрии. Прекрасно понимая, что данный подход является общепринятым, мы, тем не менее, не видим убедительных аргументов, объясняющих, почему

© 1999 М.Н. Конопкина

E-mail: konopkina@math.omsu.omskreg.ru

Омский государственный университет

геометрия получила в школе именно такой статус. И основные трудности в изучении геометрии связаны, как нам кажется, именно с этим сложившимся положением в школе.

Излишнее увлечение аксиоматическим подходом в ущерб содержательным вопросам делает курс геометрии сухим, лишенным наглядности, немотивированным. А между тем само происхождение геометрии из потребностей практики позволяет сделать ее изложение более живым и понятным.

2. Современный школьный курс геометрии

В программах и учебниках по математике прошлых лет (а в некоторых учебниках и до сих пор), если говорить о геометрии, совершенно не учитываются ни умственное развитие ребенка, ни возрастные особенности. В последнее время об этом много говорят, но, к сожалению, очень мало что делается. Логика геометрической части программы по математике для 1-4 классов (начальная школа) прочитывается легко: подготовить ребят к сложному систематическому курсу геометрии. Но, остановившись на уровне знакомства с терминологией и примитивными построениями, программа не использует ни непосредственный интерес к геометрической деятельности в этом возрасте, ни богатый геометрический опыт детей, не ставит в качестве цели развитие их геометрической интуиции [13]. Те элементы геометрии, которые включены в программу младших классов, реального действия, к сожалению, не производят. И более того, проведенное одновременно с появлением элементов геометрии изменение содержания математических программ для младших школьников приводит к утрате ряда фактов, содействовавших развитию у школьников логического мышления, что отрицательно сказывается на процессе систематического курса геометрии.

Хорошо известно, какой огромный путь в своем интеллектуальном развитии проходит ребенок в первые 5 - 6 лет своей жизни. В богатом воображении его представлений об окружающем мире геометрические представления занимают одно из центральных мест. Геометрический опыт шестилетнего ребенка настолько многогранен, что если говорить о развитии наглядно-геометрических представлений, то изучение геометрии в школе немного может к нему добавить. Ребенок дошкольного возраста много знает, многое умеет делать руками. Ему доставляют огромное удовольствие занятия геометрическими играми, буквально все, что связано с геометрией. К таким играм можно отнести любые, которые используют такие виды геометрической деятельности, как рисование, конструирование, лепка, вырезание, склеивание, перегибание листков бумаги [15], и т.п. И, как считают психологи, именно на этот возраст приходится пик, если можно так сказать, «геометрической активности» [4].

К сожалению, при поступлении ребенка в школу его богатый геометрический опыт оказывается невостребованным; вместо того, чтобы быть воспринятым и направленным в учебное русло, он фактически прерывается. В течение первых лет обучения геометрия является редкой гостьей на страницах учебников и, к тому же, объем геометрических знаний, предлагаемый учащимся, рассчитан на детей, которые никогда не видели шар, не играли в кубики, не

рисовали с помощью линейки. «На кого, например, рассчитана программа, требующая, чтобы ученик по окончании начальной школы умел распознавать простейшие фигуры: квадрат и прямоугольник, круг и окружность, куб и шар? Ведь в школу приходит не Маугли, выросший среди дикой природы и в жизни не выдавший прямоугольника, а ребенок, который для игры в футбол никогда не брал куб, а детские домики не возводил из шаров. Возможно, кое-кто из ребят не знает названий некоторых геометрических фигур, хотя и прекрасно с ними знаком» [4]. Но мы, взрослые, забываем о том, что дети проходят первые классы школы в возрасте, когда развивается острота зрительных впечатлений и обостряется интерес к наблюдениям за предметами и явлениями окружающей жизни, а также о том, что детские впечатления особенно долго остаются в памяти.

Таким образом, к 12 - 13 годам, когда ученик приступает к изучению геометрии, «его непосредственный интерес к геометрии уже на излете» [4]. И возбудить интерес к предмету школьные учебники за 7 и другие классы не в состоянии: требования к систематическому изложению «накладывают свой отпечаток независимо от выбранного в учебнике подхода» [4] - более аксиоматического или более наглядного. Ученик, как только он открывает учебную книгу по геометрии, неизбежно ощущает разрыв между его личностным геометрическим опытом и тем, с чего начинается любое систематическое изложение геометрии. И это испытание разочарованием от первой встречи со школьной геометрией для многих определяет все дальнейшее отношение к предмету.

Так, социологические исследования в 7 - 11 классах показали, что «на вопрос анкеты «Какой из предметов тебе больше нравится: алгебра или геометрия?» геометрию выбрали от 0 до 25 процентов учащихся» [18].

3. Теоретизация геометрии

Что же больше всего отталкивает учеников от геометрии, отбивает у них интерес? Теоремы и их доказательства! Известный журналист Юрий Рост как-то писал: «Господи, каким только мусором не забивали нам голову учителя! Что, какая часть из того, чем мучили нас учителя и мучают теперь наших детей, сгодилась нам в жизни, для дела, для любви?» [11]. Изучение теорем – один из наиболее трудных с методической точки зрения вопросов преподавания математики. Дело в том, что обычная методика объяснения нового теоретического материала имеет существенные недостатки, связанные прежде всего с пассивностью обучаемых, деятельность которых часто сводится к слушанию учителя и переписыванию с доски. При этом учащиеся могут переписывать с доски, ничего не понимая, отвлекаться или заниматься посторонними делами [3]. Безусловно, нельзя сказать обо всех школьниках, что доказательство теорем снижает их уровень заинтересованности геометрией, но таких большинство.

Как решать эту – проблему каждый учитель представляет по-своему. И в своих исследованиях [4] мы представляем один из способов преподавания геометрии без доказательств, начиная ее изучение с 5 класса. Это курс «Введение в геометрию - 5». Основной тезис нашей работы таков: наряду с систематиче-

ским курсом геометрии, в 5–6-х классах педагогически целесообразно широкое содержательное изучение наглядной геометрии [8]. В его основе должна лежать максимально конкретная, практическая деятельность ребенка, связанная с различными геометрическими объектами. На наш взгляд, в курсе наглядной геометрии не должно содержаться теорем, строгих рассуждений, но должны присутствовать такие темы и задания, которые бы стимулировали учащегося к проведению несложных обоснований, к поиску тех или иных закономерностей. Теоретизация должна быть минимальной и несколько нарастать лишь на завершающем этапе. В нашей работе [4] приводятся некоторые конкретные рекомендации относительно тематики такого курса, при этом выделяются такие важные направления, как геометрическое конструирование, моделирование, дизайн.

Естественно возникают вопросы: на кого этот курс может быть рассчитан и кого может вырастить общеобразовательная школа, отказавшись от доказательств в геометрии, но закрепляя все теоремы практическим, эмпирическим путем? Это, так называемые, «технари». Прежде всего, инженеры различного профиля. А что необходимо инженеру из математики для нормальной продуктивной работы? Достаточно иметь под рукой калькулятор (или компьютер) и справочник для инженеров, в котором содержится необходимый набор тех или иных формул и теорем. Задача школы – научить будущих инженеров самым необходимым навыкам и умениям, использовать их при решении задач. Можно быть уверенным, что инженеру для решения какой-нибудь практической задачи не понадобится ни доказательство теорем Фалеса, Пифагора, ни каких других.

Уже сейчас во многих школах существует дифференцированный подход в преподавании математики. То есть для разных детей преподавание математики ведется в зависимости от необходимого им уровня сложности. В основном это математика для математиков (математические классы), математика для гуманитариев и математика для общеобразовательных классов. Конечно, в некоторых школах пошли дальше: создали экономические классы, технические, биологические и т.п. Но на самом деле, во всех этих классах идет обучение по одной программе, программе для общеобразовательных школ без всяких уклонов. Причем в гуманитарных классах это обучение чаще всего сводится к тому, что программа изменяется лишь за счет сокращения числа часов на изучение той или иной темы, абсолютно не заботясь о том, чтобы оно принесло реальную пользу людям, которым математика в жизни будет встречаться крайне редко.

4. Мнение психологов

В последнее время стало модным прислушиваться к мнениям психологов. И, что удивительно, их мнения о построении школьного курса геометрии в школе во многом схожи. Так, например, известный психолог Ж. Пиаже пишет [12], что, как выяснилось в ходе экспериментов, порядок развития идей ребенка в области геометрии кажется обратным порядку их исторического открытия. Научная геометрия начинается с системы Евклида (трактующей фигуры, углы и

т.д.), развивается в XVII столетии в так называемую проективную геометрию, имеющую дело с проблемами перспективы, и наконец в 19 столетии приходит к топологии (описывающей пространственные отношения в общем качественном виде, например, различие между открытыми и закрытыми структурами, внешним и внутренним, близостью и разделением). «Ребенок, - пишет Ж. Пиаже [11], начинает с последнего: его первые геометрические открытия являются топологическими. В возрасте 3 лет он легко различает открытые и замкнутые фигуры. Если вы попросите его срисовать квадрат или треугольник, он нарисует замкнутый круг; он рисует крест на крест двумя отдельными линиями. Если вы показываете ему рисунок большого круга с маленьким внутри, он может воспроизвести это отношение, но может так же нарисовать маленький круг вне большого, или соприкасающимся с ним. И все это может сделать прежде, чем сумеет нарисовать прямоугольник или выразить евклидовы характеристики (число сторон, углов и т.д.)». И это не может не настораживать, так как в школе придерживаются совершенно иного направления в обучении геометрии, от плоскости к пространству.

5. Исторический момент

В своих исследованиях [4] мы стараемся обращать внимание как раз на это, как нам кажется, одно из главных противоречий современных геометрических курсов: между первичностью пространственных представлений, формирующихся у человека, и традиционным для России подходом к построению систематического курса геометрии, который навязывает ход размышлений в неестественном направлении - от плоскости к пространству. Кроме того, основным направлением моей работы является попытка осуществить идею Ф. Клейна о слиянии в один курс планиметрии и стереометрии [7], [4], [9]. Давняя традиция разделения геометрии на эти два отдела не имеют под собой никакой научной почвы.

Вопрос о методике начальной геометрии далеко не нов. Споры по поводу преподавания геометрии имеют давность, измеряемую сотнями лет. Из всего разнообразия течений в этой области можно выделить два основных. Первое кладет в основу «Начала» Евклида, строя методику геометрии в подчинении основным целям «Начал» - дать логически стройную систему геометрических положений, исходящих из строго определенной группы аксиом, принимаемых без доказательства, - и большого числа положений - теорем, выводимых их аксиом логическим путем. Согласно этой цели, ученики идут по линии отвлеченного дедуктивного мышления, обращая особое внимание на точность определений и установление логической связи между теоремами. Такая система построения учебных курсов геометрии была господствующей в течение многих веков и дошла до нашего времени в форме модернизированных учебников Лежанжра, Адамара (в Англии даже самого Евклида), у нас - курсов геометрии Давидова, Киселева, Глаголева и др. В первоначальном своем виде «Начала» были созданы не педагогами и специально для взрослых людей с достаточно развитым логическим аппаратом [2]. Поэтому, применяя в более или менее чистом виде дедуктивный метод для построения школьного курса геометрии для

детей, сторонники его не учитывали психических особенностей «потребителя» – ребенка и, далее, подростка. В этом главная причина трудности преподавания детям геометрии обычного курса и причина мнения о недоступности геометрии вообще для детей младших классов и т.п.

С течением времени более глубокие сведения показали, что сами «Начала» Евклида не вполне достигают поставленной цели – быть логически стройной системой геометрических истин, выводимых из группы аксиом. Позднее ряд ученых с Гильбертом во главе ввели существенные изменения в «Начала». Но в новом переработанном виде логически выдержанная геометрическая система ввиду своей сложности уже выходит из рамок школьного курса.

Поэтому современный школьный курс геометрии строится как своеобразный компромисс между строго логической системой и интуицией.

6. Эмпирический подход

Применение в курсе эмпирического (индуктивно-опытного) подхода изучения материала может озадачить многих учителей, так как в своей практической работе в школе учителя при преподавании геометрии, как правило, этим методом не пользуются. В литературе же до последнего времени вопросы индуктивно-опытного подхода в процессе преподавания геометрии почти не освещены.

Однако, этот подход не просто фантазия, не имеющая под собой никакой реальной базы. Этим подходом в геометрии пользуются десятки сотен английских школ. Английская система геометрического образования складывалась, как и у нас в России, не один десяток лет. Но как поразительно они различны! Мне удалось познакомиться с основами математического курса образования средней английской школы (К-12), и надо сказать, что многое из опыта английских учителей может быть использовано в нашей школе.

Так, например, в этих стандартах образования по геометрии [10] ни в одном критерии, за исключением только одной фразы, нигде не говорится ни об аксиомах, ни о доказательствах теорем. А исключением является следующая фраза: «ученики должны понимать и применять теорему Пифагора». Даже не сказано, что они должны знать наизусть ее формулировку. Зато очень много внимания уделяется развитию пространственного воображения, геометрической интуиции, применению геометрии на практике, геометрическому моделированию и конструированию. И это, практически, при полном отсутствии аксиоматизации и доказательств, замененных логически стройным обоснованием и приведением массы упражнений, позволяющих учащимся убедиться в справедливости данного факта.

Известный английский геометр-тополог Оливер Хевисайд считал так: «Это возмутительно, что молодые люди должны забивать себе голову сплошными логическими тонкостями, пытаясь понять доказательство очевидного факта, или, может быть, не столь очевидного, и приобретая глубокую неприязнь к математике, в то время как изучение геометрии, важнейшего фундаментального предмета, может быть сделано очень интересным и поучительным. Я придерживаюсь мнения, что это, по существу, экспериментальная наука, как и всякая

другая, и ее надо преподавать в первую очередь с помощью наблюдения и эксперимента. Обучение должно быть естественным продолжением того знакомства с геометрией, которое получает каждый ребенок, соприкасаясь со своим окружением, но, конечно, обучение должно быть более определенным и целенаправленным» [1]. То есть, по мнению Хевисайда, мальчик, который убедится в справедливости геометрической теоремы с помощью измерения, постигнет теорему лучше, чем при чисто логическом обосновании без соответствующего опытного знания. «Поборники логики могут сказать, что таким путем вы ничего не доказываете. У меня другое мнение. Точно так же можно сказать, что вы ничего не доказываете в любых физических измерениях» [1]. Таким образом, геометрия без доказательств имеет право на существование.

7. Наглядная геометрия

История преподавания геометрии показывает, что большинство практикующих учителей считает возможным ввести обучение геометрии с 4 года обучения, то есть с 5 класса. И процесс воспитания и обучения в области пространственных представлений, естественно, должен принять форму наглядной геометрии. Наглядная геометрия, в отличие от систематического курса геометрии, изучает свойства геометрических форм путем «живого созерцания», то есть непосредственных восприятий и представлений конкретных примеров и их изображений. И хорошая постановка преподавания наглядной геометрии в младших классах является одним из условий для лучшего усвоения систематического курса геометрии при дальнейшем обучении. Поэтому следовало бы придать курсу наглядной геометрии большую систематичность и несколько расширить его материал. Время, отводимое на курс арифметики, вполне позволяет углубить изучение геометрических вопросов, что и делается в ряде школ.

При правильной постановке наглядная геометрия образует систему многочисленных и разнообразных демонстраций подвижных наглядных моделей отрезков, углов, треугольников и различных других фигур, систему упражнений в черчении и упражнений в конструировании геометрических моделей из разных материалов [5]. Все эти упражнения могут сопровождаться вычислениями, связанными с изучением свойств геометрических величин: сторон, периметров, углов и площадей.

Возникает вопрос, почему уделяется так много места и внимания геометрическим моделям при прохождении наглядной геометрии? Надо помнить, что главнейшая мощная творческая сила – это логика, создающая в старших классах школы геометрические понятия, – в сознании ученика младших классов еще не развита, она существует в виде слабых ростков. Но у нее есть другая сила, тоже творческая. Это – воображение. В наглядной геометрии логику заменяет интуиция, помогающая создавать представления. Ясно, что на пособия, создающие зрительные впечатления, превращающиеся потом в пространственные представления – геометрические образы, – должно быть обращено особое внимание. Очень многое зависит здесь от самой техники конструирования мо-

делей, умения их показать и умения подвести учащихся к необходимым геометрическим выводам.

Наконец, геометрия введет в преподавание арифметики пространственные образы, оживит ее работу, даст детям для вычислений новый пространственный материал в виде длин отрезков и площадей фигур, новые задачи, связанные со зрительными впечатлениями, которые дети так любят [14].

Следует отметить, что идея введения элементов наглядной геометрии в целях помощи при изучении смежным предметам: рисования, географии и др., особенно в целях подготовки к систематическому курсу геометрии, теперь не встречает яростного сопротивления.

Учителям, приступающим к преподаванию наглядной геометрии, возможно придется отрешиться от обычных приемов преподавания систематического курса геометрии, а также от обычных приемов преподавания, соответствующих 7 классу, с обязательным заучиванием определений, с задаванием на дом и «спрашиванием» уроков, с выставлением отметок и т.п. Все эти педагогические операции придут в свое время, но вначале дело должно идти иначе: демонстрации построения фигур, их свойств и объяснения учителя сменяются общей беседой о том, что было показано и что дети сумели (и верно ли) подметить. Беседы сменяются самостоятельными упражнениями учеников по изготовлению геометрических моделей из разных материалов и т.п. Задача учителя – дать детям большое количество систематизированных зрительных впечатлений, в которых дети должны разобраться и сделать свои выводы при помощи объяснений и наводящих вопросов учителя. Учащиеся не должны думать об отметках, стесняться задавать вопросы и делать замечания по поводу того, что они видят и делают. В такой непринужденной форме, а иногда игре, должна входить наглядная геометрия в 5 класс.

8. Заключение

Хорошая геометрическая подготовка учащихся имеет большое значение для повышения качества их общего и политехнического образования. Уровень этой подготовки в настоящее время нельзя считать нормальным при фактическом начале изучения геометрии в 7 классе одиннадцатилетней школы, то есть при потере целых пяти лет для нормального развития ребенка.

Подводя итог всему вышесказанному, повторим, что формировать умения и навыки мысленно выделять линии, фигуры, комбинировать их в различных сочетаниях, вращать их вокруг оси, накладывать одни на другие и т.д. необходимо еще до систематического курса геометрии. Если эти умения и навыки не сформированы у ребенка до начала обучения геометрии, то, как показывает опыт многих учителей, уроки геометрии представляют для него трудность, преодоление которой требует немалой дополнительной работы учителя. Формирование этих умений в 5 - 6-х классах с помощью эмпирического подхода ликвидировало бы возможность формального усвоения знаний по геометрии, а также создало бы предпосылки для развития пространственных представлений, геометрического воображения, умения читать чертежи [16], что совершенно

необходимо ученикам для дальнейшего обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотовский Б.М. *Оливер Хевисайд*. М.: Наука, 1985.
2. Григорьева И.С. *Взгляд на элементарную геометрию с точки зрения высшей школы* // Математика в школе. 1997. N 5.
3. Далингер В.А. *Самостоятельная деятельность учащихся – основа развивающего обучения* // Математика в школе. 1994. N 6. С.16-21.
4. Долбинин Н.Д., Шарыгин И.Ф. *О курсе наглядной геометрии в младших классах* // Математика в школе. 1990. N 6.
5. Зайкин М.И., Колосова В.А. *Провоцирующие задачи* // Математика в школе. 1997. N 6. С.32-36.
6. Конопкина М.Н. *Эмпирический подход в преподавании геометрии в 6-м классе: Дипломная работа*. Омск: ОмГУ, 1998.
7. Клейн Ф. *Элементарная математика с точки зрения высшей*. Т.2. Геометрия: Пер. с нем. Под ред. В.Г. Болтянского. 2-е изд. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 416 с.
8. Левитас Г.Г. *Введение в геометрию* // Математика в школе. 1990. N 6. С.21-23.
9. Левитас Г.Г. *Фузионизм в школьной геометрии* // Математика в школе. 1995. N 6.
10. *Основы математического курса образования средней английской школы (К-12)* <http://www.state.nh.us/doe/mathfull.htm>.
11. Пиаже Ж. *Избранные психологические труды*. М., 1969. С.121-126.
12. Пиаже Ж. *Как дети образуют математические понятия* // Хрестоматия по психологии. М.: Просвещение, 1977.
13. *Повышение эффективности обучения математики в школе: книга для учителя* / Сост. Глейзер Г.Д. М.: Просвещение, 1989.
14. Подходова Н.С. *Развитие пространственного мышления учащихся 5 – 6 классов* // Математика в школе. 1995. N 6.
15. Рощина Н.Л. *О воспитании эстетического вкуса учащихся 5 – 6 классов* // Математика в школе. 1997. N 2. С.4-7.
16. Фролова Т.Ф. *Роль наглядных представлений при изучении первых разделов планиметрии* // Математика в школе. 1989. N 1. С.39-45.
17. Щиряков А.Н. *Как развивать пространственное воображение учащихся* // Математика в школе. 1991. N 1. С.29-30.
18. Математика. *Приложение к газете «1 Сентября»*.

КУРС НАГЛЯДНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В 5-6 КЛАССАХ

М.Н. Конопкина

The problems of teaching of the graphic practical geometry for children of 10-12 years old are investigated. The main methods and recommendatins of costruction of such geometric course are given. Some theoretical results are represented.

В определении содержания математического образования одной из наиболее трудных для решения проблем было построение школьного курса геометрии. Практика работы по новым программам показала необходимость совершенствования как содержания этого курса, так и форм, средств и методов его изучения. Особенно трудным для учащихся оказался и остается по сей день переход к систематическому курсу геометрии в шестом классе. И совсем печальную картину представляет разрыв геометрических представлений у школьников при переходе из 9 в 10 класс, когда осуществляется переход от планиметрии к стереометрии.

Учителям хорошо известны трудности усвоения учащимися курса стереометрии; например, трудности, связанные с решением задач. Эти трудности главным образом определяются недостаточно развитым пространственным воображением у учащихся, недостаточным запасом пространственных представлений, только при наличии которых можно относительно свободно представить себе геометрическое тело, вид сечения того или иного многогранника или круглого тела, в зависимости от относительного положения секущей плоскости и т.п.

Преодоление этих недостатков может быть достигнуто различными способами. Наиболее радикальный и действенный путь — систематическая работа с учащимися, начиная с 1 класса, по развитию пространственной ориентировки, пространственного представления и пространственного воображения. В современной методике, например, в работах А.М. Пышкало, К.И. Нешкова и других авторов, разработаны рекомендации, реализация которых в обучении математике по новым программам «позволяет значительно повысить уровень геометрического мышления учащихся» [2]. Другие пути связаны с усовершенствованием процесса обучения тех учащихся, которые не получали необходимой

© 1999 М.Н. Конопкина

E-mail: konopkina@math.omsu.omskreg.ru

Омский государственный университет

предварительной подготовки. Здесь творческие учителя и методисты ищут различные средства, применение которых повышает познавательную активность и ускоряет формирование необходимых геометрических представлений.

Мы попытались решить эти проблемы созданием программы курса наглядно-практической геометрии, как раздела программы по математике для 5–6 классов с обновлением содержания образования, составленной на основе программы для средней общеобразовательной школы, работающей по базисному учебному плану.

Выделенный из общей программы 5–6-х классов, курс наглядно-практической геометрии обеспечивает общую систему изучения геометрического материала в этих классах с целью на ранних ступенях развития учащихся подготовить их к сознательному восприятию предмета геометрии в 7-м классе, исключить формальность усвоения материала, сохранить интерес к предмету и подготовить учащихся к дальнейшему изучению геометрии в 8-м классе.

Для целостной системы изучения геометрии в основной школе в 5–6 классах из шести недельных часов математики 1 час выделяется на дальнейшее знакомство с геометрическими понятиями, фигурами, объемными телами, формируются навыки решения простейших геометрических задач. Тогда при изучении геометрического материала в 7-м классе учащиеся своевременно адаптированы к восприятию нового предмета и создается возможность целенаправленной их подготовки к изучению систематического курса в 8-м классе.

Создавая этот курс, мы ставили следующие цели:

- обеспечить преемственность изучения геометрического материала начальной и основной школы;
- продолжить ознакомление с геометрическими фигурами, их изображением на плоскости и в пространстве;
- сформировать практические методы (с помощью опыта или эксперимента) по ознакомлению со свойствами плоских и пространственных фигур;
- постепенно вводить дедуктивные умозаключения и рассуждения по подготовке учащихся к успешному усвоению систематического курса геометрии;
- развивать пространственное мышление.

В своей работе мы под термином «пространственное мышление» подразумеваем определение, данное Г.И. Саранцевым. Пространственное мышление — это «сложный процесс, куда включаются не только логические операции, но и множество перцептивных действий, без которых мыслительный процесс в форме образов протекать не может, а именно опознание объектов, представленных реально или изображенных различными графическими средствами, создание на этой основе адекватных образов и оперирование ими в конкретных ситуациях. Таким образом, под пространственным мышлением подразумевается не только свободное оперирование пространственными образами, созданными на различной основе, но и их преобразование с учетом требования задачи» [5].

Задачи в развитии мышления учащегося играют большую роль. Для этой цели должны подбираться такие задачи, при решении которых ученику нужно проявить некоторую смекалку (догадку, сообразительность), склонность к

обобщению. То есть на уроках математики необходимо создавать такие условия, которые способствуют развитию творческих способностей учащихся. Необходимо учить их искать рациональные способы использования математических фактов, приемов, решений задач.

Практика показывает, что определение содержания задач с развивающими функциями и обучение их решению вызывают большие трудности у ученика. К таким, например, относятся, так называемые, «нестандартные» задачи, требующие нетривиальных способов решения. Как правило, многие из таких задач требуют в решении оперирования пространственными образами.

В последнее время все многообразие оперирования пространственными образами сводят к трем основным: а) приводящее к изменению положения вообразяемого объекта (1 тип), изменению его структуры (2 тип) и композиции преобразований (3 тип) [5].

Указанные типы оперирования пространственными образами, их доступность учащимся рассматриваются как один из надежных показателей, характеризующих уровень развития пространственного мышления. Тип оперирования носит устойчивый характер, и А.Д. Ботвинников, И.В. Тихомиров, И.Я. Каплунович, И.С. Якиманская и др., в соответствии с тремя типами оперирования, выделяют 3 уровня развития пространственного мышления: низкий, средний и высокий.

Важное значение в выполнении упражнений в курсе наглядно-практической геометрии мы отводим умению читать чертеж. Анализируя процесс выполнения упражнений, Г.И. Саранцев выделяет следующие приемы работы с чертежом:

- а) простое вычленение фигуры;
- б) сопоставимое вычленение фигур;
- в) распознавание фигур;
- г) переосмысливание элементов чертежа с точки зрения другого понятия;
- д) сравнение фигур;
- е) изменение взаимного расположения образов;
- ж) изменение структуры образов.

Учитывая уровни пространственного мышления и приемы работы с чертежом, можно выделить следующие уровни чтения чертежа: 1) создание по чертежу образов фигур; 2) оперирование элементами чертежа с изменением их взаимного расположения; 3) оперирование элементами чертежа, приводящими к изменению в его структуре и структуры его элементов.

Многие отмеченные выше приемы чтения чертежа используются в усвоении геометрического материала 5–6 класса. Анализ содержания этого материала показал, что учащиеся должны уметь «создавать образ в соответствии с условием задачи, удерживать его в памяти, а также владеть приемами простого и сопоставимого вычленения фигур, сравнения фигур, переосмысливания элементов чертежа с точки зрения других понятий» [5]. Формирование этих приемов должно осуществляться в процессе выполнения упражнений.

Надо сказать, что пособия по математике для 5–6 классов, изданные в последние годы, содержат большинство отмеченных типов упражнений. Преду-

смотрено пособиями и формирование многих приемов чтения геометрического чертежа. Однако вся эта работа характерна в основном лишь для первых уровней пространственного мышления: создание образов, оперирование пространственными образами, приводящие к изменению их положения. Более того, приемы чтения чертежа связаны с непосредственным оперированием его элементами. Таким образом, овладение приемами чтения чертежа формирует пространственное мышление лишь на материализованном этапе. Но если рассмотреть несколько упражнений из курса геометрии 7–8 классов, то становится ясно, что для их выполнения необходимо владение всеми типами оперирования пространственными образами. Возникает проблема разработки упражнений для формирования пространственного мышления школьников. Такие упражнения должны активно использоваться в 5–6 классах и на первых уроках геометрии в 7 классе. Анализ учебников показывает, что в них мало упражнений, ориентированных на формирование высоких уровней пространственного мышления.

Таким образом, перед нами возникла проблема разработки упражнений для формирования пространственного мышления школьников, которые должны активно уже в 5–6-х классах и на первых уроках геометрии в 7 классе владеть различными приемами оперирования пространственными объектами. А также возникла проблема недостатка учебного времени в соответствии со школьной программой для выполнения этих упражнений на уроках, решение которой мы указали выше.

Следует отметить, что при изучении геометрического материала в 5–6 классах не ставились задачи усвоения (запоминания) понятий в форме определений, хотя определения некоторых из них формируются. Обучение организуется так, чтобы существенное о понятиях запоминалось произвольно. Раскрытие содержания и объема понятий происходит на конкретных примерах с широким использованием средств наглядности, одними из основных средств которых являются чертежи и рисунки. В выявлении существенных (несущественных) признаков понятий и усвоении их учащимися важное значение имеет использование нестандартных чертежей.

Эта работа проводится на базе более раннего, по сравнению с традиционным, формирования у детей геометрических понятий (фигур, их элементов, отношений между ними) и сопровождается весьма целенаправленной работой по обогащению их языка. Развитие речи и пополнение детского словаря не предполагает заучивания новых терминов, не ставится, как правило, и задача определения понятий, для которых вводятся новые термины. Новые геометрические представления и соответствующие термины вводятся «естественным» путем, так, как при этом происходит с развитием «бытовой» речи ребенка. При этом, конечно, большое внимание обращается на *правильное* употребление терминов.

Работа по развитию пространственных представлений (и речи учащихся) осуществляется через выполнение системы специальных упражнений, часто игрового характера, связанных с наблюдением детьми геометрических фигур на предметах окружающей обстановки, графических упражнений, построе-

нием моделей. Особое место занимают упражнения на установление отношений между предметами окружающей обстановки и их изображениями. Естественно, что такая работа проводится с широким привлечением плоских и пространственных моделей.

Исходя из задач школьного математического образования и поставленных нами целей, мы рассматриваем эмпирические методы обучения геометрии, которые способствуют усвоению учащимися не готовых знаний (что особенно трудно именно при изучении геометрии), а способов познания, приводящих к этим знаниям.

Таким образом, основными видами учебной деятельности при изучении нашего курса являются:

- наблюдение и изготовление геометрических фигур из бумаги, картона, проволоки;
- геометрические эксперименты для установки основных свойств фигур;
- измерение;
- построение;
- изображение;
- вычисление по формулам;
- моделирование.

Эти виды деятельности направлены на создание в процессе обучения специальных ситуаций, в процессе применения которых у учащихся формируется представление об изучаемых объектах и их свойствах, выявляются очевидные закономерности, геометрические факты, идеи доказательства и т.д. «Тем самым создаются предпосылки для развития наглядно-образного и практически-действенного мышления — первой ступени развития всякого мышления; результаты наблюдения, опыта и измерений служат основанием для индуктивных выводов, с помощью которых осуществляется открытие новых истин» [1].

Так, например, исследования, проведенные В.В. Давыдовым, Д.Б. Элькониним и их сотрудниками, показывают, что учебное действие моделирования позволяет формировать теоретические обобщения уже у учащихся младших классов и осуществлять своевременный и правильный переход детей от опоры на натуральную наглядность к умению ориентироваться в абстрактных отношениях.

Нельзя сказать, что при обучении в обычной школе не применяются модели или их использование ограничивается. Однако основной функцией модели в этом случае нередко являлась функция иллюстрации. Модель выполняет вспомогательную роль, как средство подкрепления понятийного мышления чувственно-наглядными образами.

В основу курса наглядно-практической геометрии было положено проблемное обучение. Этому послужили очень важные выводы педагогической теории и практики.

Прежде всего необходимо отметить, что знания и готовые способы решения задач могут стать средствами дальнейшего движения мысли лишь в том случае, если учитель организует собственную работу мысли учащегося. Даже в тех случаях, когда учащимся сообщаются готовые обобщения и способы действия,

необходимо подумать о создании внутренних условий для их продуктивного использования. Тем более необходимо создать эти внутренние условия тогда, когда учащиеся должны сами находить новые приемы, новые способы действия, «открывать» новые знания.

Недопустимо механическое понимание процесса усвоения знаний, основанное на том, будто знания, которые учитель передает ученику, просто проецируются в его сознание, переносятся «из головы учителя в голову ученика».

Познавательная потребность возникает у человека в том случае, когда он не может достичь цели с помощью известных ему способов действий, знаний. Эта ситуация и называется проблемной. Именно проблемная ситуация помогает вызвать определенную познавательную потребность у учащихся, дать необходимую направленность их мысли и тем самым создать внутренние условия для усвоения нового материала, обеспечив таким образом возможность управления со стороны педагога этим процессом.

Как уже указывалось в исследованиях, основной тезис нашей работы таков: наряду с систематическим курсом геометрии, в 5–6-х классах педагогически целесообразно широкое содержательное изучение наглядной геометрии. В его основе должна лежать максимально конкретная практическая деятельность ребенка, связанная с различными геометрическими объектами. В курсе должны присутствовать такие темы и задания, которые стимулировали бы учащегося к проведению несложных обоснований, к поиску тех или иных закономерностей. [4]. И, как показало практическое применение данного курса, он удовлетворяет этим требованиям, повышает учебно-познавательный интерес учащихся и позволяет решить ряд проблем современного образования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Епишева О.Б. *Общая методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов.* Тюмень: Изд. ТПИ им. Д.М. Менделеева, 1997. С. 191.
2. Пышкало А.М. *Геометрия в 1–4 классах.* М.: Просвещение, 1968.
3. Конопкина М.Н. *Эмпирический подход в преподавании геометрии в 6-м классе:* Дипломная работа. Омск: ОмГУ, 1998.
4. Конопкина М.Н. *Об эмпирическом подходе при изучении геометрического материала в 5-6 классах.* – Наст. сборник.
5. Саранцев Г.И. *Упражнения в обучении математике.* М.: Просвещение, 1995. 240 с.
6. Эрдниев П.М. *Математика: Учеб. для 5–6 кл. сред. шк.* М.: Просвещение, 1993. 383 с.

О ФОРМИРОВАНИИ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ У УЧАЩИХСЯ 5-6 КЛАССОВ

Н.Г. Русанова

This paper shows us how it is important to have a probability-statistical method of thinking and how it is useful to form it just in the early school age.

1. Введение

Чему и как учить в школе, по-видимому, всегда будет принадлежать к числу вечных проблем, которые постоянно возникают даже после того, как им дано решение, лучшее по сравнению с предшествующим. И это неизбежно, поскольку непрерывно изменяются наши научные знания и подходы к объяснению окружающих нас явлений.

Уже долгое время одной из наиболее актуальных проблем методики преподавания математики остается проблема введения в школьный курс вероятностно-статистической линии, которая давала бы возможность познакомить всех учащихся с миром случайного, с самых ранних лет формировать у них умение накапливать и систематизировать представление о свойствах окружающих явлений.

К особенностям новой линии можно отнести то, что в ней много рассуждений, мало формул, отсутствуют громоздкие вычисления, а главное, открыт большой простор для творческой деятельности учащихся.

Эта линия требует своеобразных форм, средств и приемов обучения, соответствующих возрасту и интересам учащихся: дидактических игр и экспериментов, живых наблюдений и предметной деятельности. Изучение вероятностно-статистического материала должно быть направлено на развитие личности школьника, расширять возможности его общения с современными источниками информации, совершенствовать коммуникативные способности и умение ориентироваться в общественных процессах, анализировать ситуации и принимать обоснованные решения, обогащать систему взглядов на мир осознанными представлениями о закономерностях в массе случайных фактов.

© 1999 Н.Г. Русанова

E-mail: rusanova@math.omsu.omskreg.ru

Омский государственный университет

2. Формирование вероятностно-статистического мышления у учащихся

В настоящее время теория вероятностей завоевала очень серьезное место в науке и прикладной деятельности. Ее идеи, методы и результаты не только используются, но буквально пронизывают все естественные и технические науки, экономику, планирование, организацию производства, связи, а также такие далекие, казалось бы, от математики науки, как лингвистику и археологию.

«Классические представления о господстве в природе строго детерминистических закономерностей являются лишь первым приближением к тому, что реально происходит. Так современное естествознание исходит из представления, согласно которому все явления природы носят статистический характер и ее законы могут получить достаточно полную и точную формулировку только в терминах теории вероятностей» [8].

Научить школьника статистическим взглядам на природу вещей непросто, так как овладение формулировками и терминами теории вероятностей, о которых говорилось выше, требуют определенной математической подготовки. Однако, практика показывает что человеку, не понявшему вероятностных идей в детстве, в более зрелом возрасте они даются нелегко, ибо многое в теории вероятностей вроде бы противоречит жизненному опыту, а переделать психику на новый способ мышления у взрослого человека гораздо сложнее. Поэтому важной задачей является знакомство с идеями теории вероятностей еще в школьном возрасте.

Важной причиной этому является еще и то, что мы постоянно сталкиваемся с вероятностной терминологией в политических и научных тестах, широко используем ее в повседневной речи. Она звучит в прогнозе погоды, когда речь заходит о вероятности дождя, в выступлении политика, когда он оценивает шансы или анализирует данные, в разговоре экономиста, организатора производства, ученого. Поэтому вряд ли можно считать образованным человека, хотя бы в общих чертах не знакомого со взаимоотношением между «необходимым» и «случайным».

В значительной мере по этой причине элементы теории вероятностей введены в курс средней школы в Японии, Франции, Венгрии, США или вводятся путем широко поставленного эксперимента в школах Новой Зеландии, Англии и ряде других стран.

В нашей стране уже предпринимались попытки введения в школьный курс математики элементов комбинаторики и теории вероятностей, но в последующем эти разделы были исключены из программы. Затем изучение теории вероятностей было рекомендовано в рамках факультативных курсов для старшеклассников. В последние годы наблюдается повышенный интерес к проблеме формирования логико-вероятностного мышления школьников [9]. В научно-методической литературе все чаще стали появляться публикации, описывающие попытки изучения элементов теории вероятностей и статистики в 5-8 классах.

И вот введение элементов теории вероятностей в школьный курс матема-

тики, о необходимости которого так долго говорили все наши ученые, наконец-то произошло вновь. Сегодня мы имеем первые учебники [11] для массовой школы (для 5-8 классов), содержащие главы о вероятности.

Тематическое планирование глав по теории вероятностей в этих учебниках предусматривает два подхода: комбинаторный и вероятностно-статистический.

В своих разработках я придерживаюсь только вероятностно-статистического направления в изучении теории вероятностей. На мой взгляд, знакомство с этим направлением лучше начинать со следующих тем: случай, события, статистическая вероятность (частота).

Каждая из этих тем доступна даже школьникам младших классов средней школы, и вместе с тем содержит широкий спектр возможностей для творческой деятельности учащихся.

Особый интерес у школьников вызывает тема «События». На занятиях по этой теме возникает много споров и дискуссий, особенно если требуется определить, каким является то или иное событие (достоверным или невозможным). Не менее интересной является тема «Статистическая вероятность», так как она насыщена разнообразием игр и экспериментов.

3. Тема «Статистическая вероятность»

В качестве примера приведу разработку темы «Частота» для занятия в 5-6 классах. Хотелось бы обратить внимание на то, что это не глава из учебника для детей, а методическая разработка для учителя, проводящего занятие по этой теме.

Тема: Частота события.

Цель: Ознакомить школьников с понятием частоты события и свойствами частоты.

Эксперимент - это некоторое действие, которое может быть многократно повторено в одних и тех же условиях. Например, бросание кубика.

Прежде чем переходить непосредственно к экспериментам, введем понятие частоты некоторого исхода эксперимента, которым мы будем пользоваться.

На самом деле в жизни мы постоянно пользуемся этим понятием. Мы говорим, что «летом часто стоит жаркая погода», но остается еще вопрос: как часто? В обычной речи мы используем для ответа на этот вопрос слова «очень», «не очень», «совсем не» и так далее. Но, чтобы еще более конкретно ответить на этот вопрос, можно сказать: «60 из 90 летних дней были жаркими».

Сформулируем теперь определение частоты более строго.

Частотой (или статистической вероятностью) какого-то события A в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний, при которых событие A произошло, к числу всех испытаний.

Пусть мы провели n испытаний, в которых событие A произошло m раз, тогда, если обозначить частоту события буквой W , можно записать: $W(A) = m/n$.

Итак, частота - это некоторая величина, которая характеризует любой исход данного эксперимента. Но характеризует его только приблизительно. Частота - это изменчивая величина.

Если, например, мы бросили 250 раз две монеты и получили в результате, что 60 раз выпало два орла, то это вовсе не означает, что если мы бросим эти две монеты еще 250 раз, то у нас два орла выпадут опять 60 раз. И, если мы говорим, что при бросании одной монеты орел и решка выпадают примерно поровну, то это не означает, что всегда орлов и решек будет выпадать строго одинаковое количество раз.

Итак, изменчивость - это важное свойство частоты.

Но для большинства случайных событий частота обладает еще одним важным свойством: устойчивостью.

При проведении экспериментов с двумя кубиками, получить в сумме 2 или 12 гораздо сложнее, чем, например, 6, 7 или 8. Какими маленькими эти частоты были при первом эксперименте, такими маленькими они останутся на протяжении и последующих экспериментов.

Таким образом, как бы сложны и запутаны не были случайные явления, во многих из них наблюдается вполне определенный порядок, устойчивость частот. Законы эти столь же неизменны и недвусмысленны, как и все другие законы природы, открытые и используемые человеком.

Для того, чтобы школьники лучше усвоили материал, полезно дать им возможность на личном опыте убедиться в правильности теории. Для этого школьникам предлагается проделать несколько экспериментов.

Эксперимент 1.

Нарисуем на большом листе бумаги прямоугольник 14 на 15 клеток. Между четырнадцатью детьми распределяем номера от 1 до 14. Каждый ставит свою фишку на линию старта (линия размером в 14 клеток) на клетку с соответствующим номером. (Если есть возможность провести эту игру на улице, то можно нарисовать клетки достаточно большими и расставить в них не фишки, а самих детей). Бросаем теперь два кубика. После каждого подбрасывания тот ребенок, чей номер равен сумме очков на выпавших гранях, продвигается на одну клетку вперед (в сторону финиша). Выигрывает тот, кто первый достигнет финиша.

Комментарий для преподавателя.

Сначала номера распределяются среди детей случайным образом. В последующих играх им дается возможность самим выбрать себе номер. Это можно организовать, например, так: тот, кто выиграл в предыдущей игре, выбирает себе фишку последним, а тот, кто ближе всего остался к линии старта, - первым. Очень скоро дети догадываются, что некоторые из них находятся в более благоприятных условиях, чем другие, и что участники, получившие номера 1, 13, 14, не имеют никакого шанса продвинуться вперед. К этому моменту дети уже сами находят причину этого: имея два кубика, невозможно получить в сумме одно очко или число очков, большее двенадцати. Тогда в следующей игре эти числа надо убрать. Если, предположим, игра закончилась победой участника с фишкой 10, то в следующей игре дети, как правило, хотят получить этот номер. Некоторые, подумав, выбирают 6, 7, 8 или 9, но никто не хочет брать 2, 3, 4, 5, 11, 12. После нескольких игр дети замечают, что 6, 7 и 8 выпадают гораздо чаще других.

Эксперимент 2.

Перед началом соревнований футболисты выбирают по жребию ворота, волейболисты - сторону площадки, шахматисты - цвет фигур. Например, судья подбрасывает монету, а капитан команды называет орел или решка. Ни один из капитанов не получает преимущества: орел или решка выпадают одинаково часто. В этом случае все понятно. Если мы будем проводить такой эксперимент много раз, то частоты появления орла и решки будут приблизительно одинаковы, около 0.5.

А что, если подбросить две монеты сразу? Результатов возможно три: либо выпадет два орла, либо две решки, либо один орел и одна решка. И, кажется, нет никаких оснований думать, что монета «предпочтет» какой-либо из этих вариантов. Значит, если провести эксперименты и посчитать частоты полученных событий, то они должны быть приблизительно одинаковыми.

Детям предлагается эксперимент: подбросить две монеты 200 раз и выписать результаты эксперимента, то есть выписать число выпадений двух орлов, двух решек и число выпадений орла и решки.

И что же получается? Кажется, не имеющие разума монеты все же почему-то предпочитают больше выпадать разными сторонами, чем, например, двумя решками. А ведь это вовсе не удивительно, если внимательно разобраться. Результат бросания одной монеты никак не зависит от результата бросания другой монеты, то есть первая монета может упасть вверх орлом или решкой и вторая монета тоже - орлом или решкой. Следовательно, получаем не три возможных результата, а четыре:

орел на первой монете и орел на второй монете,
орел на первой монете и решка на второй монете,
решка на первой монете и орел на второй монете,
решка на первой монете и решка на второй монете.

И если посчитать значения частоты для каждого из этих четырех исходов, то получим приблизительно одинаковые значения.

Эксперимент 3.

Поставим 120 фишек на кружок А.

Первый этап: будем подбрасывать монету и перемещать фишки одну за другой из А в Б, если выпадет орел, и из А в В, если выпадет решка.

Второй этап: пусть все фишки уже находятся в Б и в В. С фишками из Б поступим так: будем подбрасывать кубик и перемещать фишки одну за другой - если выпало одно очко, то в Д, иначе в Г - и так до тех пор, пока кружок Б не опустеет. Тогда перейдем к фишкам из В: при выпадении одного очка будем отправлять их в Д, при выпадении других очков - в Е, и так до тех пор, пока кружок В не опустеет.

Сколько приблизительно фишек окажется в кружках Г, Д, Е?

Перед началом эксперимента каждый школьник может сделать свои предсказания о том, сколько фишек окажется в Г, Д, Е, и после окончания эксперимента сравнить свои предсказания с результатом эксперимента.

Проанализируем теперь эту ситуацию. После первого этапа, как мы уже знаем, фишки приблизительно разделятся пополам, то есть около 60 фишек

окажется в Б и около 60 - в В. В течение второго этапа примерно 5/6 фишек из Б окажется в Г, то есть около 50 фишек; точно так же примерно 50 фишек из В окажется в Е; все остальные, то есть около 20 фишек, окажется в Д.

В качестве домашнего задания можно предложить детям следующие эксперименты.

1. Разных людей (100 человек) просят назвать любое число от 51 до 100 включительно. После записи всех ответов определяется количество четных и нечетных чисел. Частоты их появления должны быть примерно равные.

2. Бросается кубик 200 раз. Каждая из шести граней выпадает одинаково часто.

3. Из телефонного справочника выписывается каждая последняя цифра двухсот наугад выбранных номеров или взятых подряд номеров. Частоты появления каждой из десяти цифр (0, 1, ..., 9) примерно одинаковы.

4. Заключение

Чтобы обучение было успешным, формы, средства и приемы обучения должны соответствовать возрасту и интересам учащихся. Полезны будут занятия в игровой форме. Перед проведением экспериментов можно предложить школьникам выдвинуть гипотезу о возможном результате, попытаться спрогнозировать ситуацию. Использование таких форм обучения развивает у школьников умение рассуждать, выдвигать гипотезы и приводить их обоснование, рассматривать различные случаи возможного развития событий, учитывать все варианты.

Выделим основные задачи, которые могут быть решены в рамках занятий по теории вероятностей: подготовка учащихся к пониманию случайного характера многих процессов и явлений, формирование вероятностных представлений об окружающем мире; формирование адекватных представлений о свойствах случайных явлений; формирование и развитие вероятностной интуиции.

«Мы видим, таким образом, что статистические концепции необходимы не только тому, кто посвятит свою жизнь естественным наукам. В не меньшей мере они нужны и будущим представителям гуманитарных направлений деятельности. Они не могут оставаться во власти только представлений механического детерминизма. После школы молодые граждане должны отчетливо понимать, что в природе и общественной жизни далеко не все процессы сводятся к чисто детерминистическим, большинство носит статистический характер. Школьники не должны лишаться этого более широкого взгляда на жизнь природы и на гуманитарные исследования. Интересы развития всех направлений науки требуют введения в школьное образование элементов вероятностно-статистического мышления» [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Арлей Н., Бух К. *Введение в теорию вероятностей и математическую статистику*. М.: Изд-во иностранной литературы, 1951.

2. Баврин И.И., Фрибус Е.А. *Старинные задачи*. М.: Просвещение, 1994.
3. Боброва О.А. *Теория вероятностей в 5-м классе? // Математика. Ежедневное приложение к газете «Первое сентября»*. 1994. N 11.
4. Бычкова Л.О., Селютин В.Д. *Об изучении вероятности и статистики в школе // Математика в школе*. 1991. N 6.
5. Варга Г., Глеман М. *Вероятность в играх и развлечениях*. М.: Просвещение, 1979.
6. Гнеденко Б.В. *К вопросу о содержании факультатива по теории вероятностей // Математика в школе*. 1987. N 3.
7. Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*. М.: Наука, 1988.
8. Гнеденко Б.В. *Статистическое мышление и школьное математическое образование // Математика в школе*. 1986. N 4.
9. Дядченко Г., Махмегов А., Шокуев В. Развитие логико-вероятностного мышления в школе // *Математика. Ежедневное приложение к газете «Первое сентября»*. 1994. N 18.
10. Крутецкий В.А. *Психология математических способностей школьников*. М.: Просвещение, 1968.
11. *Математика-6: Учебник / Под редакцией Дорофеева Г.В., Шарыгина И.Ф.* – М.: Дрофа, 1997.
12. Русанова Н.Г. *Формирование вероятностно-статистического мышления у учащихся 5-6 классов: Дипломная работа*. Омск: ОмГУ, 1998.
13. Скороход А.В. *Вероятность вокруг нас*. Киев: Наукова думка, 1980.