Математические
структуры и моделирование
2000. Вып. 5, с.54–60.

УДК 517.9

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.В. Коробицын

We consider the some semi-linear differential equation with partial derivatives. It has the constant coefficients. We prove the theorem of existence and uniqueness of the solution.

1. Введение

Моделирование распространения энергии или вещества в пространстве приводит к моделям, ядром которых являются дифференциальные уравнения в частных производных. Применительно к биологическим, этническим и социальным процессам уравнения называют эволюционными. Нелинейное эволюционное уравнение с выделенной линейной частью в абстрактном пространстве H выглядит так:

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + B(t, u),$$

где $A(t)$ — линейный, а $B(t, \cdot)$ — нелинейный операторы. Поэтому изучение свойств таких уравнений является важной частью работ по математическому моделированию.

Изучение подобных уравнений основываются на идеях А.М.Ляпунова и М.Г.Крейна. Основные результаты исследования полулинейных параболических уравнений изложены в [1]. Частично они приведены ниже.

Классическая постановка задачи распространения энергии приводит к граничной задаче в обычном $\mathbf{R}^n$ пространстве. Но анализ осуществляется не этой задачи, а задачи Коши для операторного уравнения в банаховом пространстве. Для построения операторного уравнения используются понятия секториального оператора и аналитической полугруппы. Ниже приведена теорема 1 из [1], указывающая на связь этих понятий и применение их для исследования

E-mail: korobits@univer.omsk.su
Омский государственный университет

задачи Коши, а также теорема 2, указывающая на условия существования и единственности решения в локальном смысле, и теорема 3 на всем пространстве решений.

В данной статье приведен результат исследования одного нелинейного уравнения параболического типа. Это уравнение является базовым для эволюционных моделей биологии и социологии. Доказаны необходимые свойства оператора и функции правой части, выполнение которых приводит к выполнению условий теорем существования и единственности. Доказательство этих теорем обеспечивает теоретическую основу для нахождения решений численными методами, которые необходимы для исследования модели с помощью компьютера. Применение компьютерных технологий при моделировании позволяет проводить большое количество экспериментов с моделью, находить нужные параметры и исследовать модель на устойчивость. Но первым шагом является теоретическое обоснование правомерности нахождения решения. Кроме того, теоретическое исследование позволяет выделить класс функций, среди которых нужно искать решение.

2. Определения и используемые теоремы

В статье используются обозначения для пространств:

$L_2(0,l)$ — пространство всех функций, интегрируемых во 2-й степени с нормой

$$\|f\|_{L_2(0,l)} = \left\{ \int\limits_0^l |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

$C_0^1(0,l)$ — линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем на интервале $(0,l)$ и нормой

$$\|f\|_{C^1(0,l)} = \sup_{x\in(0,l)} \|f(x)\| + \sup_{x\in(0,l)} \|Df(x)\|,$$

$H_0^1(0,l)$ — замыкание $C_0^1(0,l)$ в норме

$$\|f\|_{H_0^1(0,l)} = \left\{ \int\limits_0^l |f'(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

$H^2(0,l)$ — пространство Соболева, состоящее из всех функций $f \in L_2$, обладающих интегрируемыми во 2-й степени обобщенными производными до второго порядка включительно, с нормой

$$\|f\|_{H^2(0,l)} = \left\{ \int\limits_0^l \sum_{j=0}^2 |f^{(j)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Определение 1. Линейный оператор A в банаховом пространстве X называется *секториальным оператором*, если он замкнут и плотно определен, и, кроме того, для некоторого $\varphi \in (0, \pi/2)$, некоторого $M \geq 1$ и некоторого вещественного a сектор

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda | \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

лежит в резольвентном множестве оператора A и

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq M/|\lambda - a|, \ \forall \lambda \in S_{a,\varphi}.$$

Замечание 1. Если A — самосопряженный плотно определенный ограниченный снизу оператор в гильбертовом пространстве, то он секториален.

Определение 2. *Аналитическая полугруппа* в банаховом пространстве X — это семейство непрерывных линейных операторов $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в X, удовлетворяющее условиям:

1) $T(0) = I, T(t)T(s) = T(t+s)$ для $t \geq 0, s \geq 0$;

2) $T(t)x \to x$ при $t \to 0+$ для любого $x \in X$;

3) отображение $t \to T(t)x$ вещественно-аналитично на $0 < t < \infty$ для любого $x \in X$.

Инфинитезимальный генератор L этой полугруппы определяется следующим образом:

$$Lx = \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Его область определения $D(L)$ состоит из всех $x \in X$, для которых этот предел (в X) существует. Мы будем обычно писать $T(t) = e^{Lt}$.

Теорема 1. *Если A — секториальный оператор, то $-A$ — инфинитезимальный генератор аналитической полугруппы $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$, определяемой формулой*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{-\lambda t} d\lambda,$$

где Γ — контур в $\rho(-A)$, такой, что $\arg \lambda \to \pm\theta$ при $|\lambda| \to \infty$ для некоторого θ из $(\pi/2, \pi)$. ■

Далее, e^{-At} можно аналитически продолжить в сектор $\{t \neq 0 : |\arg t| < \varepsilon\}$, содержащий положительную вещественную полуось, и если $Re\sigma(A) > a$, т.е. $Re\lambda > a$ при $\lambda \in \sigma(A)$, то для $t > 0$

$$\|e^{-At}\| \leq Ce^{-at}, \|Ae^{-At}\| \leq \frac{C}{t} e^{-at}$$

при некоторой постоянной C. Наконец,

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = -Ae^{-At} \text{ для } t > 0.$$

Определение 3. Пусть A — секториальный оператор и $Re\sigma(A) > 0$. Для любого $\alpha > 0$ положим

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Оператор A^α определим как оператор, обратный к $A^{-\alpha}(\alpha > 0), D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$. Оператор A^0 определим как тождественный оператор в X.

Замечание 2. Если A — положительно-определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве со спектральным представлением

$$A = \int\limits_0^\infty \lambda dE(\lambda), \text{ то } A^{-\alpha} = \int\limits_0^\infty \lambda^{-\alpha} dE(\lambda).$$

Определение 4. Пусть A — секториальный оператор в банаховом пространстве X. Положим для каждого $\alpha \geq 0$

$$X^\alpha = D(A_1^\alpha)$$

и наделим пространство X^α *нормой графика* $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|,\ x \in X^\alpha$, где $A_1 = A + aI$, причем a выбирается так, чтобы $Re\sigma(A_1) > 0$. Нормы, полученные при различных выборах a, эквивалентны, так что мы можем не отображать в записи нормы зависимости от a.

Определение 5. Функция $f(t, x) : U \to X,\ U \subset \mathbf{R} \times X^\alpha$ при некотором $\alpha, 0 \leq \alpha < 1$ является локально-гельдеровой по t и локально-липшицевой по x на U, если для любого $(t_1, x_1) \in U$ существует окрестность $V \subset U$ точки (t_1, x_1), такая, что для любых $(t, x) \in V, (s, y) \in V$

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq L(|t - s|^\theta + \|x - y\|_\alpha)$$

при некоторых постоянных $L > 0, \theta > 0$.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного операторного уравнения

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x),\ t > t_0, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0,$$

Определение 6. *Решение задачи Коши* (1) на (t_0, t_1) — это непрерывная функция $x : [t_0, t_1) \to X$, такая, что $x(t_0) = x_0$ и для $t \in (t_0, t_1)$ мы имеем: $(t, x(t)) \in U, x(t) \in D(A), (dx/dt)(t)$ существует, отображение $t \to f(t, x(t))$ локально-гельдерово,

$$\int\limits_{t_0}^{t} (t - s)^{-\alpha} \|f(s, x(s))\| ds \to 0 \ \text{ при } \ t \to t_0+$$

и на (t_0, t_1) удовлетворяется дифференциальное уравнение (1).

Следующая лемма дает необходимое и достаточное условие существования решения задачи (1).

Лемма 1. *Если x — решение задачи (1) на (t_0, t_1), то*

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int\limits_0^t e^{-A(t-s)} f(s, x(s))ds. \quad (2)$$

Обратно, если x — непрерывная функция из (t_0, t_1) в X^α, такая, что

$$\int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \|f(s, x(s))\| ds \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0+$$

и интегральное уравнение (2) удовлетворяется при $(t, x(t)) \in U$ для $t_0 < t < t_1$, то $x(\cdot)$ — решение дифференциального уравнения (1) на (t_0, t_1). ∎

Единственность решения в локальной области гарантирует следующая

Теорема 2. *Пусть A — секториальный оператор, $0 \le \alpha < 1$ и $f : U \to X$, где U — открытое подмножество в $\mathbf{R} \times X^\alpha$. Предположим, что функция $f(t, x)$ локально-гельдерова по t и локально-липшицева по x. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in U$ существует $T = T(t_0, x_0) > 0$, такое, что уравнение (1) имеет единственное решение x на $(t_0, t_0 + T)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Фактически $\|x(t) - x_0\|_\alpha \to 0$ при $t \to t_0+$.* ∎

Условия глобального существования и единственности решения приведены в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть A и f — такие, как в теореме 2, и пусть образ $f(B)$ любого замкнутого ограниченного множества $B \subset U$ ограничен в X. Если x — решение уравнения (1) на (t_0, t_1) и t_1 максимально в том смысле, что не существует решения уравнения (1) на (t_0, t_2) при $t_2 > t_1$, то либо $t_1 = +\infty$, либо существует последовательность $t_n \to t_1$ — при $n \to +\infty$, такая, что $(t_n, x(t_n)) \to \partial U$. (Если U не ограничено, то бесконечно удаленная точка принадлежит ∂U.)* ∎

3. Постановка задачи и результат

Теорема 4. *Решение эволюционного уравнения, описывающего изменение функции $u(t, x) : \mathbf{R}^+ \times [0, l] \to \mathbf{R}$ краевой задачи*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au - bu^2, \; 0 < x < l, \; t > 0, \quad (3)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \; \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0,$$
$$u(x, 0) = u_0(x) \ge 0, \; 0 \le x \le l,$$

где $u_0 \in H_0^1(0, l)$, a, b и k — положительные постоянные, имеет единственное решение в пространстве $H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$ для $\forall t > 0$.

Доказательство. Возьмем $X = L^2(0,l)$. Определим линейный оператор A следующим образом:

$$A\varphi(x) = -k\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x),\ 0 < x < l,$$

если φ — гладкая функция на $[0,l]$ с $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(l) = 0$.

Функцию $f(t,x,u) : \mathbf{R}^+ \times [0,l] \times X^\alpha \to X$ определим так: $f(t,x,u) = au - bu^2$.

Краевую задачу (3) формально можно записать как задачу Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве:

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t,x,u),\ t > t_0, \tag{4}$$

$$u(t_0) = u_0.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся следующими предложениями.

Предложение 1. *Оператор A является секториальным.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in D(A)$ и $\psi \in D(A)$, тогда

$$(A\varphi,\varphi) = -k\int\limits_0^l \varphi''(x)\varphi(x)dx = k\int\limits_0^l (\varphi'(x))^2dx \geq 0,$$

$$(A\varphi,\psi) = -k\int\limits_0^l \varphi''(x)\psi(x)dx = -k\int\limits_0^l \varphi(x)\psi''(x)dx = (\varphi, A\psi),$$

так что, используя теоремы Фридрихса [2], мы можем считать оператор A расширенным до самосопряженного плотно определенного линейного оператора в $L^2(0,l)$. В этом случае

$$D(A) = \{\varphi \in L^2(0,l) \mid A\varphi \in L^2(0,l)\} = H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l).$$

Учитывая замечание 1, делаем вывод, что оператор A секториален. ■

Предложение 2. *Функция $f = au - bu^2$ является локально-липшицевой по u, при условии, что $u \in H_0^1(0,l)$.*

Доказательство. Функция $f(t,x) : U \to X,\ U \subset \mathbf{R} \times X$. Фиксируем $(t,x) \in U$ и V ее окрестность. Тогда для любых $(t_1,x_1),(t_2,x_2) \in V$ будем иметь

$$\|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)\|_{L_2} = \|ax_1 - bx_1^2 - ax_2 + bx_2^2\|_{L_2} \leq a\|x_1 - x_2\|_{L_2} + b\|x_1^2 - x_2^2\|_{L_2},$$

$$\|x_1^2 - x_2^2\|_{L_2} = (\int\limits_0^l |x_1^2 - x_2^2|^2 ds)^{1/2} = (\int\limits_0^l |x_1 + x_2|^2|x_1 - x_2|^2 ds)^{1/2}.$$

Поскольку $x_1, x_2 \in H_0^1(0,l)$, то существуют $M_i = \sup\limits_{s\in[0,l]} |x_i(s)|$. Пусть $M = \max\{M_1, M_2\}$, тогда $|x_1 + x_2| \le 2M$. Следовательно:

$$\|x_1^2 - x_2^2\|_{L_2} \le (\int\limits_0^l 4M^2|x_1 - x_2|^2 dl)^{1/2} = 2M\|x_1 - x_2\|_{L_2}.$$

Получаем $\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\|_{L_2} \le L\|x_1 - x_2\|_{L_2}, \quad L = (a + 2Mb)$. ■

Замечание 3. Функция f является непрерывной.

Для доказательства этого замечания достаточно по любому $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta = \varepsilon/(2a + 4Mb)$. Учитывая неравенство, полученное в доказательстве утверждения 2, получаем $\forall x_1, x_2 \in X(\|x_1 - x_2\|_{L_2} < \delta \ => \ \|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\|_{L_2} < \varepsilon)$.

Таким образом, оператор A и функция f удовлетворяют условиям теорем 2 и 3, что обеспечивает существование и единственность решения задачи (4) на всем множестве $U \subset \mathbf{R} \times X$. При этом, если U ограничено, то либо решение существует при всех $t \to +\infty$, либо решение стремится к границе ∂U. В случае неограниченного U бесконечно удаленная точка входит в множество решений.

В силу построения оператора A и функции f, все полученные результаты переносятся на решение исходной задачи (3). ■

4. Заключение

Приведенный результат гарантирует существование и единственность решения поставленной задачи, при условии, что начальные данные принадлежат классу $H_0^1(0,l)$. При этом решение будет находиться в классе $H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$. Кроме того, теорема 3 гарантирует глобальное существование решения либо в заданном ограниченном множестве U, либо во всем пространстве решений. При этом решение существует при всех $t \to +\infty$ или стремится к границе ∂U. В случае неограниченного пространства бесконечно удаленное решение также считается решением задачи.

Литература

1. Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.* М.: Мир, 1985.

2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* М.: Мир, 1979.

3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1968.

4. Треногин В. А. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1980.