

# АЛГОРИТМ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ МНОГОШКАЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НЕСКОЛЬКИХ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

**Д.Н. Лавров**

In this article the estimation algorithm of several wave vectors on measurements made on system of dipoles arrays is presented. Such antenna structure allows enough simply to use the methods of theory of multiscale meters. The additional conditions superimposed on structure of antenna system allow to create the procedure of efficient parallel processing

## **Введение**

Использование разреженных антенных решеток позволяет за счет меньших аппаратных затрат получить качественные оценки пеленга. Обычно в таких решетках расстояние между элементами больше половины длины проходящих волновых фронтов. Это обстоятельство приводит к неоднозначным оценкам волновых векторов. В случае единственного принимаемого сигнала решение проблемы дает теория многошкальных фазовых измерителей, основные методы которой описаны в монографии [1]. В условиях нескольких источников излучения задача в общей постановке становится чрезвычайно сложной.

В данной работе предложен алгоритм оценивания нескольких волновых векторов по измерениям, сделанным на системе дипольных решеток. Такая антенная структура позволяет достаточно просто адаптировать методы оценивания, используемые в теории многошкальных измерителей, для вычисления совокупности волновых векторов. Накладываемые на структуру антенной системы дополнительные условия позволяют распараллелить алгоритм оценивания.

---

© 2000 Д.Н. Лавров

E-mail: lavrov@univer.omsk.su

Омский государственный университет

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим антенную систему, состоящую из  $L$  дипольных решеток. Все приемные элементы антенной системы будем считать одинаковыми слаботочными датчиками. Каждая дипольная решетка образуется из произвольно расположенных относительно друг друга  $M$  датчиков параллельным сдвигом вдоль вектора  $\mathbf{h}_i$ ,  $i = \overline{1, L}$ . В результате сдвига образуется второе множество датчиков, а вектор  $\mathbf{h}_i$  становится фазометрической базой. Первое множество датчиков будем называть *порождающим множеством*, второе – *порожденным множеством*. Каждая дипольная решетка определяется своим вектором сдвига  $\mathbf{h}_i$  и порождающим множеством датчиков.

Компоненты векторов сдвига образуют структурную матрицу системы дипольных решеток

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1^\top \\ \mathbf{h}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{h}_L^\top \end{pmatrix}$$

На систему дипольных решеток воздействует  $D$  плоских волновых фронта, каждому сопоставлен нормированный по длине волновой вектор  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = \overline{1, D}$  (рис. 1), в направлении которого распространяется фронт. Принимаемые на элементах антенной системы сигналы – узкополосные стационарные случайные процессы с нулевым средним и центральной частотой  $\omega$ . В каждом датчике присутствует белый шум с мощностью  $\sigma^2$  без взаимной корреляции между датчиками системы.

Измерения сигналов на порождающих и порожденных множествах представляются в векторном виде

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{s}(t) + \mathbf{u}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{\Phi}_i \mathbf{s}(t) + \mathbf{w}_i(t), \end{cases}$$

где  $\mathbf{x}_i(t)$  –  $M$ -вектор сигналов в точках приема  $i$ -ого порождающего множества,  $i = \overline{1, L}$ ;  $\mathbf{y}_i(t)$  –  $M$ -вектор сигналов, регистрируемых на датчиках порожденного множества;  $\mathbf{A}_i$  –  $(M \times D)$ -матрица откликов  $i$ -ой дипольной решетки на приходящие сигналы, которая разбивается на две подматрицы  $\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i,1} \\ \mathbf{A}_{i,2} \end{pmatrix}$ , ранг и размерность матриц  $\mathbf{A}_{i,1}$ ,  $i = \overline{1, L}$  равны числу принимаемых сигналов  $D$ ;  $\mathbf{u}_i(t)$  и  $\mathbf{w}_i(t)$  – случайные, взаимно некоррелированные, гауссовы процессы с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией компонент;  $\mathbf{\Phi}_i$  – унитарная диагональная  $(D \times D)$ -матрица фазовых задержек между порождающим и порожденным множествами

$$\mathbf{\Phi}_i = \text{diag} \left\{ \exp \left( -j \frac{\omega}{c} \mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_1 \right), \dots, \exp \left( -j \frac{\omega}{c} \mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_D \right) \right\}$$

Корреляционные матрицы измерений на подрешетках запишем в блочном представлении:

$$\mathbf{R}_{i,XX} = E\{\mathbf{x}_i(t)\mathbf{x}_i^*(t)\} = \mathbf{A}_i \mathbf{S} \mathbf{A}_i^* + \sigma^2 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{i,1} & \mathbf{X}_{i,2} \\ \mathbf{X}_{i,3} & \mathbf{X}_{i,4} \end{pmatrix}$$

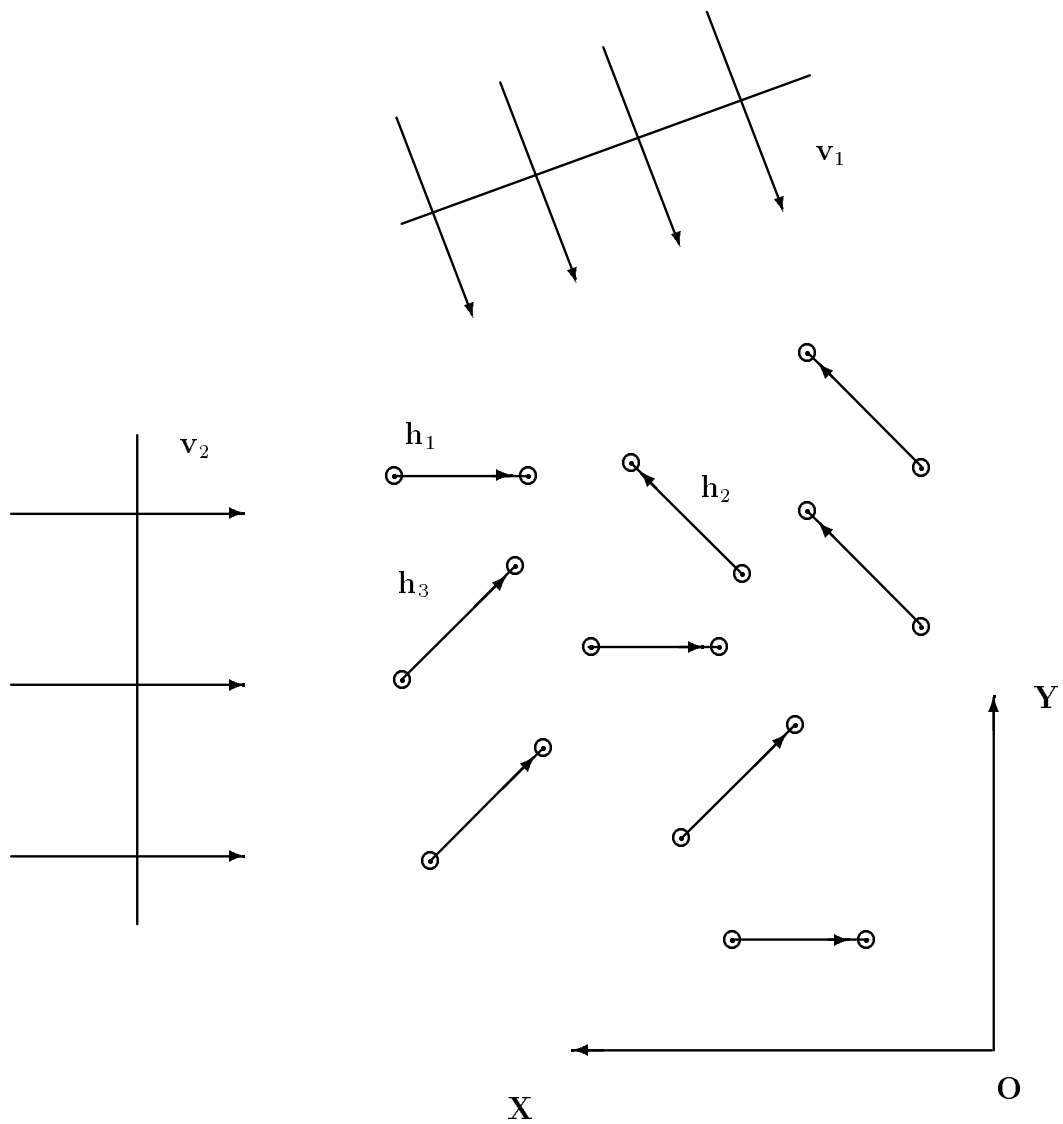


Рис. 1. Плоская антенная система из трех дипольных решеток с порождающими векторами  $h_1, h_2, h_3$ , на которую воздействуют два волновых фронта, распространяющихся в направлении  $v_1, v_2$

$$\mathbf{R}_{i,XY} = E\{\mathbf{x}_i(t)\mathbf{y}_i^*(t)\} = \mathbf{A}_i\mathbf{S}\Phi^*\mathbf{A}_i^* = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{i,1} & \mathbf{Y}_{i,2} \\ \mathbf{Y}_{i,3} & \mathbf{Y}_{i,4} \end{pmatrix},$$

в дальнейшем понадобятся выражения для  $\mathbf{X}_{i,1}$  и  $\mathbf{Y}_{i,1}$

$$\mathbf{X}_{i,1} = \mathbf{A}_{i,1}\mathbf{S}\mathbf{A}_{i,1}^* + \sigma^2\mathbf{I} \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}_{i,1} = \mathbf{A}_{i,1}\mathbf{S}\Phi^*\mathbf{A}_{i,1}^*, \quad (2)$$

где  $\mathbf{A}^*$  – эрмитово сопряженная к  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$  –  $(D \times D)$ -корреляционная матрица сигналов,  $E$  – оператор усреднения.

Поставим задачу: по корреляционным матрицам  $\mathbf{R}_{i,XX}$ ,  $\mathbf{R}_{i,XY}$  определить направления распространения волновых фронтов (волновые векторы  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = \overline{1, L}$ ).

Задача решается в два этапа.

Первый этап – вычисление фазовых задержек между элементами диполей. Для получения оценок фазовых задержек используется метод поворота подпространств [5].

Оценки фазовых задержек в общем случае не будут однозначными, так как длина векторов сдвига может быть больше половины длины волны принимаемых сигналов. Поэтому второй этап оценивания волновых векторов состоит в устранении неоднозначности измерений фазовых задержек. Для этого используется алгоритм устранения неоднозначности типа частичного перебора [2].

Прямое последовательное оценивание волновых векторов оказывается чрезвычайно трудоемким. Быстродействия можно достичь при использовании параллельных вычислений.

## 2. Вычисление фазовых задержек

Метод поворота подпространств состоит в том, что для каждого  $i = \overline{1, L}$  решается обобщенная задача на собственные значения для пары матриц  $\{\mathbf{R}_{i,XX} - \lambda_{min}\mathbf{I}, \mathbf{R}_{i,XY}\}$ . Аргументы ненулевых собственных значений задачи – это оценки фазовых задержек [5].

Покажем, что обобщенная задача на собственные значения для пары матриц  $\{\mathbf{R}_{i,XX} - \lambda_{min}\mathbf{I}, \mathbf{R}_{i,XY}\}$  [5] эквивалентна нахождению собственных чисел матрицы  $\mathbf{C}_i = (\mathbf{X}_{i,1} - \lambda_{min}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Y}_{i,1}$ , где  $\lambda_{min}$  – минимальное собственное число матрицы  $\mathbf{R}_{i,XX}$ ;  $\mathbf{I}$  – единичная матрица соответствующей размерности.

Характеристическое уравнение  $Det(\mathbf{C}_i - \zeta\mathbf{I}) = 0$  перепишем с учетом (1), (2):

$$\begin{aligned} Det((\mathbf{X}_{i,1} - \lambda_{min}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Y}_{i,1} - \zeta\mathbf{I}) &= Det((\mathbf{A}_{i,1}\mathbf{S}\mathbf{A}_{i,1}^*)^{-1}\mathbf{A}_{i,1}\mathbf{S}\Phi^*\mathbf{A}_{i,1}^*) = \\ Det(\mathbf{A}_{i,1}^{-*})Det(\Phi^* - \zeta\mathbf{I})Det(\mathbf{A}_{i,1}^*) &= Det(\Phi^* - \zeta\mathbf{I}). \end{aligned}$$

Все обращения  $\mathbf{A}_{i,1}$  законны, так как ранг матрицы равен ее размерности. В итоге, характеристическое уравнение обобщенной задачи эквивалентно уравнению

$$Det(\Phi^* - \zeta\mathbf{I}) = 0. \quad (3)$$

Это означает, что корни данного уравнения, с точностью до комплексного сопряжения, совпадают с несингулярными обобщенными собственными значениями пары матриц  $\{\mathbf{R}_{i,XX} - \lambda_{min} \mathbf{I}, \mathbf{R}_{i,XY}\}$ .

После решения  $L$  задач на нахождение собственных чисел будет получено  $L$  наборов фазовых задержек, состоящих из скалярных произведений вида  $\mathbf{h}_i^T \mathbf{v}_j$ ,  $i = \overline{1, D}, j = \overline{1, L}$ :

первый набор:  $\mathbf{h}_1^T \mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{h}_1^T \mathbf{v}_{i_D}$ ;

второй набор:  $\mathbf{h}_2^T \mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{h}_2^T \mathbf{v}_{j_D}$ ;

и т.д.

Наборы  $\{i_1, \dots, i_D\}, \{j_1, \dots, j_D\}, \dots$  – это перестановки индексов  $\{1, 2, \dots, D\}$ . Такая запись потребовалась для указания на то, что полученные наборы скалярных произведений не упорядочены по индексам волновых фронтов. Поиск правильного порядка – достаточно отдельная и трудоемкая процедура. Далее будет указано, при каких условиях на геометрию антенной системы можно построить алгоритм не требующий дополнительного трудоемкого упорядочивания.

Запишем все полученные измерения по наборам (вначале первый набор, затем второй набор и т.д.) в вектор  $\mathcal{F}$ , а факт неупорядоченности укажем умножением на неизвестную, подлежащую оценке матрицу перестановок  $\mathbf{P}$ . Фактически известен не сам вектор  $\mathcal{F}$ , а произведение  $\mathbf{P}\mathcal{F}$ .

В дальнейшем считаем, что длины векторов  $\mathbf{h}_i$  и  $\mathbf{v}_j$  в длинах волн и единицах  $2\pi$ .

Если длины векторов сдвига больше половины длины волны приходящих волновых фронтов, то с помощью метода поворота подпространств оцениваются только дробные части скалярных произведений  $\mathbf{h}_i^T \mathbf{v}_j$   $i = \overline{1, L}, j = \overline{1, D}$  ( $i$  – номер дипольной решетки,  $j$  – номер волнового вектора), которые равны  $D$  аргументам корней уравнения (3). Обозначим полные фазовые задержки вектором  $\mathcal{M}$ , а целые потерянные при измерении части полных задержек вектором  $\mathcal{K}$ . Тогда искомый вектор полных фазовых задержек

$$\mathcal{M} = \mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}).$$

Для получения полных фаз необходимо восстановить вектор целых частей, потерянных при измерении, и матрицу перестановок.

В следующем разделе указано формальное решение задачи согласования измерений (перегруппировки) и задачи устранения неоднозначности.

### 3. Оценка максимального правдоподобия

Для построения оценки максимального правдоподобия совокупности волновых векторов необходимо знать закон распределения ошибок разности фаз. Обычно используется усеченный гауссовский закон [1]. Обоснованием выбора является то, что этот закон распределения хорошо аппроксимирует известные распределения фаз при небольших дисперсиях.

Логарифм функции правдоподобия будет равен

$$\ln \mathcal{L} = -C_1(\mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}) - (\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})\mathbf{V})^\top \mathbf{V}(\mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}) - (\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})\mathbf{V}) + C_2,$$

где  $C_1 > 0$ ,  $C_2$  – константы, не зависящие от искомым параметров. Продифференцировав и приравняв к нулю, после ряда преобразований получим итоговые выражения с учетом возможной неоднозначности измерения фазовых задержек:

$$\widehat{\mathbf{V}} = ((\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})^\top \mathbf{V}(\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H}))^{-1}(\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})^\top \mathbf{V}\mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}) \quad (4)$$

$$\widehat{\mathbf{P}} = \underset{\mathbf{P}}{\operatorname{arg\,min}} (\mathcal{F} + \mathcal{K})^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}) \quad (5)$$

$$\widehat{\mathcal{K}} = \underset{\mathcal{K}}{\operatorname{arg\,min}} (\mathcal{F} + \mathcal{K})^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}) \quad (6)$$

с проектором

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{V} - \mathbf{V}(\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})((\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})^\top \mathbf{V}(\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H}))^{-1}(\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})^\top \mathbf{V},$$

где  $\mathbf{I}_D$  –  $(D \times D)$ -единичная матрица;  $\mathbf{P}$  – матрица перестановок;  $\mathcal{F}$  – полученные на первом этапе оценки дробных частей скалярных произведений вида  $\mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_j$ ,  $\mathcal{F}_{i+L(j-1)} = \widehat{\mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_j}$ ,  $i + L(j-1) = \overline{1, LD}$  (за  $\widehat{\mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_j}$  обозначена оценка  $\mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_j$ );  $\mathbf{V}$  –  $(ND)$ -вектор,  $\mathbf{V}_{j+L(i-1)} = \mathbf{v}_{i,j}$  ( $\mathbf{v}_{i,j}$  –  $j$ -ая компонента  $i$ -ого волнового вектора);  $\otimes$  – операция прямого матричного (или кронекеровского) произведения.

Первое уравнение (4) есть максимально правдоподобная оценка совокупности волновых векторов. Второе уравнение (5) описывает алгоритм согласования измерений. Третье (6) – алгоритм устранения неоднозначности. Поиск минимумов в (5), (6) в общем случае – весьма трудоемкая процедура. В следующем разделе показано, при каких условиях можно существенно снизить время, затраченное на получение оценки совокупности волновых векторов.

## 4. Параллельная обработка

Вычислительные затраты алгоритмов решения уравнений (5), (6) растут экспоненциально от числа дипольных решеток и полиномиально от количества источников. Кроме того, для получения фазовых измерений необходимо решить  $L$  задач на собственные значения.

Пусть порождающее множество датчиков для всех дипольных решеток одинаково, датчики этого множества участвуют в образовании всех дипольных решеток системы. Следовательно, одинаковы для всех решеток матрицы  $\mathbf{X}_{i,1}$  и  $\mathbf{A}_{i,1}$ , при этом оказывается, что  $\mathbf{C}_i$  принадлежат семейству коммутирующих матриц, то есть для любых  $i, j = \overline{1, L}$  выполняется свойство  $\mathbf{C}_i \mathbf{C}_j = \mathbf{C}_j \mathbf{C}_i$  (проверяется прямой подстановкой выражений для матриц  $\mathbf{C}_i$ ). Такие матрицы приводятся к верхней форме Шура (над комплексным полем – к верхнетреугольной форме) одним и тем же ортогональным преобразованием [7]. Это означает, что

необходимо решать в полном объеме только одну задачу на собственные значения, например, для  $\mathbf{C}_1$ . Решения остальных находятся при помощи уже полученного ортогонального QR-преобразования этой первой задачи. Кроме того, никакого согласования измерений уже не требуется, так как собственные числа, соответствующие одному волновому вектору, принадлежат и одному и тому же собственному подпространству. Таким образом, отпадает необходимость оценивать матрицу  $\mathbf{P}$ , так как она тождественно равна единичной матрице.

Систему дипольных решеток с одним и тем же порождающим множеством можно рассматривать как систему решеток с опорными антеннами. Линейные структуры с опорной антенной исследовались, например, в работе [3]. Опорными антеннами в нашем случае являются элементы порождающего множества (рис. 2).

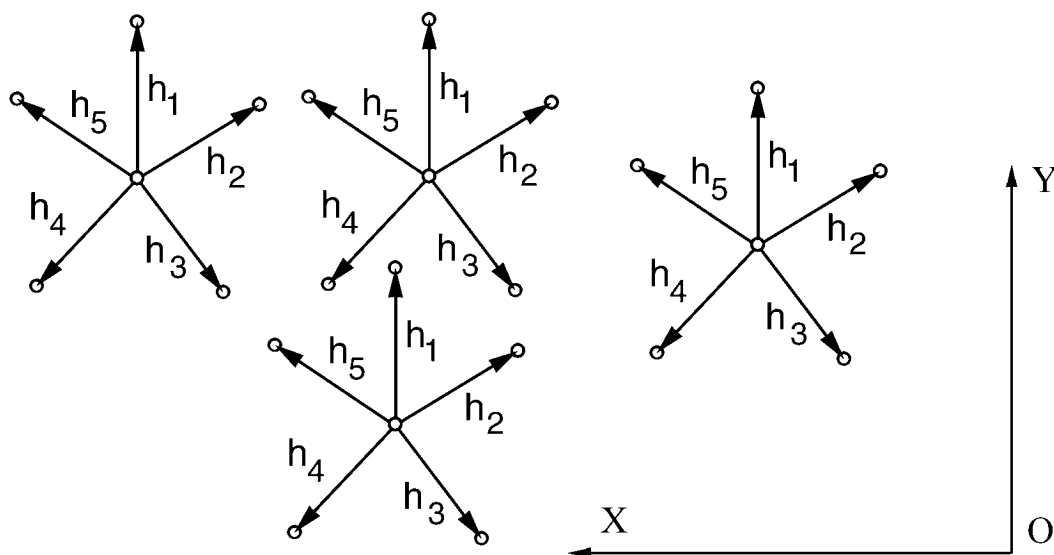


Рис. 2. Антенная система из пяти дипольных решеток, представленная как четыре решетки с опорной антенной

Раздельное по каждому источнику излучения устранение неоднозначности (6) возможно при слабой корреляции между фазовыми измерениями различных источников. Вследствие этого матрицу  $\mathbf{B}$  можно считать блочно-диагональной:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{B}_D \end{pmatrix},$$

что позволяет представить уравнения (4), (6) в виде  $D$  уравнений

$$\hat{\mathbf{v}}_i = (\mathbf{H}^\top \mathbf{B}_i \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{B}_i (\varphi_i + \mathbf{k}_i) \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \arg \min_{\mathbf{k}_i} (\varphi_i + \mathbf{k}_i)^\top \mathbf{\Pi}_i (\varphi_i + \mathbf{k}_i), \quad (8)$$

$$i = \overline{1, D}$$

где  $\hat{\mathbf{v}}_i$  – оценка  $N$ -мерного волнового вектора;  $\mathbf{H}$  – структурная  $(L \times N)$ -матрица измерений системы;  $\mathbf{V}_i$  –  $(L \times L)$ -матрица, обратная к корреляционной матрице ошибок измерений фаз  $i$ -ого волнового фронта;  $\mathbf{P}_i$  –  $(L \times L)$ -проектор на ортогональное подпространство столбцов матрицы  $\mathbf{H}$  в пространстве с  $\mathbf{V}_i$ -нормой,  $\mathbf{P}_i = \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i \mathbf{H} (\mathbf{H}^\top \mathbf{V}_i \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{V}_i$ ;  $\varphi_i$  –  $L$ -вектор дробных, измеренных частей фаз;  $\mathbf{k}_i$  –  $L$ -вектор целых, потерянных при измерении частей фаз. С точностью до обозначений эти уравнения представляют собой уравнения, описывающие максимально правдоподобную оценку волнового вектора и алгоритм устранения неоднозначности фазовых измерений теории многошкальных фазовых измерителей [1].

Экспоненциальный рост вычислительных затрат от числа дипольных решеток в алгоритме устранения неоднозначности (6) существенно понижается при использовании алгоритмов с частичным перебором [2, 4] и становится линейным при использовании беспереборных квазиоптимальных алгоритмов [1] для антенных решеток с рациональными отношениями баз.

Запишем по шагам полученный алгоритм вычисления совокупности волновых векторов для согласованных систем дипольных решеток: 1) вычисляем корреляционные матрицы  $\mathbf{R}_{X X, i}$  и  $\mathbf{R}_{X Y, i}$ ,  $i = \overline{1, L}$  ( $i$  – номер решетки); 2) понижаем их размерности до  $D$ , приводим задачи на нахождение обобщенных собственных чисел к обычным задачам на собственные значения для матриц  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = \overline{1, L}$  и решаем первую из них, решения остальных получаются применением ортогонального преобразования первой задачи; 3) вычисляем аргументы собственных чисел, в результате получаем вектор измерений дробных частей фаз  $\mathcal{F}$ ; 4) полным или частичным перебором решаем задачу устранения неоднозначности по формулам (4), (6).

Схема описанного алгоритма представлена на рисунке 3. Поток данных алгоритма описаны в таблице 1.

Единственным узким звеном алгоритма является определение числа источников. Пока число источников неизвестно, алгоритм нельзя распараллелить. Для определения числа источников можно воспользоваться критерием кратности минимального собственного числа [8]: «Если выполняется приближенное неравенство

$$\lambda_i < \frac{1 + p\sqrt{2/T}}{1 - p\sqrt{2/T}} \lambda_{min},$$

то будем считать собственное число  $\lambda_i$  кратным  $\lambda_{min}$ . Здесь  $T$  – размер выборки для образования корреляционной матрицы,  $\lambda_i$  –  $i$ -ое собственное число матрицы  $\mathbf{R}_{X X}$ ,  $\lambda_{min}$  – минимальное собственное число,  $p$  – подбираемый параметр, рекомендуемое значение  $p = 3$ . Число источников излучения равно разности размерности матрицы и кратности минимального собственного числа.

## Заключение

Алгоритм несколько теряет в точности получаемых оценок, так как приходится усекать матрицы до размерности  $D$ . Этого можно избежать, решая



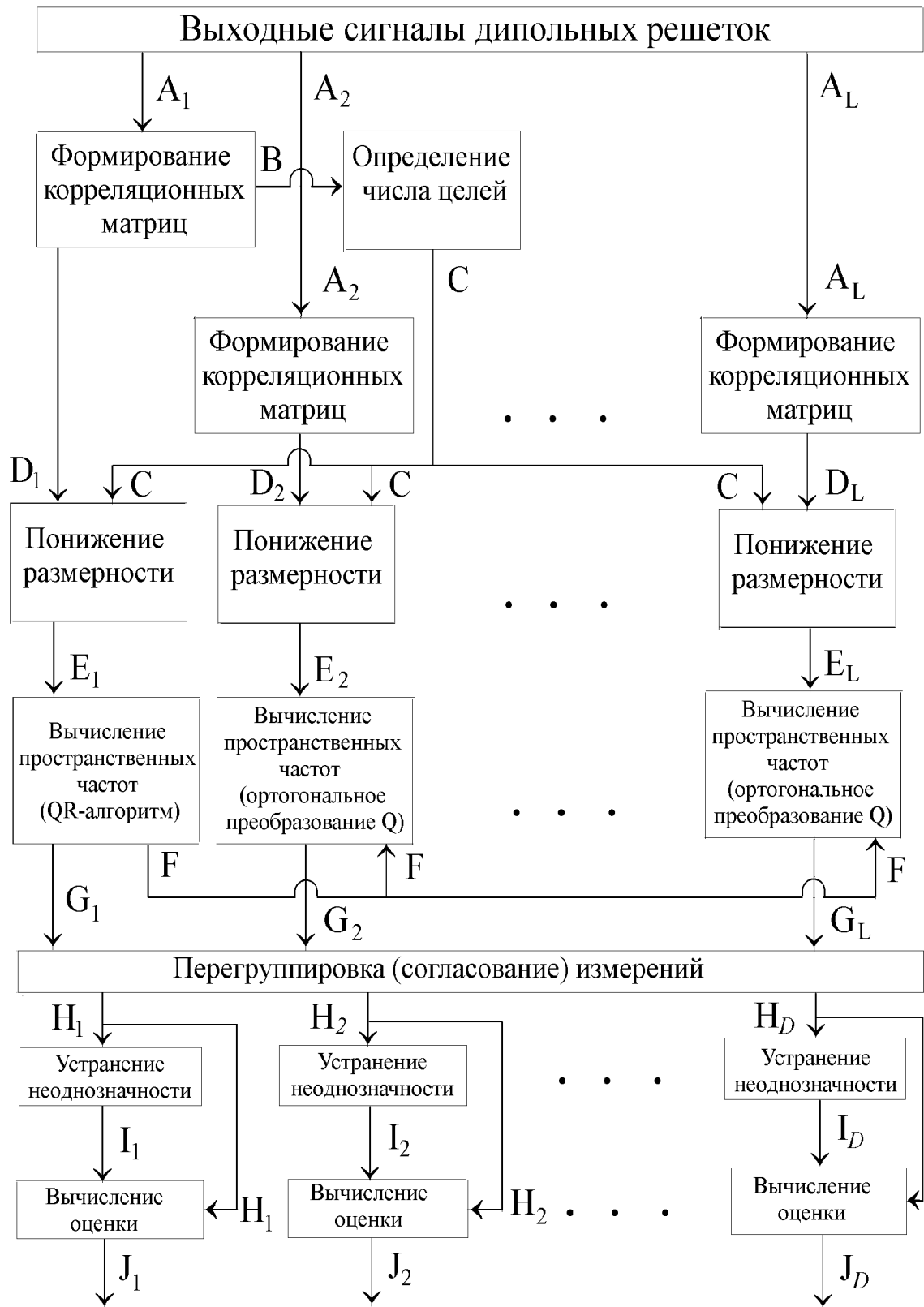


Рис. 3. Схема параллельной обработки измерений в алгоритме оценивания волновых векторов

Таблица 1

Описание потоков, данных в схеме (рис. 3)

Поток	Данные	Описание
$A_i$	$\mathbf{x}_i(t), \mathbf{y}_i(t); i = \overline{1, L}$	Измерения на системе дипольных решеток.
$B$	$\mathbf{R}_{XX,1}$	Корреляционная матрица первой дипольной решетки.
$C$	$D, \lambda_{min}$	Оценка числа источников и минимального собственного числа.
$D_i$	$\mathbf{R}_{XX,i}, \mathbf{R}_{XY,i}; i = \overline{1, L}$	Корреляционные матрицы.
$E_i$	$\mathbf{C}_i, i = \overline{1, L}$	Матрица размерности $D$ , эквивалентная паре $\mathbf{R}_{XX,i}, \mathbf{R}_{XY,i}$ .
$F$	$\mathbf{Q}$	Ортогональное преобразование, приводящее $\mathbf{C}_i$ к верхней форме Шура.
$G_i$	$\varphi_{i,k}, i = \overline{1, L}, k = \overline{1, D}$	Фазовые задержки.
$H_i$	$\varphi_i, i = \overline{1, D}$	Фазовые задержки, перегруппированные так, что каждая компонента $\varphi_i$ соответствует одному и тому же волновому вектору.
$I_i$	$\widehat{\mathbf{k}}_i, i = \overline{1, D}$	Восстановленные целые части полных фазовых задержек.
$J_i$	$\widehat{\mathbf{v}}_i, i = \overline{1, D}$	Оценки волновых векторов.

обобщенные задачи на собственные значения для пар матриц, не сводя их к обычным задачам с одной матрицей (по-прежнему считаем, что порождающее множество всех дипольных решеток одинаково). Но при этом возникают следующие трудности:

1. Не существует простого аналога коммутлируемости для двух пар матриц. Это означает, что не ясно, на каком основании можно использовать одно и то же  $QZ$ -преобразование для приведения всех пар матриц к верхнетреугольному виду. Хотя численные эксперименты указывают на то, что  $QZ$ -преобразование первой пары матриц  $(\mathbf{R}_{1,XX} - \sigma^2 \mathbf{I}, \mathbf{R}_{1,XY})$ , по-видимому, действительно приводит все остальные пары к верхнетреугольному виду.

2. Возникает трудность в выборе из всего множества собственных значений (размера  $M$ )  $D$  собственных чисел, которые отвечают истинным направлениям прихода. Даже если оценено значение  $D$ , выбор этот не определен. В работе [5] предлагается использовать некоторый порог для определения нулевых обобщенных собственных значений, а ненулевые отождествить с направлениями прихода, но такой способ никак необоснован. Кроме того, так как обе матрицы  $\mathbf{R}_{XX} - \sigma^2 \mathbf{I}$  и  $\mathbf{R}_{XY}$  имеют ранг  $D$ , то не доказано, что сингулярные собственные числа, не соответствующие направлениям прихода, будут нулевыми.

Из представленной схемы (рис.3) видно, что время работы описанного в работе алгоритма параллельной обработки многошкальных измерений нескольких источников излучения сравнимо со временем нахождения оценки волнового вектора одного приходящего фронта.

В заключение, автор выражает глубокую признательность В.М.Челембию за плодотворное обсуждение постановки задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белов В.И. *Теория фазовых измерительных систем* / Под. ред. проф. Г.Н.Глазова. Томск: ТГАСУР, 1994. С.144.
2. Белов В.И., Челембий В.М. *Об одном алгоритме определения параметра в многошкальной фазовой измерительной системе* // Радиотехника и электроника. 1994. Т.39. N.10. С.1619–1624.
3. Денисов В.П. *О потенциальной точности фазового пеленгатора с антенной системой в виде линейной решетки* // Радиотехника и электроника. 1978. Т.35. N.8. С.1631–1636.
4. Пензин К.В. *Алгоритмы оперативной обработки многошкальных измерений по критерию максимального правдоподобия* // Радиотехника и электроника. 1990. Т.35. N.1. С.97–106.
5. Полрадж А., Рой Р., Кайлах Т. *Оценивание параметров сигнала методом поворота подпространств* // ТИИЭР. 1986. Т. 74. N.7. С.165–166.
6. Икрамов Х.Д. *Численное решение матричных уравнений*. М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат.лит., 1984.
7. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ*. М.: Мир, 1989.
8. Лавров Д.Н. Хомич Е.В. *Оценивание волновых векторов системой дипольных решеток* // Фундаментальная и прикладная математика: Сб. научн. тр. / Под ред. А.К.Гуца. Омск, 1994. С.112-119.