Математические структуры и моделирование
2000. Вып. 5, с.18–22.

УДК 515.123.4 : 517.983.2

О ПРОДОЛЖЕНИИ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Е.В. Мельников

In this paper we prove that each uniformly continuous mapping from one uniform space to other closable and its closure is uniformly continuous. Based on this fact we prove the theorems about extension of uniformly continuous mappings and continuous linear operators having (sequentially) dense domain and (sequentially) complete range. Also it is proved that each uniform space and each (locally convex) topological vector space has a sequential completion.

Широко известные понятия из общей топологии и функционального анализа в работе используются, как правило, без пояснений (см., например, [1, 2, 3, 4]).

Определение 1. Пусть X и Y – топологические пространства, а $f : X \longrightarrow Y$ – отображение из X в Y (т.е. $f \subset X \times Y$ является однозначным соответствием). Говорят, что отображение f допускает замыкание, если его замыкание $\operatorname{cl} f$ в $X \times Y$ также является отображением.

Теорема 1. *Пусть X и Y – равномерные пространства, причем Y отделимо. Тогда каждое равномерно непрерывное отображение*

$$f : \operatorname{dom} f \longrightarrow Y \quad (\operatorname{dom} f \subset X)$$

допускает замыкание, причем отображение $\operatorname{cl} f : \operatorname{dom}(\operatorname{cl} f) \longrightarrow Y$ равномерно непрерывно.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ – равномерность на X, а $\mathfrak{V}$ – равномерность на Y. Тогда для произвольного окружения $V \in \mathfrak{V}$ найдется такое окружение $V_1 \in \mathfrak{V}$, что $V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$. В силу равномерной непрерывности f существует окружение $U_1 \in \mathfrak{U}$ такое, что

$$\forall\, (x', x'') \in (\operatorname{dom} f)^2 \cap U_1 \quad (f(x'), f(x'')) \in V_1.$$

Пусть окружение $U \in \mathfrak{U}$ таково, что $U \circ U \circ U \subset U_1$. Возьмем (x', y'), $(x'', y'') \in \operatorname{cl} f$ такие, что $(x', x'') \in U$. Тогда найдутся x_0', $x_0'' \in \operatorname{dom} f$ такие, что

$$(x_0', x') \in U, \quad (x'', x_0'') \in U, \quad (y',\, f(x_0')) \in V_1, \quad (f(x_0'',), \,y'') \in V_1.$$

E-mail: melnikov@univer.omsk.su
Омский государственный университет

Поэтому $(x_0', x_0'') \in U{\circ}U{\circ}U \subset U_1$ и, следовательно, $(f(x_0'), f(x_0'')) \in V_1$. Тогда $(y',\, y'') \in V_1{\circ}V_1{\circ}V_1 \subset V$. Таким образом,

$$\forall\, V \in \mathfrak{V}\ \exists\, U \in \mathfrak{U}\ \forall\, (x', x'') \in U \quad \Big((x', y'),\, (x'', y'') \in \mathrm{cl}\, f \ \Rightarrow\ (y', y'') \in V \Big).$$

Отсюда следует, что, во-первых, в силу отделимости Y отображение f допускает замыкание, и, во-вторых, $\mathrm{cl}\, f$ равномерно непрерывно. ∎

Замечание 1. Теорема 1 установлена автором довольно давно (как базовая для доказательства теорем 2 и 5), и более пятнадцати лет она включается им в лекционные курсы для студентов (см., например, [5, с. 27], [6, с. 32]). Эта теорема идейно близка к теореме 26 [1, с. 260] (см. также [2, с. 231]), но ее утверждение является более универсальным и позволяет получать теоремы о продолжении отображений не только в случае полноты, но и в случае секвенциальной полноты их области прибытия. Такие теоремы и приводятся ниже, как для отдельных отображений, так и для множеств отображений.

Определение 2. Подмножество топологического пространства называется секвенциально замкнутым, если оно содержит предел любой своей сходящейся последовательности. Нетрудно заметить, что образ секвенциально замкнутого множества при гомеоморфизме секвенциально замкнут.

Определение 3. Наименьшее секвенциально замкнутое множество, содержащее множество A, называется его секвенциальным замыканием и обозначается $\mathrm{scl}\, A$. Нетрудно заметить, что $\mathrm{scl}\, A$ совпадает с пересечением всех секвенциально замкнутых множеств, содержащих A, откуда следует, что

$$\mathrm{scl}(\mathrm{scl}\, A) = \mathrm{scl}\, A, \quad \mathrm{scl}(A \cup B) = \mathrm{scl}\, A \cup \mathrm{scl}\, B, \quad \mathrm{scl}(A \cap B) \subset \mathrm{scl}\, A \cap \mathrm{scl}\, B.$$

Определение 4. Пусть A и B – подмножества топологического пространства. Говорят, что A (секвенциально) плотно в B, если $(\mathrm{s})\mathrm{cl}\, A \supset B$.

Теорема 2. *Пусть X_0 – (секвенциально) плотное подпространство равномерного пространства X, а Y – (секвенциально) полное отделимое равномерное пространство. Тогда каждое равномерно непрерывное отображение $f_0 :\ X_0 \longrightarrow Y$ имеет, и притом единственное, равномерно непрерывное продолжение на все X.*

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно показать, что $\mathrm{dom}(\mathrm{cl}\, f_0) = X$. Тогда $\mathrm{cl}\, f_0$ и будет искомым продолжением. Пусть $\{x_j\}$ – направленность (последовательность) в $\mathrm{dom}(\mathrm{cl}\, f_0)$, сходящаяся к некоторому $x \in X$. Так как $\mathrm{cl}\, f_0$ равномерно непрерывно, то $\{(\mathrm{cl}\, f_0)(x_j)\}$ является направленностью (последовательностью) Коши в Y и, следовательно, сходится к некоторому $y \in Y$. В силу замкнутости отображения $\mathrm{cl}\, f_0$, получаем, что $(x, y) \in \mathrm{cl}\, f_0$ и, в частности, $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{cl}\, f_0)$. Таким образом, $\mathrm{dom}(\mathrm{cl}\, f_0)$ (секвенциально) замкнуто в X, откуда в силу включений $X_0 \subset \mathrm{dom}(\mathrm{cl}\, f_0) \subset X$ и следует требуемое. ∎

Замечание 2. Несеквенциальная часть этой теоремы является утверждением теоремы 26[1, с. 260] (см. также [2, с. 231]).

Следствие 1. *Если X и Y – (секвенциально) полные отделимые равномерные пространства, X_0 и Y_0 – их (секвенциально) плотные подпространства, наделенные индуцированными равномерностями, а f_0 – равномерный изоморфизм X_0 на Y_0, то $\mathrm{cl}\, f_0$ является равномерным изоморфизмом X на Y.*

Доказательство. В силу теоремы 2 $\mathrm{cl}\, f_0$ является равномерно непрерывным отображением X в Y, а $(\mathrm{cl}\, f_0)^{-1} = \mathrm{cl}\, f_0^{-1}$ – равномерно непрерывным отображением Y в X, откуда и следует требуемое. ■

Замечание 3. Справедливость утверждения следствия в несеквенциальном случае отмечена в [2, с. 231] (см. также [3, с. 654]).

Теорема 3. *Пусть $(X, \mathfrak{U})$ и $(Y, \mathfrak{V})$ – равномерные пространства, причем Y отделимо. Если $X_0 \subset X$ и множество $\mathcal{F}$ отображений X_0 в Y равностепенно равномерно непрерывно, т.е.*

$$\forall\, V \in \mathfrak{V}\ \exists\, U \in \mathfrak{U}\ \forall\, f \in \mathcal{F}\ \forall\, (x', x'') \in X_0^2 \cap U \quad (f(x'), f(x'')) \in V,$$

то множество $\overline{\mathcal{F}} := \{\, \mathrm{cl}\, f \mid f \in \mathcal{F}\,\}$ равностепенно равномерно непрерывно на $X_1 := \bigcap\limits_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{dom}(\mathrm{cl}\, f)$.

Доказательство. Для произвольного окружения $V \in \mathfrak{V}$ найдется такое окружение $V_1 \in \mathfrak{V}$, что $V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$. Согласно условию существует окружение $U \in \mathfrak{U}$ такое, что

$$\forall\, f \in \mathcal{F}\ \forall\, (x', x'') \in X_0^2 \cap U \quad (f(x'), f(x'')) \in V_1.$$

Пусть окружение $U_1 \in \mathfrak{U}$ таково, что $U_1 \circ U_1 \circ U_1 \subset U$, и $(x', x'') \in X_1^2 \cap U_1$. Возьмем произвольно $f \in \mathcal{F}$. Поскольку $\mathrm{dom}\, f = X_0$, а $X_1 \subset \mathrm{dom}(\mathrm{cl}\, f) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{dom}\, f)$, то найдется пара $(x_0', x_0'') \in X_0^2$ (зависящая от f) такая, что

$$(x_0', x') \in U_1, \quad (x'', x_0'') \in U(f(x_0'',), \mathrm{cl}\, f\,(x'')) \in V_1.$$

Тогда $(x_0', x_0'') \in U_1 \circ U_1 \circ U_1 \subset U$ и согласно выбору U получаем, что $(f(x_0'), f(x_0'')) \in V_1$. Тогда $(\mathrm{cl}\, f\,(x'), \mathrm{cl}\, f\,(x'')) \in V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$. Итак, для любого отображения $f \in \mathcal{F}$, если $(x', x'') \in X_1^2 \cap U_1$, то $(\mathrm{cl}\, f\,(x'), \mathrm{cl}\, f\,(x'')) \in V$. Следовательно, $\overline{\mathcal{F}}$ равностепенно равномерно непрерывно на X_1. ■

Из теорем 2 и 3 вытекает

Теорема 4. *Пусть X_0 – (секвенциально) плотное подпространство равномерного пространства X, Y – (секвенциально) полное отделимое равномерное пространство. Если множество $\mathcal{F}$ отображений X_0 в Y равностепенно равномерно непрерывно, то множество $\overline{\mathcal{F}}$ всех их продолжений на X также равностепенно равномерно непрерывно.* ■

Далее предполагаем, что X и Y – векторные пространства над общим полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если X и Y – топологические векторные пространства (ТВП), то через $L(X, Y)$ обозначаем множество всех непрерывных линейных операторов, отображающих X в Y.

Определение 5. Пусть X и Y – ТВП. Множество операторов $\mathfrak{A} \subset L(X,Y)$ называется эквинепрерывным (или равностепенно непрерывным), если для любой окрестности V нуля в Y существует такая окрестность U нуля в X, что $A(U) \subset V$ для всех $A \in \mathfrak{A}$.

Поскольку для линейного оператора его непрерывность (хотя бы в нуле) равносильна его равномерной непрерывности, то следующие две теоремы непосредственно вытекают из теорем 2 и 4.

Теорема 5. *Пусть X_0 – (секвенциально) плотное подпространство ТВП X, а Y – (секвенциально) полное отделимое ТВП. Тогда для любого оператора $A_0 \in L(X_0, Y)$ существует, и притом единственный, оператор $A \in L(X,Y)$ такой, что $A|_{X_0} = A_0$.* ■

Следствие 2. *Если X и Y – (секвенциально) полные отделимые ТВП, X_0 и Y_0 – их (секвенциально) плотные подпространства, наделенные индуцированными топологиями, а f_0 – изоморфизм X_0 на Y_0, то $\operatorname{cl} f_0$ является изоморфизмом X на Y.* ■

Теорема 6. *Пусть X_0 – (секвенциально) плотное подпространство ТВП X, а Y – (секвенциально) полное отделимое ТВП. Тогда для любого эквинепрерывного множества операторов $\mathfrak{A} \subset L(X_0, Y)$ множество $\overline{\mathfrak{A}} \subset L(X,Y)$ всех их продолжений на X также эквинепрерывно.* ■

В заключение приведем две теоремы о существовании секвенциального пополнения (т.е. секвенциально полного пространства, содержащего исходное в качестве секвенциально плотного подпространства).

Теорема 7. *Каждое равномерное пространство изоморфно секвенциально плотному подпространству некоторого секвенциально полного равномерного пространства. Каждое отделимое равномерное пространство имеет единственное, с точностью до равномерного изоморфизма, отделимое секвенциальное пополнение.*

Доказательство. Пусть X – равномерное пространство, $\mathfrak{X}$ – его пополнение (см. [1, с. 262] или [2, с. 232]). Обозначим через $\overline{X}$ секвенциальное замыкание X в $\mathfrak{X}$. Тогда $\overline{X}$ секвенциально полно и является искомым секвенциальным пополнением X. Второе утверждение вытекает из классической теоремы о пополнении равномерного пространства (см. ссылки выше) и следствия теоремы 2. ■

Предложение 1. *Пусть X – топологическое векторное пространство. Тогда:*

1) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad \forall\, A \subset X \quad \operatorname{scl}(\lambda A) = \lambda(\operatorname{scl} A)$;

2) $\forall\, A,\, B \subset X \quad \operatorname{scl} A + \operatorname{scl} B \subset \operatorname{scl}(A + B)$;

3) если $A \subset X$ выпукло, уравновешено, абсолютно выпукло или линейно, то $\operatorname{scl} A$ обладает таким же свойством.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из гомеоморфности гомотетий. Так как сдвиги также гомеоморфны, то для любого $x \in A$ множество $\mathrm{scl}(A+B) - x$ секвенциально замкнуто. Поскольку $B \subset (A+B) - x \subset \subset \mathrm{scl}(A+B) - x$, то $\mathrm{scl}\, B \subset \mathrm{scl}(A+B) - x$, $x + \mathrm{scl}\, B \subset \mathrm{scl}(A+B)$ и, следовательно, $A + \mathrm{scl}\, B \subset \mathrm{scl}(A+B)$. Аналогично, для любого $y \in \mathrm{scl}\, B$ получаем, что $\mathrm{scl}\, A + y \subset \mathrm{scl}(A+B)$, т.е. $\mathrm{scl}\, A + \mathrm{scl}\, B \subset \mathrm{scl}(A+B)$. Третье утверждение предложения вытекает из первых двух. ■

Теорема 8. *Каждое (локально выпуклое) топологическое векторное пространство изоморфно секвенциально плотному подпространству некоторого секвенциально полного (локально выпуклого) топологического векторного пространства. Каждое отделимое (локально выпуклое) топологическое векторное пространство имеет единственное, с точностью до изоморфизма, отделимое секвенциальное пополнение.*

Доказательство. Пусть X – (локально) выпуклое ТВП, $\mathfrak{X}$ – его пополнение [4, с. 29]. Тогда в силу предыдущего предложения секвенциальное замыкание $\overline{X}$ пространства X в $\mathfrak{X}$ является секвенциально полным (локально выпуклым) ТВП, содержащим X в качестве секвенциально плотного подпространства. Второе утверждение следует из теоремы о пополнении ТВП [4, с. 29] и следствия теоремы 5. ■

Литература

1. Келли Дж.Л. *Общая топология.* М.: Наука, 1968.
2. Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры.* М.: Наука, 1968.
3. Энгелькинг Р. *Общая топология.* М.: Мир, 1986.
4. Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1971.
5. Мельников Е.В. *Элементы общей топологии:* Методические указания. Омск: ОмГУ, 1985. 35 с.
6. Мельников Е.В. *Топологические векторные пространства:* Методические указания. Омск: ОмГУ, 1990. 43 с.