Математические
структуры и моделирование.
2000, вып. 5. с.40–43.

УДК 517.583

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ТРЕТЬЕГО РОДА

С.Д. Симонженков

The algorithm for numerical evaluating the Legendre's incomplete integral of the third kind with parameter (character) less than one is described. The Fourier cosinus-expansion of the integrand part involving a character is used. Termwise integration gives a series for which summation a Clenshaw's technique is applicable

1. Введение

При решении некоторых задач физики, техники, геодезии и др. возникает необходимость вычисления эллиптических интегралов, в частности, интегралов третьего рода

$$\Pi = \Pi(\varphi, h, k) = \int\limits_0^{\varphi} (1 - k^2 sin^2 t)^{-1/2} (1 - h sin^2 t)^{-1} dt,$$

параметры которых удовлетворяют условиям

$$0 \le \varphi \le \pi/2,\ 0 < k < 1,\ h < 1,\ h \ne 0. \tag{1}$$

Среди соответствующих многочисленных вычислительных методов укажем следующий, основанный на разложении подынтегрального множителя $f(t) = (1 - k^2 sin^2 t)^{-1/2}$ в ряд

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n cos 2nt. \tag{2}$$

(Здесь и далее штрих в знаке суммы означает, что при $n = 0$ слагаемое берется с коэффициентом 0.5). Коэффициенты a_n в (2) задаются через гипергеометрическую функцию Гаусса в виде [1, с. 34]:

$$a_n = 2\,(-1)^n (1+q)\, q^n\, (1/2)_n\ {}_2F_1\,(n + 1/2; 1/2; n+1; q^2)/n\,! \tag{3}$$

Омский государственный педагогический университет

и удовлетворяют соотношениям

$$(n+1/2)a_{n+1} + 2n(2/k^2-1)a_n + (n-1/2)a_{n-1} = 0,\ n \geq 1,\ \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n = 1. \qquad (4)$$

В формуле (3) $q = (1-\sqrt{1-k^2})/(1+\sqrt{1-k^2})$, а выражение $(...)_n$ обозначает символ Похгаммера. Почленным интегрированием из (2) можно получить разложение в ряд по синусам четных дуг эллиптического интеграла первого рода $F = \int\limits_0^{\varphi}(1-k^2 sin^2 t)^{-1/2}dt$. Аналогичным образом получается соответствующее разложение для интеграла второго рода $E = \int\limits_0^{\varphi}(1-k^2 sin^2 t)^{1/2}dt$.

Применительно к интегралу Π разложение (2) используется следующим образом. Из (2) получаем, что

$$\Pi = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n p_n, \qquad (5)$$

где $p_n = \int\limits_0^{\varphi}(1-h sin^2 t)^{-1} cos 2nt\, dt$. Поэтому вычисление Π сводится к нахождению величины $\Pi_N = \sum_{n=0}^{N}{}' a_n p_n$ при достаточно большом N. Выбор N зависит от задаваемой погрешности ε и, как нетрудно проверить, может быть осуществлен исходя из условия $2p_0 q^{N+1}/(1-q)^2 < \varepsilon$. С другой стороны, интегралы p_n удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$p_{n+1} + \alpha_n p_n + \beta_n p_{n-1} = \gamma_n,\ n \geq 1, \qquad (6)$$

где $\alpha_n = 4/h - 2,\ \beta_n = 1,\ \gamma_n = (2/h)(sin 2n\varphi)/n,\ n \geq 1$. Поэтому вычисление Π_N можно осуществить суммированием Кленшо [1, гл. 11] по следующему алгоритму. Задаем $B_{N+1} = 0,\ B_{N+2} = 0$ и счетом назад находим

$$B_n = -\alpha_n B_{n+1} - \beta_{n+1} B_{n+2} + \varepsilon_n a_n,\ n = N, N-1, ..., 0, \qquad (7)$$

где $\varepsilon_n = 1$ при $n > 0$ и $\varepsilon_0 = 1/2$. После этого окажется, что

$$\Pi_N = (B_0 + \alpha_0 B_1)p_0 + p_1 B_1 + \sigma_N,$$

где $\sigma_N = \sum_{n=0}^{N} B_{n+1}\gamma_n$, если доопределить $\gamma_0 = 0$. Здесь последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет соотношению

$$\gamma_{n+1} + \alpha'_n \gamma_n + \beta'_n \gamma_{n-1} = 0,\ n \geq 1, \qquad (8)$$

с коэффициентами $\alpha'_n = -(2n\, cos 2\varphi)/(n+1),\ \beta'_n = (n-1)/(n+1),\ n \geq 1$. Следовательно, σ_N вычисляется аналогично: при $A_{N+1} = A_{N+2} = 0$ надо найти

$$A_n = -\alpha'_n A_{n+1} - \beta'_{n+1} A_{n+2} + B_{n+1},\ n = N, N-1, ..., 0. \qquad (9)$$

Отсюда получаем, что $\sigma_N = (A_0 + \alpha_0' A_1)\gamma_0 + A_1\gamma_1 = A_1\gamma_1$. Окончательно,

$$\Pi_N = (B_0 + \alpha_0 B_1)p_0 + B_1 p_1 + A_1\gamma_1, \tag{10}$$

где

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{1-h}}\, arctg(\sqrt{1-h}\, tg\,\varphi),\ p_1 = (1 - \frac{2}{h})\, p_0 + \frac{2}{h}\,\varphi,\ \gamma_1 = \frac{2}{h}\, sin\, 2\varphi.$$

Таким образом, вычисление Π сводится к нахождению элементарной функции p_0 – в этом достоинство описанного подхода. Его недостатком является тот факт, что коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_N$ подлежат нахождению. Например, на основе (4), их можно вычислить устойчивой обратной рекурсией с помощью алгоритма Миллера [1, гл. 12].

2. Формулировка результата

В настоящей работе описанный метод используется с той разницей, что в ряд (2) разлагается другой подынтегральный множитель $f(t) = (1 - hsin^2 t)^{-1}$. На этот раз коэффициенты разложения находятся явно, т.е. $a_n = 2(-1)^n q^n/\sqrt{1-h}$, где $q = (1-\sqrt{1-h})/(1+\sqrt{1-h})$, а в формуле (5)

$$p_n = \int\limits_0^{\varphi} (1 - k^2 sin^2 t)^{-1/2} cos 2nt\, dt. \tag{11}$$

Как и выше, ряд (2) сходится не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем q, при этом

$$|\Pi - \Pi_N| \le \frac{2p_0}{\sqrt{1-h}}\,\frac{1}{1-|q|}\,|q|^{N+1}.$$

В равенстве (6)

$$\alpha_n = 2\,(\frac{2}{k^2} - 1)\,\frac{n}{n+1/2},\ \beta_n = \frac{n-1/2}{n+1/2},\ \gamma_n = \frac{2}{k^2}\,\frac{sin 2n\varphi}{n+1/2}\,(1 - k^2 sin^2 t)^{1/2}. \tag{12}$$

Коэффициенты γ_n удовлетворяют (8) при следующих значениях α_n', β_n':

$$\alpha_n' = -2\,\frac{n+1/2}{n+3/2}\, cos 2\varphi,\ \beta_n' = \frac{n-1/2}{n+3/2}.$$

Оказывается, что в (10)

$$p_0 = F,\ p_1 = (1 - 2/k^2)F + (2/k^2)E,\ \gamma_1 = (4/3k^2)\sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}\, sin 2\varphi. \tag{13}$$

Таким образом, вычисление Π сводится к нахождению эллиптических интегралов первого и второго рода. Последние подробно затабулированы, для их вычисления существуют компактные и эффективные алгоритмы [2, гл. 17]. Поэтому предполагается, что в излагаемой ниже схеме интегралы F, E считаются известными.

Перейдем к описанию вычислительной схемы. Для нахождения Π с погрешностью ε при аргументах, удовлетворяющих условиям (1), надлежит сделать следующее (используются обозначения предыдущего пункта).

1. Вычислить q, подобрать целое $N \geq 0$ такое, чтобы

$$\frac{2F}{\sqrt{1-h}} \frac{|q|^{N+1}}{1-|q|} < \varepsilon.$$

2. Сформировать массивы $\{B_n\}$, $\{A_n\}$, $n = 0, 1, ..., N+2$ в соответствии с формулами (7), (9).

3. Вычислить Π_N, используя (10), (13).

Для иллюстрации приведем следующий пример. При $\varepsilon = 10^{-8}$ найти $\Pi(30^o, 0.5, sin\,60^o)$. Согласно [2] (табл. 17.5, 17.6), имеем, что $F = 0.54222911$, $E = 0.50609207$. Имеем далее, что $q = 0.17157288$, $N = 10$, $a_{10} = 2.2... \cdot 10^{-8}$. Результат $\Pi = 0.56836557$ согласуется с табличным значением [2] (табл. 17.9).

Замечание . Применять предложенный алгоритм нельзя, если параметр k близок к нулю либо h близко к 1 или $h < 0$ и велико по модулю. Действительно, при $k \approx 0$ величина $2\,(2/k^2 - 1)$ велика; в этом случае Π_N находится как разность больших величин, что приводит к потере значащих цифр. Например, при вычислении $\Pi(90^o, 0.5, sin\,15^o)$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$ надо брать $N = 6$. При вычислениях на 8–разрядном калькуляторе имеем $2\,(2/k^2 - 1) = 57.71282$, $B_1 = -19181.611$, $B_0 = -164.81929$, $p_1 = -1.38504 \cdot 10^{-2}$, $p_0 = 1.598142$. Получим $\Pi = p_0 B_0 + p_1 B_1 = 2.26836$, что плохо согласуется с табличным значением $\Pi = 2.26685$. При $h \to -\infty$ или $h \to 1$ имеем, что $|q| \to 1$. Следовательно, в алгоритме N велико. Его применение наиболее эффективно, если $|q| \leq 1/2$, что соответствует области $-8 \leq h \leq 8/9$. Как показывают вычисления, при таких h и $k^2 \geq 1/2$ алгоритм «работает» удовлетворительно. Существенно используемое разложение (2) для $f(t) = (1 - hsin^2 t)^{-1}$ можно найти в руководствах по рядам Чебышева (см., например, [3, с. 144]). Вывод равенства (6) для интегралов (11) с коэффициентами (12) имеется в [4].

Литература

1. Люк Ю. *Специальные математические функции и их аппроксимации.* М.: Мир, 1980.

2. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

3. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* М.: Наука, 1983.

4. Литвин А.И., Симонженков С.Д. *О вычислении некоторых эллиптических интегралов.* Деп. в ВИНИТИ Омским с.х. институтом. 12.12.90. N 6202–В 90.