*Математические*
*структуры и моделирование*
2000. Вып. 5, с.5–10.

УДК 519.62

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

**О.В. Величко, А.И. Задорин**

The second order equation of the type reaction-diffusion with a small parameter effecting a higher derivative and a point source on the infinite interval is considered. The question of the transformation of the boundary conditions to the finite interval is investigated. For reduced to finite interval problem difference scheme is constructed. The uniform convergence of the difference scheme is proved.

При математическом моделировании стационарного распространения примеси от точечного источника возникает краевая задача для уравнения с малым параметром при старшей производной и источниковым членом в виде $\delta$-функции Дирака. Краевые условия для такой задачи могут ставиться на бесконечном удалении от источника. При применении к такой задаче конечно-разностной схемы необходимо предварительно решить вопрос редукции краевых условий к ограниченной области.

В данной работе эти вопросы рассматриваются в случае обыкновенного дифференциального уравнения типа реакция-диффузия. В случае уравнения типа диффузия-конвекция данный вопрос был рассмотрен в [1]. Точечному источнику соответствует условие на скачок производной.

Итак, рассмотрим исходную краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon^2 u''(x) - c^2(x)u(x) = f(x),\ x \neq 0, \tag{1а}$$

$$L_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q, \tag{1б}$$

$$u(x) \to 0,\ x \to -\infty, \quad u(x) \to 0,\ x \to +\infty. \tag{1в}$$

Предполагаем, что

$$c(x) \geq \beta > 0,\ \varepsilon > 0,\ Q > 0.$$


E-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru
Омский государственный университет
Омский филиал Института математики СО РАН

$$c(x) \to c_1,\ f(x) \to 0,\ x \to -\infty,\quad c(x) \to c_2,\ f(x) \to 0,\ x \to +\infty, \tag{2}$$

функции $a, c, f-$ достаточно гладкие.

Решение $u(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией всюду, кроме точки нуль, где сама функция непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв первого рода.

При моделировании распространения примеси предполагается, что $u(x)$ - концентрация примеси, $\varepsilon$ - коэффициент диффузии, $c(x)$ - коэффициент поглощения примеси, $Q$ - мощность точечного источника, $f(x)$ - несосредоточенный источник или сток примеси.

Всюду ниже под $C$ будут подразумеваться положительные постоянные, не зависящие от параметра $\varepsilon$ и шагов разностной сетки. Под нормой функции непрерывного аргумента $p(x)$ будем понимать $||p(x)|| = max|p(x)|$, где $x$ пробегает область определения функции.

## 1. Анализ решения исходной задачи

Нетрудно показать, что для оператора задачи (1) справедлив принцип максимума:

Пусть $\Psi(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция всюду, кроме точки $x = 0$, где производная может иметь разрыв первого рода. Тогда из условий

$$L\Psi(x) \le 0,\ L_0\Psi(x) \le 0,\ \lim_{x \to \pm\infty} \Psi(x) \ge 0 \tag{3}$$

следует $\Psi(x) \ge 0,\ \ |x| < \infty$.

Нетрудно показать, что при $f(x) = 0$ $u(x)$ возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$.

**Лемма 1.** *При всех $x$*

$$|u(x)| \le \frac{Q}{2\beta} exp(-\beta\varepsilon^{-1}|x|) + \frac{||f(x)||}{\beta^2}.$$

**Доказательство.** Определим функцию

$$\Psi(x) = \frac{Q}{2\beta} exp(-\beta\varepsilon^{-1}|x|) + \frac{||f(x)||}{\beta^2} \pm u(x).$$

Можно показать, что тогда выполнены условия (3). В силу принципа максимума $\Psi(x) \ge 0$. Это доказывает лемму. ■

**Лемма 2.** *Для некоторой постоянной $C$*

$$|u^{(j)}(x)| \le C\Big[1 + \frac{1}{\varepsilon^j} exp(-\beta\varepsilon^{-1}|x|)\Big]. \tag{4}$$

**Доказательство.** Докажем (4) для $j = 1,\ x < 0$. Перейдем к краевой задаче на полубесконечном интервале:

$$Lu(x) = \varepsilon^2 u''(x) - c^2(x)u(x) = f(x),\quad u(x) \to 0,\ x \to -\infty,\ u(0) = A, \tag{5}$$

где в соответствии с леммой 1 $|A| \leq C$. Покажем, что

$$|u'(0)| \leq C/\varepsilon. \tag{6}$$

Определим

$$u_{\pm}(x) = u(0) \pm C\{1 - exp(\varepsilon^{-1}x)\}, \quad z(x) = u_+(x) - u(x).$$

Несложно показать, что

$$Lz(x) \leq 0, \ \lim_{x \to -\infty} z(x) \geq 0, \ z(0) = 0.$$

В силу принципа максимума $z(x) \geq 0$. Таким образом, $u_+(x) \geq u(x)$, $u_+(0) = u(0)$. Следовательно, $u'(0) \geq -C/\varepsilon$. Аналогично можно показать, что $u_-(x) \leq u(x)$, $u_-(0) = u(0)$. Это доказывает оценку (6). Определим

$$\Psi(x) = C_1 + \frac{C_2}{\varepsilon} exp(\beta\varepsilon^{-1}x) \pm u'(x).$$

Дифференцируя уравнение (5) и применяя принцип максимума к полученному уравнению, убедимся, что для некоторых $C_1$ и $C_2$ $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает (4) при $j = 1, x < 0$. Другие случаи аналогичны. Лемма доказана. ■

## 2. Перенос краевых условий из бесконечности

Рассмотрим вопрос переноса краевых условий из $\pm\infty$. Выделим многообразия решений исходного уравнения (1a), которые удовлетворяют предельным условиям на $(+\infty)$ и $(-\infty)$. Для этого используем подход [2]. Начнем с переноса условия из $(-\infty)$. Многообразие решений уравнения (1a) зададим уравнением первого порядка:

$$\varepsilon u'(x) = \gamma_1(x)u(x) + \beta_1(x), \tag{7}$$

где функции $\gamma_1$ и $\beta_1$ являются решениями задач:

$$\varepsilon\gamma_1'(x) + \gamma_1^2(x) - c^2(x) = 0, \ \lim_{x \to -\infty} \gamma_1(x) = c_1, \tag{8}$$

$$\varepsilon\beta_1'(x) + \beta_1(x)\gamma_1(x) = f(x), \ \lim_{x \to -\infty} \beta_1(x) = 0. \tag{9}$$

Аналогичным образом предельное краевое условие на $+\infty$ выделяет многообразие решений:

$$\varepsilon u'(x) = \gamma_2(x)u(x) + \beta_2(x), \tag{10}$$

где функции $\gamma_2$ и $\beta_2$ являются решениями задач:

$$\varepsilon\gamma_2'(x) + \gamma_2^2(x) - c^2(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \gamma_2(x) = -c_2, \tag{11}$$

$$\varepsilon\beta_2'(x) + \beta_2(x)\gamma_2(x) = f(x), \ \lim_{x \to +\infty} \beta_2(x) = 0. \tag{12}$$

**Лемма 3.** *Справедливы оценки:*

$$\gamma_1(x) \geq \beta,\ x \leq 0; \quad \gamma_2(x) \leq -\beta,\ x \geq 0. \tag{13}$$

**Доказательство.** Докажем первую оценку в (13). Так как $\gamma_1(x)$ не зависит от $f(x)$, положим $f(x) = 0$. Тогда из (7) получим:

$$u(x) = u(0)\, exp\left(\int\limits_0^x \frac{\gamma_1(s)}{\varepsilon}\, ds\right).$$

С другой стороны, согласно лемме 1

$$u(x) \leq u(0)\, exp\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\, x\right),$$

Из этих двух соотношений следует:

$$\int\limits_x^0 [\gamma_1(s) - \beta]\, ds \geq 0$$

для произвольного $x \leq 0$. Следовательно, $\gamma_1(0) \geq \beta$. Учитывая, что $c_1 \geq \beta$, а в точках экстремума $\gamma_1(s) = c(s)$, получим первую оценку в (13). Вторая оценка доказывается аналогично. Лемма доказана. ■

Используя соотношения (7), (10), от задачи (1) можно перейти к задаче на конечном интервале:

$$\varepsilon^2 u''(x) - c^2(x)u(x) = f(x),\ x \neq 0, \quad \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q,$$

$$\varepsilon u'(L_1) = \gamma_1(L_1)u(L_1) + \beta_1(L_1), \quad \varepsilon u'(L_2) = \gamma_2(L_2)u(L_2) + \beta_2(L_2). \tag{14}$$

Можно показать, что вследствие условий $\gamma_1(x) > 0, \gamma_2(x) < 0$, к дифференциальному оператору задачи (14) можно применять принцип максимума. Используя принцип максимума, нетрудно убедиться, что решения задач (1) и (14) совпадают при всех $x \in [L_1, L_2]$.

Коэффициенты $\gamma_i$ и $\beta_i$ из задач (8),(9),(11),(12) могут быть найдены приближенно. Исследуем влияние погрешностей в этих коэффициентах на решение задачи (14).

**Теорема 1.** *Пусть*

$$|\gamma_1(L_1) - \tilde{\gamma}_1(L_1)| \leq \Delta_1, \quad |\beta_1(L_1) - \tilde{\beta}_1(L_1)| \leq \Delta_1,$$

$$|\gamma_2(L_2) - \tilde{\gamma}_2(L_2)| \leq \Delta_2, \quad |\beta_2(L_2) - \tilde{\beta}_2(L_2)| \leq \Delta_2.$$

*Тогда для некоторой постоянной $C$*

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq C\Delta_1 \exp(-\beta\varepsilon^{-1}(x - L_1)) + C\Delta_2 \exp(\beta\varepsilon^{-1}(x - L_2)).$$

**Доказательство.** Определим $z(x) = u(x) - \tilde{u}(x)$. Тогда $z(x)$ является решением задачи:

$$Lz = \varepsilon^2 z''(x) - c^2(x)z(x) = 0, \quad L_0 z = \varepsilon z'(+0) - \varepsilon z'(-0) = 0,$$

$$D_1 z = \tilde{\gamma}_1 z(L_1) - \varepsilon z'(L_1) = \tilde{\beta}_1 - \beta_1 + u(L_1)(\tilde{\gamma}_1 - \gamma_1),$$

$$D_2 z = \varepsilon z'(L_2) - \tilde{\gamma}_2 z(L_2) = \beta_2 - \tilde{\beta}_2 + u(L_2)(\gamma_2 - \tilde{\gamma}_2). \tag{15}$$

Определим

$$\Psi(x) = \frac{\Delta_1}{\beta}(1 + |u(L_1)|)\exp(-\beta\varepsilon^{-1}(x - L_1)) +$$

$$+ \frac{\Delta_2}{\beta}(1 + |u(L_2)|)\exp(\beta\varepsilon^{-1}(x - L_2)) \pm z(x).$$

Тогда

$$L\Psi \le 0,\ L_0\Psi = 0,\ D_1\Psi \ge 0,\ D_2\psi \ge 0.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \ge 0$. Это доказывает теорему. ■

Уравнения (8),(9),(11),(12) содержат малый параметр при старшей производной. В связи с этим решения этих уравнений можно найти на основе асимптотических разложений по параметру $\varepsilon$. Остановимся на первом приближении для этих разложений:

$$\tilde{\gamma}_1(x) = c(x), \quad \tilde{\beta}_1(x) = f(x)/c(x), \quad \tilde{\gamma}_2(x) = -c(x), \quad \tilde{\beta}_2(x) = -f(x)/c(x). \tag{16}$$

Докажем, что формулы (16) определяют коэффициенты с точностью $O(\varepsilon)$.

Остановимся на коэффициенте $\gamma_1(x)$. Докажем, что

$$|\tilde{\gamma}_1(x) - \gamma_1(x)| \le C\varepsilon. \tag{17}$$

Пусть $z(x) = \gamma_1(x) - \tilde{\gamma}_1(x)$. Тогда $z(x)$ является решением задачи:

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z'(x) + (\gamma_1(x) + \tilde{\gamma}_1(x))z(x) = -\varepsilon\tilde{\gamma}_1{}'(x), \quad \lim_{x\to-\infty} z(x) = 0.$$

Определим

$$\Psi(x) = \varepsilon||\tilde{\gamma}_1{}'(x)||/(2\beta) \pm z(x).$$

Тогда

$$\lim_{x\to-\infty} \Psi(x) \ge 0, \quad R_\varepsilon\Psi(x) \ge 0.$$

Тогда, как нетрудно убедиться рассуждениями от противного, $\Psi(x) \ge 0$. Оценка (17) доказана.

## 3. Построение разностной схемы

Итак, задачу (1) свели к задаче (14), сформулированной на конечном интервале. Построим разностную схему для задачи (14). Пусть $L_2 = -L_1 = L$, $h$ - шаг равномерной сетки $\Omega = \{x_n: \ -N \le n \le N, \ x_{-N} = -L, x_0 = 0, x_N = L\}$.

Выделим в решении задачи (1) составляющую, задающую экспоненциальный рост решения в окрестности нуля:

$$u(x) = p(x) + V(x),$$

$$V(x) = \theta \exp(-c(0)\varepsilon^{-1}|x|), \ |p^j(x)| \le \varepsilon^{1-j} \exp(-\beta\varepsilon^{-1}|x|), \ j \le 4. \qquad (18)$$

Строя разностную схему на основе того, чтобы она была точной на погранслойной функции $V(x)$ [3], получим:

$$L_n^h u^h = \tilde{\varepsilon}^2 \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} - c_n^2 u_n^h = f_n, \ n \ne 0, |n| < N, \ c_n = c(x_n), f_n = f(x_n),$$

$$L_0^h u^h = u_1^h - 2u_0^h + u_{-1}^h = -\frac{Q}{c_0}\left[1 - exp\left(-\frac{c_0 h}{\varepsilon}\right)\right], \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \frac{c_0 h/(2\varepsilon)}{sinh(c_0 h/(2\varepsilon))},$$

$$L_{-N}^h u^h = \varepsilon\, \frac{u_{-N+1}^h - u_{-N}^h}{h} - \gamma_1 u_{-N}^h = \beta_1, \ L_N^h u^h = \varepsilon\, \frac{u_N^h - u_{N-1}^h}{h} - \gamma_2 u_N^h = \beta_2. \quad (19)$$

**Теорема 2.** *Пусть $u(x)$ - решение задачи (14), $u^h$ - решение схемы (19). Тогда для некоторой постоянной $C$ при всех $n = -N, \dots, N$ выполнится*

$$|u_n^h - u(x_n)| \le Ch.$$

**Доказательство.** Пусть $z^h = u^h - [u]$. Учитывая представление решения (18), можно показать:

$$|L_n^h z^h| \le Ch, \quad n = -N, -N+1, \dots, N].$$

Используя принцип максимума для оператора схемы (19), получим утверждение теоремы. ∎

## Литература


1. Задорин А.И. *Численное решение уравнения с малым параметром и точечным источником на бесконечном интервале* // Сибирский журнал вычислительной математики. 1998. Т.1. N 3. С.249–260.

2. Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б. *Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981.

3. Ильин А.М. *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной* // Матем. заметки. 1969. Т.6. N 7. С.237–248.