

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ В ПОЛОСЕ

А.И. Задорин

Elliptic equation with a power boundary layer in a strip is considered. The difference scheme with the property of the uniform in a small parameter convergence is constructed. Then the scheme is reduced to the finite number of nodes.

При математическом моделировании стационарного распространения примеси в направлении ветра, согласно [1], возникает краевая задача для двумерного эллиптического уравнения в бесконечной полосе. Решение такой задачи содержит степенной пограничный слой. В данной работе для такой задачи строится равномерно сходящаяся схема. По одному из направлений схема содержит бесконечное число узлов. Предлагается способ редукции этой схемы к схеме с конечным числом узлов.

Итак, рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + w(y) \frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

$$u(x, 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = 0, \quad u(x, 0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (2)$$

для бесконечной полосы: $D = \{-\infty < x < \infty, 0 < y < 1\}$. Предполагаем, что

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad a(x, y) \geq \alpha > 0, \quad w(y) > \beta > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad c(x, y) \geq \sigma > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x, y) = a_{\pm\infty}(y), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(x, y) = c_{\pm\infty}(y), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, y) = 0. \quad (3)$$

Для оценки производных по x потребуется дополнительное ограничение:

$$c(x, y) + 4a'_x \geq \sigma > 0. \quad (4)$$

Всюду под C и C_i будем понимать положительные постоянные, не зависящие от параметров ε_1 и ε_2 . Под нормой функции непрерывного аргумента или сеточной функции будем понимать максимальное по модулю значение, предполагаем, что норма матрицы согласована с векторной нормой.

Нетрудно убедиться, что справедлива оценка:

$$\|u(x, y)\| \leq \beta^{-1} \|f(x, y)\|.$$

Лемма 1. Для некоторой постоянной C_0 справедливы оценки:

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \leq C_0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq \frac{C_0}{\varepsilon_2 + y}. \quad (5)$$

В случае $\beta > 1$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq C_0 + C_0 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y} \right)^{\beta-1} \frac{1}{\varepsilon_2 + y}. \quad (6)$$

■

Доказать данную лемму можно с помощью принципа максимума, по аналогии с тем, как в случае обыкновенного уравнения это делалось в [2], [3].

1. Построение разностной схемы

Остановимся на вопросе построения разностной схемы для задачи (1)-(2). Согласно лемме 1 производные по x равномерно ограничены, а по переменной y имеет место степенной пограничный слой около границы $y = 0$. Для построения разностной схемы используем метод прямых по x . Будем предполагать сетку равномерной по обоим координатным направлениям, с шагами h_1 и h_2 . При применении метода прямых от функции двух аргументов $u(x, y)$ перейдем к бесконечной системе дифференциальных уравнений с решением $u_i(y) = u(x_i, y)$, $-\infty < i < +\infty$, $y \in [0, 1]$.

Итак, перейдем от (1)-(2) к системе уравнений:

$$(\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}(y) + w(y) \frac{\partial u_i}{\partial y}(y) = F(x_i, y, u),$$

$$u_i(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial u_i}{\partial y}(0) = 0, \quad u_i(1) = 0, \quad |i| < \infty, \quad u_i(y) \rightarrow 0, \quad |i| \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где

$$F(x, y, u) = -\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, y)u + f(x, y), \quad u(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Пусть $\Delta_j = (y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, \dots, N_2$, $y_0 = 0$, $y_{N_2} = 1$. Перейдем от (7) к системе уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$(\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial y^2}(y) + \tilde{w}(y) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y}(y) = \tilde{F}(x_i, y, \tilde{u}),$$

$$\tilde{u}_i(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y}(0) = 0, \quad \tilde{u}_i(1) = 0, \quad \tilde{u}_i(y) \rightarrow 0, \quad |i| \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где при $y \in \Delta_j$ $\tilde{w}(y) = w(y_j)$, $\tilde{u}_{i,j} = \tilde{u}(x_i, y_j)$.

$$\tilde{F}(x_i, y, \tilde{u}) = -\varepsilon_1 \frac{\tilde{u}_{i+1,j} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i-1,j}}{h_1^2} + a(x_i, y_j) \frac{\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i-1,j}}{h_1} + c(x_i, y_j) \tilde{u}_{i,j} + f(x_i, y_j).$$

Для задачи (8), с кусочно-постоянными коэффициентами, построим точную разностную схему. Для этого для каждого i и каждого сеточного интервала Δ_j для уравнений (8) выпишем точное решение. Условие непрерывности производной по y на границе двух соседних интервалов Δ_j и Δ_{j+1} приведет к конечно-разностным соотношениям. Разностную аппроксимацию краевого условия получаем в результате подстановки решения задачи (8) на первом сеточном интервале в левое краевое условие. Построенная разностная схема имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^h - u_{i,j-1}^h - F_{i,j} w_j^{-1} h_2}{(1 + y_j \varepsilon^{-1})^{w_j} [(1 + y_j \varepsilon^{-1})^{1-w_j} - (1 + y_{j-1} \varepsilon^{-1})^{1-w_j}]} - \\ & - \frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h - F_{i,j+1} w_{j+1}^{-1} h_2}{(1 + y_j \varepsilon^{-1})^{w_{j+1}} [(1 + y_{j+1} \varepsilon^{-1})^{1-w_j} - (1 + y_j \varepsilon^{-1})^{1-w_j}]} = \left(\frac{F_{i,j+1}}{w_{j+1}} - \frac{F_{i,j}}{w_j} \right) \varepsilon, \\ & u_{i,0}^h - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{F_{i,1}}{w_1} - \beta_2 (1 - w_1) \frac{u_{i,1}^h - u_{i,0}^h - F_{i,1} w_1^{-1} h_2}{(1 + h_2 \varepsilon_2^{-1})^{1-w_1} - 1} = 0, \quad u_{i,N_2}^h = 0, \\ & j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad -\infty < i < +\infty, \quad u_{i,j}^h \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$F_{i,j} = -\varepsilon_1 \frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{h_1^2} + a(x_i, y_j) \frac{u_{i,j}^h - u_{i-1,j}^h}{h_1} + c(x_i, y_j) u_{i,j}^h + f(x_i, y_j).$$

Теорема 1. Для схемы (9) справедлива оценка точности:

$$|u_{i,j}^h - u(x_i, y_j)| \leq Ch_1 + C |\ln(\varepsilon_2 + y_j)| h_2, \quad -\infty < i < +\infty, \quad 0 \leq j \leq N_2. \quad (10)$$

В случае $\beta > 1$

$$|u_{i,j}^h - u(x_i, y_j)| \leq C(h_1 + h_2), \quad -\infty < i < +\infty, \quad 0 \leq j \leq N_2. \quad (11)$$

Доказательство. По построению схема (9) является точной на решении задачи (8), поэтому достаточно оценить близость решений задач (7) и (8).

Пусть $z_i = u_i - \tilde{u}_i$, $-\infty < i < +\infty$. Нетрудно убедиться, что вектор - функция $z(y)$ является решением краевой задачи:

$$Lz = (\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \tilde{w}(y) \frac{\partial z}{\partial y} - Mz = F(x, y, u) - \tilde{F}(x, y, u) + (\tilde{w}(y) - w(y)) \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$z_i(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial z_i}{\partial y}(0) = 0, \quad z_i(1) = 0, \quad |i| < \infty, \quad z_i(y) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \pm\infty,$$

где M – трехдиагональная матрица бесконечного порядка, ненулевые элементы произвольной i -й строки которой имеют вид:

$$M_{i,i-1} = -\left(\frac{\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{a(x_i, y)}{h_1}\right), \quad M_{i,i} = \frac{2\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{a(x_i, y)}{h_1} + c(x_i, y), \quad M_{i,i+1} = -\frac{\varepsilon_1}{h_1^2}.$$

Учитывая оценки производных согласно лемме 1, получим:

$$\max_i |L_i z(y)| \leq C_0 h_1 + \frac{C_0 h_2}{\varepsilon_2 + y}. \quad (12)$$

Можно показать, что для оператора L справедлив принцип максимума и если для какой-либо дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\Psi(y)$ выполнены условия:

$$\Psi(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \Psi'(0) \geq 0, \quad \Psi(1) \geq 0, \quad L\Psi(y) \leq 0, \quad \lim_{i \rightarrow \pm\infty} \Psi_i(y) > 0, \quad (13)$$

то $\Psi(y) \geq 0$ при всех $y \in [0, 1]$.

Определим вектор-функцию $\Psi(y)$ с компонентами

$$\Psi_i(y) = Ch_1(1 - y) - C \ln(\varepsilon_2 + y)h_2 \pm z_i(y).$$

Учитывая оценку (12), заключаем, что для некоторой постоянной C для заданной функции $\Psi(y)$ выполняются условия (13). В силу принципа максимума $\Psi(y) \geq 0$. Следовательно, при всех i

$$|z_i(y)| \leq Ch_1 - C \ln(\varepsilon_2 + y)h_2.$$

Это доказывает оценку (10).

Остановимся на случае $\beta > 1$. Учтем оценку производной (6) и получим:

$$\max_i |L_i z(y)| \leq C_0 h_1 + C_0 h_2 + C_0 h_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y}\right)^{\beta-1} \frac{1}{\varepsilon_2 + y}. \quad (14)$$

Определим вектор-функцию $\Psi(y)$ с компонентами:

$$\Psi_i(y) = Ch_1(1 - y) + Ch_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y}\right)^{\beta-1} + Ch_2 \pm z_i(y).$$

Учитывая оценку (14), получим, что для некоторой постоянной C для $\Psi_i(y)$ будут выполнены условия (13). Тогда в силу принципа максимума $\Psi_i(y) \geq 0$, $y \in [0, 1]$. Это доказывает оценку (11). Теорема доказана. ■

2. Редукция схемы к конечному числу узлов

Итак, доказали, что схема (9) обладает свойством сходимости, равномерной по малым параметрам. Эта схема может быть записана в виде трехточечной векторной разностной схемы с бесконечным числом узлов по координате x . Для того, чтобы построенную схему можно было использовать для компьютерных вычислений, необходимо решить вопрос редукции этой схемы к конечному числу узлов. Асимптотическое поведение решения скалярных разностных уравнений первого и второго порядка исследуется в [4].

Рассмотрим в векторном виде трехточечную разностную схему:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{U} = \mathbf{C}_i \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad -\infty < i < +\infty, \quad (15)$$

$$\mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{0}, \quad i \rightarrow \pm\infty, \quad (16)$$

где относительно входящих в (15) матриц предполагаем выполненными ограничения:

$\mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i$ - ненулевые неотрицательные диагональные матрицы порядка N ; матрицы \mathbf{G}_i являются M -матрицами,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i &\rightarrow \mathbf{C}_{\pm\infty}, \quad \mathbf{G}_i \rightarrow \mathbf{G}_{\pm\infty}, \quad \mathbf{D}_i \rightarrow \mathbf{D}_{\pm\infty}, \quad \mathbf{F}_i \rightarrow \mathbf{0}, \quad i \rightarrow \pm\infty, \\ \|\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{C}_i\| + \|\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{D}_i\| &\leq \sigma < 1, \\ \mathbf{C}_i \geq \mathbf{D}_i \geq 0, \quad \mathbf{Q}_i &= \mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i - \mathbf{D}_i, \\ Q_i^{j,j} &\geq \sum_{k \neq j} |Q_i^{j,k}| + \Delta, \quad \Delta > 0, \quad i > 0, \quad 1 \leq j \leq N. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим отдельно перенос краевого условия из $(+\infty)$ и из $(-\infty)$. Перенос краевого условия из $(+\infty)$ осуществляем на основе соотношения левой матричной прогонки, а перенос краевого условия из $(-\infty)$ - на основе соотношения правой матричной прогонки. Для переноса условия из $(-\infty)$ определим соотношение:

$$\mathbf{U}_{i-1} = \mathbf{A}_i^{(1)} \mathbf{U}_i + \mathbf{B}_i^{(1)}, \quad (18)$$

где коэффициенты $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ являются решениями задач с предельным условием на $(-\infty)$:

$$\mathbf{A}_{i+1} = (\mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{D}_i \quad \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}_{-\infty}, \quad i \rightarrow -\infty, \quad (19)$$

$$\mathbf{C}_i (\mathbf{B}_{i+1} - \mathbf{B}_i) + [\mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i] \mathbf{B}_{i+1} = -\mathbf{F}_i, \quad \mathbf{B}_i \rightarrow \mathbf{0}, \quad i \rightarrow -\infty, \quad (20)$$

матрица $\mathbf{A}_{-\infty}$ является решением уравнения

$$\mathbf{C}_{-\infty} \mathbf{A}^2 - \mathbf{G}_{-\infty} \mathbf{A} + \mathbf{D}_{-\infty} = \mathbf{0}$$

с нормой, меньшей единицы. Можно показать, что при выполнении условий (17) такое решение существует. Тогда при всех i $\|\mathbf{A}_i^{(1)}\| \leq \sigma < 1$. Из этого следует, что соотношение (18) выделяет многообразие решений разностного уравнения (15), удовлетворяющих предельному условию на $(-\infty)$.

Решения задач (19) и (20) могут быть найдены на основе разложения коэффициентов разностного уравнения (15) в ряд по отрицательным степеням i . Можно доказать, что при этом точность вычисления $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ увеличивается с увеличением $|i|$. Если разностное уравнение (15) вырождается при стремлении некоторого параметра к нулю (что случается при разностной аппроксимации уравнений с малым параметром при старших производных), для нахождения $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ можно использовать асимптотические разложения по малому параметру. При этом точность вычисления этих коэффициентов не зависит от i .

Перейдем точным образом от (15)-(16) к разностной схеме с конечным числом узлов:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1} &= \mathbf{F}_i, \quad M < i < N, \\ \mathbf{U}_M &= \mathbf{A}_{M+1}^{(1)} \mathbf{U}_{M+1} + \mathbf{B}_{M+1}^{(1)}, \quad \mathbf{U}_N = \mathbf{A}_N^{(2)} \mathbf{U}_{N-1} + \mathbf{B}_N^{(2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Коэффициенты в краевых условиях схемы (21) из соответствующих задач могут быть вычислены приближенно. На основании принципа максимума можно показать, что решение схемы (21) устойчиво к возмущению этих коэффициентов. Точнее это можно сформулировать следующим образом.

Лемма 2. Пусть $\tilde{\mathbf{U}}$ – решение схемы (21) в случае возмущенных

$$\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{M+1}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_N^{(2)}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)} - \mathbf{A}_{M+1}^{(1)}\|, \quad \|\tilde{\mathbf{B}}_{M+1}^{(1)} - \mathbf{B}_{M+1}^{(1)}\|, \quad \|\tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)} - \mathbf{A}_N^{(2)}\|, \quad \|\tilde{\mathbf{B}}_N^{(2)} - \mathbf{B}_N^{(2)}\| &\leq \Delta, \\ \|\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)}\|, \quad \|\tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)}\| &\leq \sigma < 1. \end{aligned}$$

Тогда при всех $i = M, M+1, \dots, N$

$$\max_i \|\tilde{\mathbf{U}}_i - \mathbf{U}_i\| \leq \frac{\Delta}{1-\sigma} (1 + \max_i \|\mathbf{U}_i\|).$$

■

Пусть $\|D_i\| \leq \varepsilon$. Тогда от (15)-(16) можно перейти к схеме с конечным числом узлов:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i \mathbf{V}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{V}_{i+1} &= \mathbf{F}_i, \quad M < i < N, \\ \mathbf{C}_{M+1} \mathbf{V}_M - \mathbf{G}_{M+1} \mathbf{V}_{M+1} &= \mathbf{F}_{M+1}, \quad \mathbf{C}_N \mathbf{V}_{N-1} - \mathbf{G}_N \mathbf{V}_N = \mathbf{F}_N. \end{aligned} \quad (22)$$

С помощью принципа максимума можно доказать, что справедлива оценка:

$$\max_i \|\mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\sigma} \{ \|\mathbf{G}_{M+1}^{-1}\| \times \|\mathbf{U}_{M+2}\| + \|\mathbf{G}_N^{-1}\| \times \|\mathbf{U}_{N+1}\| \}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Берлянд М.Е. *Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы*. Л.: Гидрометеониздат, 1975.
2. Багаев Б.М., Солусенко Н.П. *Численное решение для задач со степенным пограничным слоем // Моделирование в механике*. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. 1989. Т.3. N 1. С.54–59.
3. Лисейкин В.Д. *О численном решении уравнений со степенным погранслоем // Журнал вычисл. матем. и матем. физики*. 1986. Т.26. N 12. С.1813–1820.
4. Balla K. *On asymptotic behavior of solutions to some difference equations // Advances in difference equations*. Proceedings of the second int. conf. on difference equations. Veszprem, Hungary. 1995. P.67–80. Gordon and Breach science publ. 1997.