Математические структуры и моделирование
2001, вып. 7, с. 28–45

УДК 512.54

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОТ ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ДЛЯ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е.С. Есып

According to the algebraic geometry over groups, presented by Myasnikov and Remeslennikov, we give a classification of alebraic sets in G^1, where G is a free product of abelian groups without involutions. It is used the theory of ultraproducts.

1. Введение. Формулировка основной теоремы

В статье [1] дано описание координатных групп неприводимых алгебраических многообразий, которые задаются системами уравнений от одной переменной, над свободной конечнопорожденной группой. В статье [5] такое описание дано для группы, являющейся свободным произведением циклических. Цель этой статьи – обобщить это описание для группы, являющейся свободным произведением абелевых групп.

Все определения в данной работе взяты из статьи [1], знакомство с которой необходимо для понимания изложенного здесь материала.

Пусть G – группа, являющаяся свободным произведением абелевых групп без инволюций, то есть $G = \mathop{*}\limits_{i=1}^{r} A_i$, где группа A_i – абелева и не содержит элементов второго порядка, $i \in \{1, ..., r\}$, $r \geqslant 2$. Для любой абелевой группы A и любого натурального числа n определим параметр $\alpha_n(A)$ следующим образом: пусть $A[n]$ – n-ый слой группы A, то есть $A[n] = \{a \in A | a^n = 1\}$. Так как $A[n]$ – ограниченная абелева группа, то она разлагается в прямую сумму циклических групп. Тогда $\alpha_n(A)$ – максимальное число циклических групп порядка n по всем таким разложениям группы $A[n]$, при условии, что этот максимум является натуральным числом, в противном случае $\alpha_n(A)$ равно символу ∞. Будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Любая координатная группа G_Y неприводимого алгебраического множества $Y \subseteq G$, G-изоморфна группе одной из следующих серий:*

1.1. *Группа G.*

© **2001 Е.С. Есып**

E-mail: esyp@iitam.omsk.net.ru
Омский государственный университет

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 99-01-01907

2.1. $G * \langle t \rangle$.

2.2. $\langle G, t | [u, t] = 1 \rangle$, *где* $u \in G \backslash \{1\}$ *– корневой элемент бесконечного порядка.*

2.3. $\langle G, t | [A_i, t] = 1 \rangle$, *где* A_i *– один из множителей группы* G, *при условии, что* A_i *– группа неограниченного периода.*

3.1. $G * \langle t | t^n = 1 \rangle$, *где* $n \in O(G)$, $O(G)$ *– множество порядков элементов группы* G.

3.2. $\langle G, t | [A_i, t] = t^n = 1 \rangle$, *где* $n \in O(G)$, A_i *– один из множителей группы* G, *при условии, что* $\alpha_n(A_i) = \infty$. ■

Замечание 1. Элементы конечного порядка группы G сопряжены элементам групп A_i, $i \in \{1, ..., r\}$, поэтому множество $O(G)$ состоит из конечных порядков элементов групп A_i, $i \in \{1, ..., r\}$. Смотри [2].

Теорема 1.2. *Пусть* D *– неглавный ультрафильтр над счетным множеством* I *и пусть* ${}^*G$*- ультрапроизведение* G^I/D. *Тогда любая* G*-подгруппа* $P < {}^*G$ *с одним* G*-порождающим* G*-изоморфна группе одной из серий, перечисленных в теореме* 1.1. ■

Теорема 1.3. *Пусть* $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ *– разложение алгебраического множества* $V \subseteq G^1$ *на неприводимые компоненты. Тогда* V_i *имеет одну из следующих форм:*

1.1. *Одна точка* $v \in G^1$.

2.1. *Все пространство* G^1.

2.2. *Множество* $gC(u)h$, *где* $g, h \in G$, $C(u) =< u >$ *– централизатор элемента* $u \in G \backslash \{1\}$ *бесконечного порядка, корневого.*

2.3. *Множество* gA_ih, *где* $g, h \in G$, *где* A_i *– один из множителей группы* G, *при условии, что* A_i *– группа неограниченного периода.*

3.1 *Множество* $gT_{0,n}h$, *где* $g, h \in G$, $T_{0,n}$ *– множество всех элементов группы* G, *порядок которых является делителем* n.

3.2 *Множество* $gA_i[n]h$, *где* $g, h \in G$, *при условии, что* $\alpha_n(A_i) = \infty$. ■

Доказательство будет проведено при помощи серии лемм. Часть лемм аналогичны леммам, доказанным в статье [1]. Кроме того, добавлены леммы, отвечающие за случаи, когда элемент t имеет конечный порядок (лемма 5.6), и конечную длину (теорема 5.1).

2. Ультрастепени и координатные группы неприводимых алгебраических множеств

Пусть I – некоторое множество и $P(I)$ – булева алгебра всех подмножеств множества I.

Определение 2.1. *Фильтр* над I – это подмножество Δ множества $P(I)$ такое, что:

(i) $A \in \Delta$ и $A \subseteq B \subseteq I$ влечет $B \in \Delta$;

(ii) $A, B \in \Delta$ влечет $A \cap B \in \Delta$.

Ультрафильтр – это фильтр D, удовлетворяющий третьему условию:

(iii) для всех $A \in P(I)$ в точности одно из множеств A или $I \backslash A$ принадлежит D.

Пусть $\{G_i | i \in I\}$ – семейство множеств, индексированное множеством I, где $G_i \simeq G$, и пусть D – ультрафильтр над I. Ультрастепень $\prod\limits_{i \in I} G_i \Big/ D$ определяем как фактормножество $\prod\limits_{i \in I} G_i \Big/ \sim$, где эквивалентность $\sim$ определяется следующим образом: $(x_i)_{i \in I} \sim (y_i)_{i \in I}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\{i \in I | x_i = y_i\} \in D$.

Далее на множестве G определена структура группы. Обозначим $\prod\limits_{i \in I} G_i \Big/ D$ через ${}^*G$. ${}^*G$ – это группа с индуцированными операциями из G. Отображение $\eta : \prod\limits_{i \in I} G_i \to {}^*G$ является гомоморфизмом групп.

Определение 2.2. Пусть $S \subseteq G[X]$, где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Множество $V_G(S) = \{p \in G^n | \forall f \in S, f(p) = 1\}$ называется *алгебраическим множеством* над G, определяемым S.

Пусть τ – множество подмножеств группы G, состоящее из множеств Y и удовлетворяющее условию: для любого $x \notin Y$ существует конечный набор алгебраических множеств $Y'_1, ..., Y'_k$ такой, что $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k} Y'_i$, $Y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} Y'_i$.

Множество τ удовлетворяет условиям топологии замкнутых множеств:

(1) $\emptyset, G \in \tau$;

(2) для любого конечного набора $Y_1, ..., Y_k \in \tau$ $\bigcup\limits_{i=1}^{k} Y_i \in \tau$;

(3) для любого множества индексов I и любого множества $\{Y_i \in \tau | i \in I\}$ $\bigcap\limits_{i \in I} Y_i \in \tau$.

Из определения следует, что все алгебраические множества замкнуты.

Определение 2.3. Алгебраическое множество Y называется *топологически приводимым*, если оно раскладывается в объединение своих собственных подмножеств, являющихся замкнутыми множествами. Алгебраическое множество Y называется *алгебраически приводимым*, если оно раскладывается в объединение своих собственных подмножеств, являющихся алгебраическими множествами.

Предложение 2.1. *Алгебраическое множество Y топологически приводимо тогда и только тогда, когда оно алгебраически приводимо.*

Доказательство. Если Y алгебраически приводимо, то $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Y_i$, где Y_i – алгебраические собственные подмножества множества Y. Так как все алгебраические множества замкнуты, то из этого разложения следует, что Y топологически приводимо. Обратно, если Y топологически приводимо, тогда $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Y_i$, где Y_i – замкнутое собственное подмножество множества Y. Поскольку Y_i – собственное, то существует $x_i \notin Y \backslash Y_i$. По определению замкнутого множества существуют $Y_{i,1}, ..., Y_{i,l_i}$ – алгебраические, такие, что $x_i \notin \bigcup\limits_{j=1}^{l_i} Y_{i,j}$, $Y_i \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{l_i} Y_{i,j}$. Пусть $Y'_{i,j} = Y \cap Y_{i,j}$, тогда $x_i \notin \bigcup\limits_{j=1}^{l_i} Y'_{i,j}$, следовательно, $Y'_{i,j}$ – собственные алгебраические подмножества множества Y, и $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{l_i} Y'_{i,j}$. Получили, что Y алгебраически приводимо. ■

Поскольку алгебраическая и топологическая приводимость совпадают, то будем называть топологически приводимые множества и алгебраически приводимые множества приводимыми.

Определение 2.4. Пусть $S \subseteq G[X]$ – система уравнений над G, и положим $Y = V_G(S)$. Тогда мы определим

$Rad\,(S) = Rad\,(Y) = \{f \in G[X] \,|\forall p \in Y, f(p) = 1\}$.

Назовем $Rad\,(S)$ *радикальным идеалом*, определенным системой S (или определенным Y). Очевидно, $Rad\,(S)$ – всегда нормальная подгруппа $G[X]$.

Определение 2.5. Фактор-группа $G_Y = G_S = G[X]/\,Rad\,(S)$ называется *координатной группой* алгебраического множества Y.

Определим отображение $\varphi : \Gamma_Y \to \overline{\prod\limits_{p\in Y}} G(p)$ следующим образом: каждому многочлену $h \in \Gamma_Y$ сопоставляется вектор, индексы которого – точки множества Y, координаты значения многочлена h на соответствующих точках. Это отображение является гомоморфизмом и вложением, то есть $ker\varphi = \{1\}$. Носитель элемента $h \in \Gamma_Y$ – это множество $\{p \in Y\,|h(p) \neq 1\}$.

Определение 2.6. Группа G называется *CSA-группой*, если выполняются следующие условия:

1) для любого $h \in G \backslash \{1\}$ его централизатор $C(h)$ в группе G абелев;

2) для любых $h \in G \backslash \{1\}$ и $g \in G \backslash C(h)$, $C(h) \cap g^{-1} C(h)\, g = 1$.

Пример. Группа G, определенная в параграфе 1, является CSA-группой. В самом деле, она является свободным произведением CSA-групп без элементов второго порядка, а потому по теореме 4 из статьи [6] она сама является CSA-группой.

Основным результатом параграфа 2 является

Теорема 2.1. *Координатная группа любого неприводимого алгебраического множества над неабелевой CSA-группой G вкладывается в ультрастепень $^*G$ по некоторому ультрафильтру D (координатные группы, ультрастепень и вложение мы рассматриваем в категории G-групп).* ■

Основные определения категории G-групп содержатся в [7]. Доказательство теоремы 2.1 мы проведем при помощи серии предложений.

Предложение 2.2. *Пусть Y – неприводимое алгебраическое множество, Γ_Y – его координатная группа. Тогда для любого конечного набора $h_1, ..., h_k \in \Gamma_Y \setminus \{1\}$ пересечение носителей $\bigcap\limits_{i=1}^{k} supp\,(h_i)$ не пусто.*

Доказательство. Предположим противное: нашлись элементы $h_1, ..., h_k \in \Gamma_Y \setminus \{1\}$ такие, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} supp\,(h_i) = \emptyset$. Тогда формула $\bigvee\limits_{i=1}^{k} (h_i = 1)$ выполняется на всех элементах множества Y. То есть, если $S_i = \{S_Y h_i = 1,\ Y_i = V_G(S_i)\}$, то $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Y_i$. Далее, для всех $i = 1, ..., k$, так как h_i не равен тождественно единице на Y, то $Y_i \neq Y$. Отбросим пустые множества Y_i. Получим набор $\{Y_i' | \, i = 1, ..., k'\}$ такой, что $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{k'} Y_i'$, где Y_i' – собственные подмножества Y, являющиеся алгебраическими множествами. Это противоречит неприводимости Y. ■

Предложение 2.3. *Пусть группа G является CSA-группой, Y – неприводимое алгебраическое множество в G. Тогда его координатная группа Γ_Y является CSA-группой.*

Доказательство. Нам нужно проверить, что для группы Γ_Y выполняются условия 1) и 2) определения CSA-группы.

1) Пусть $h_1, h_2, h_3 \in \Gamma_Y$, $h_1 \neq 1$, $[h_1, h_2] = 1$, $[h_1, h_3] = 1$. Предположим, что $[h_2, h_3] \neq 1$. По предложению 2.2 существует $g \in G$ такой, что $h_1\,(g) \neq 1$, $[h_1\,(g)\,, h_2\,(g)] = 1$, $[h_1\,(g)\,, h_3\,(g)] = 1$, $[h_2\,(g)\,, h_3\,(g)] \neq 1$. Это противоречит тому, что G является CSA-группой.

2) Предположим, что вторая часть определения CSA-группы не выполняется в Γ_Y. Тогда в Γ_Y существуют элементы h_1 и h_2 такие, что $h_1 \neq 1$, $[h_1, h_2 \neq 1]$ и элемент $h_3 \neq 1$ такой, что $[h_3, h_1] = 1$, $\left[h_2 h_3 h_2^{-1}, h_1\right] = 1$. По предложению 2.2 существует $g \in G$ такой, что $h_1\,(g) \neq 1$, $[h_1\,(g)\,, h_2\,(g)] \neq 1$, $h_3\,(g) \neq 1$, $[h_3\,(g)\,, h_1\,(g)] = 1$, $\left[h_2\,(g)\,h_3\,(g)\,h_2^{-1}\,(g)\,, h_1\,(g)\right] = 1$. Тогда $h_3\,(g) \in C_G\,(h_1\,(g)) \cap h_2^{1}\,(g)\,C_G\,(h_1\,(g))\,h_2\,(g)$. Получили противоречие с тем, что G является CSA-группой. ■

Предложение 2.4. *Пусть Γ_Y – координатная группа неприводимого алгебраического множества Y над неабелевой CSA-группой G. Тогда для любых $h_1, h_2 \in \Gamma_Y \setminus \{1\}$ существует $h_3 \in \Gamma_Y \setminus \{1\}$ такой, что $supp\,(h_3) \subseteq supp\,(h_1) \cap supp\,(h_2)$.*

Доказательство. Если $[h_1, h_2] \neq 1$, то полагаем $h_3 = [h_1, h_2]$. Предположим, что $g \in supp\,(h_3)$. Тогда $[h_1\,(g)\,, h_2\,(g)] \neq 1$ и $h_1\,(g) \neq 1$, $h_2\,(g) \neq 1$, следовательно, $g \in supp\,(h_1) \cap supp\,(h_2)$ и в этом случае все доказано. Предположим, что $[h_1, h_2] = 1$. Так как G неабелева, то Γ_Y тоже неабелева, следовательно, существует $h_4 \in \Gamma_Y$ такой, что $[h_1, h_4] \neq 1$. Так как G – CSA-группа, то по утверждению 2.3 Γ_Y – тоже CSA-группа. Тогда по условию 2) CSA-группы, так как $h_4 \notin C\,(h_1)$, то $h_4 h_1 h_4^{-1} \notin C\,(h_1)$. По условию 1) CSA-группы $C\,(h_2)$ абелев. Так как $h_1 \in C\,(h_2)$, $\left[h_1, h_4 h_1 h_4^{-1}\right] \neq 1$, то $h_4 h_1 h_4^{-1} \notin C\,(h_2)$. Полагаем $h_3 =$

$$\begin{tikzcd} \Gamma_Y \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \left.\overline{\prod\limits_{p\in Y}} G(p)\middle/ D\right. \\ & \overline{\prod\limits_{p\in Y}} G(p) \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

Рис. 1.

$\left[h_2, h_4 h_1 h_4^{-1}\right]$. Во-первых, $h_3 \neq 1$. Во-вторых, $supp\,(h_3) \subseteq supp\,(h_1) \cap supp\,(h_2)$. Итак, получили искомый элемент. ∎

Еще для доказательства теоремы 2.1 нам понадобится следующий общеизвестный факт.

Предложение 2.5. *Любой фильтр может быть включен в ультрафильтр.* ∎

Закончим доказательство теоремы. Построим фильтр Δ над множеством Y следующим образом: Δ состоит из всех носителей $supp\,(h)$, где $h \in \Gamma_Y \setminus \{1\}$ и их надмножеств (то есть, если $supp\,(h) \subseteq B \subseteq \Gamma_Y$, то $B \in \Delta$). Условие очевидно. Условие (ii) следует из предложения 2.4. Действительно, возьмем $A, B \in \Delta$, тогда существуют $h_1, h_2 \in \Gamma_Y$ такие, что $supp\,(h_1) \subseteq A$, $supp\,(h_2) \subseteq B$. Из этого следует, что $supp\,(h_1) \cap supp\,(h_2) \subseteq A \cap B$. По предложению 2.4 существует $h_3 \in \Gamma_Y \setminus \{1\}$ такой, что $supp\,(h_3) \subseteq supp\,(h_1) \cap supp\,(h_2)$. Тогда $supp\,(h_3) \subseteq A \cap B \subseteq Y$ и, следовательно, $A \cap B \in \Delta$. По предложению 2.5 фильтр Δ расширяется до некоторого ультрафильтра D. Имеем диаграмму, изображенную на рисунке 1.

Докажем, что $ker\psi = \{1\}$. Тогда ψ будет искомым вложением. Предположим, что $\psi\,(h) = 1$, где $h \neq 1$. Тогда существует $J \in D$ такой, что для любого $p \in J$, $h\,(p) = 1$, но $supp\,(h) \cap J \neq \emptyset$. Получили противоречие. Теорема доказана. ∎

Предложение 2.3 допускает обращение. Для его доказательства нам понадобится лемма.

Лемма 2.1. *В неабелевой CSA-группе G любая нормальная неединичная подгруппа H неабелева.*

Доказательство. Предположим, что H абелева. Возьмем элемент $h \in H \setminus \{1\}$. Поскольку группа G неабелева, то по условию (1) CSA-группы существует элемент, не принадлежащий централизатору h, то есть существует $g \in G \setminus C\,(h)$. Так как H – абелева, то $H \subseteq C\,(h)$. Так как H нормальная, то $H \cap g^{-1}Hg \neq 1$. Но $H \cap g^{-1}Hg \subseteq C\,(h) \cap g^{-1}C\,(h)\,g$, следовательно, $C\,(h) \cap g^{-1}C\,(h)\,g \neq 1$. Получили противоречие со вторым условием CSA-группы. ∎

Предложение 2.6. *Пусть G – неабелева CSA-группа, Y – алгебраическое множество над G. Его координатная группа Γ_Y является CSA-группой тогда и только тогда, когда множество Y неприводимо.*

Доказательство. В одну сторону это утверждение следует из утверждения 2.3. Обратно, пусть Γ_Y является CSA-группой. Предположим, что Y приводимо. Тогда $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Y_i$, где Y_i алгебраические множества, $Y_i \neq Y$. По теореме Ремака существует вложение $\Gamma_Y \to \Gamma_{Y_1} \times ... \times \Gamma_{Y_k}$, где $\Gamma_{Y_i} = {G[x]}/{R_i}$ – это факторы по соответствующим радикалам, $\Gamma_Y = G[x]/R$, $R = R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_k$. Обозначим $R' = R_1 \cap ... \cap R_k$. Поскольку Y_i – собственные подмножества и $k \neq 1$, то можем считать, что $R_1 \neq R$ и $R' \neq R$. Тогда существуют элемент $a \in R' \backslash R_1$ и элемент $b \in R_1 \backslash R'$ такие, что их образы $[a]$ и $[b]$ в Γ_Y не равны единице. Так как R_1 и R' – нормальные подгруппы $G[x]$, то $c = [a, b] \in R_1 \cap R' = R$. Следовательно, $[c] = 1$ и $[[a], [b]] = 1$. R_1/R – неединичная нормальная подгруппа Γ_Y. Так как Γ_Y – CSA-группа, то по лемме 2.1, R_1/R неабелева. Кроме того, она является CSA-группой, так как свойство CSA сохраняется для подгрупп. Поэтому централизатор $C_{R_1/R}([b])$ абелев и не совпадает с R_1/R. То есть существует $c' \in (R_1/R) \setminus \{1\}$ такой, что $[c', [b]] \neq 1$. Аналогично, как для элемента b, $[[a], c'] = 1$. Получили противоречие с первым условием CSA-группы, так как по этому условию централизатор $C_{\Gamma_Y}([a])$ должен быть абелевым. ■

По теореме 2.1 все координатные группы неприводимых алгебраических множеств над группой G вкладываются в $^*G$. Поэтому для доказательства теоремы 1.1 достаточно доказать теорему 1.2 и проверить, что все однопорожденные подгруппы $^*G$ являются координатными группами некоторых неприводимых алгебраических множеств. Это делается непосредственными вычислениями. В теореме 1.3 приведены результаты этих вычислений.

3. Функции длины на свободных произведениях групп

Пусть G – свободное произведение групп, определенное выше. Тогда любой элемент группы G имеет однозначную запись

$$g = g_1 \cdots g_l, \tag{1}$$

где рядом стоящие множители принадлежат разным группам A_i и неединичны.

Определим целочисленную функцию длины $L : G \to \mathbb{Z}$, $L(1) = 0$. Если $1 \neq a \in A_i$, то $L(a) = 1$. Если g записан в виде (1), то $L(g) = l$.

То, что так определенная функция является функцией длины Линдона, вытекает из следующей леммы.

Лемма А. *Пусть $L_i : G_i \to \Lambda$ – функция длины Линдона на группе G_i, $i = 1, 2$. Определим функцию $L : G_1 * G_2 \to \Lambda$. $L(1) = 0$ и если $g \in G_i$, то $L(g) = L_i(g)$. Если $g = g_1 g_2 ... g_k$ – нормальная форма элемента g в свободном произведении $G_1 * G_2$, то $L(g) = \sum\limits_{j=1}^{k} L(g_j)$. Тогда функция L на свободном произведении $G_1 * G_2$ является функцией длины Линдона.*

Доказательство. Проверим аксиомы функции длины (см. [1]). Аксиомы (1) и (2) проверяются непосредственно. Проверим аксиому (3), то есть, что для любых $g, h, k \in G$

$$c(g,h) \geqslant \min\{c(h,k), c(k,g)\},$$

где $c(g,h) = \frac{1}{2}(L(g) + L(h) - L(g^{-1}h))$. Заметим, что $c(g,h) = c(h,g)$ для любых $g, h \in G_1 * G_2$. Тогда аксиома (3) эквивалентна следующей формуле:

$$\forall g, h, k \in G_1 * G_2, c(g,h) > c(h,k) \Rightarrow c(g,k) = c(h,k) \tag{2}$$

Докажем формулу (2). Пусть $g = g_1...g_l$, $h = h_1...h_m$, $k = k_1...k_n$ – разложения в виде (1). Полагаем $g_0 = h_0 = k_0 = g_{l+1} = g_{m+1} = g_{n+1} = 1$. Выделим максимальные общие множители в начале разложений g и h: $g = h_1...h_{m'}g_{m'+1}...g_l$, так что $c(g,h) = \sum\limits_{i=1}^{m'} L(h_i) + c(g_{m'+1}, h_{m'+1})$. Аналогично для k и h: $k = h_1...h_{n'}k_{n'+1}...k_n$, $c(k,h) = \sum\limits_{i=1}^{n'} L(h_i) + c(k_{n'+1}, h_{n'+1})$. На элементах из свободного множителя G_i функции c и c_i, L и L_i совпадают, по определению, здесь $i = 1, 2$. По свойству функции длины Линдона, если $x, y \in G_i$, то $c(x,y) \leqslant L(x)$, $i = 1, 2$ [1]. Предположим теперь, что $m' < n'$. Тогда $c(g,h) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m'} L(h_i) + L(h_{m'+1}) \leqslant c(k,h)$, что противоречит посылке в формуле (2). Следовательно, $m' \geqslant n'$. Первые n' множителей в разложении g и k совпадают: $g = h_1...h_{n'}h_{n'+1}...h_{m'}g_{m'+1}...g_l$, $k = h_1...h_{n'}k_{n'+1}...k_n$.

Если $m' > n'$, то $c(g,k) = \sum\limits_{i=1}^{n'} L(h_i) + c(h_{n'+1}, k_{n'+1}) = c(k,h)$.

Если $m' = n'$, то $c(g,k) = \sum\limits_{i=1}^{n'} L(h_i) + c(g_{n'+1}, k_{n'+1})$. Так как $c(g,h) > c(k,h)$, то в этом случае $c(g_{n'+1}, h_{n'+1}) > c(k_{n'+1}, h_{n'+1})$, причем $g_{n'+1}$, $h_{n'+1}$, $k_{n'+1}$ принадлежат одному и тому же множителю G_{i_0}. Тогда $c(g_{n'+1}, k_{n'+1}) = c(k_{n'+1}, h_{n'+1})$. Следовательно, $c(g,h) = c(h,k)$. Что и требовалось доказать. ■

Определим стандартным способом понятие *редуцированного произведения* элементов g и h: $g \circ h = gh$ тогда и только тогда, когда $L(gh) = L(g) + L(h)$. Элемент $g \in G$ называется *циклически редуцированным*, если выполняется условие $g \circ g = g^2$.

Предложение 3.1. *Из условия $g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ следует $(g_1 \circ g_2) \circ g_3$. Поэтому нет надобности скобок в записи $g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_k$.* ■

Предложение 3.2. *Если g – циклически редуцированный элемент, тогда $L(g^n) = |n| L(g)$.* ■

Определение 3.1. Будем говорить, что произведение двух элементов $f, g \in G$ есть слияние и обозначать это символом $f * g$, если либо $fg = f \circ g$, либо $t(f)$ и $o(g)$ лежат в одном множителе и $t(f) \neq o(g)^{-1}$, где $t(f)$ – конец f, $o(g)$ – начало g. Нетрудно проверить, что $fg = f * g$ если и только если

$$L(fg) = \begin{cases} L(f) + L(g) \\ L(f) + L(g) - 1. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что любой элемент можно записать в форме $g = f^{-1} \circ g_0 * f$, где g_0 – циклически редуцированный.

Предложение 3.3. *Если g – элемент бесконечного порядка, то*
$$L(g^n) = \begin{cases} |n|\, L(g_0) + 2L(f) \\ |n|\, L(g_0) + 2L(f) - 1. \end{cases}$$ ■

Определение 3.2. Элемент g из G назовем *архимедовым*, если $L(g^2) > L(g)$, в противном случае элемент называется *неархимедовым.*

Предложение 3.4. *В группе G, определенной выше, элементы конечного порядка и только они являются неархимедовыми.*

Доказательство. Пусть элемент $g \in G$ имеет конечный порядок, тогда его можно представить в виде $g = f^{-1} \circ g_0 \circ f$, где $g_0 \in \bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i$ (см. [2] или [3]). Отсюда следует, что $L(g^2) = L(g_0^2) + 2L(f) = L(g_0) + 2L(f) = L(g)$, а потому импликация доказана.

Обратно, пусть g – неархимедовый элемент, то есть $L(g^2) \leqslant L(g)$. Как отмечено выше, элемент g можно записать в виде $g = f^{-1} \circ g_0 * f$, а его квадрат в виде $g^2 = f^{-1} \circ g_0 \circ g_0 * f$. Если g имеет бесконечный порядок, то используя утверждение 3, $L(g^2) = \begin{cases} 2L(g_0) + 2L(f) \\ 2L(g_0) + 2L(f) - 1 \end{cases}$. Следовательно, $L(g^2) > L(g)$, что противоречит условию. Поэтому g – элемент конечного порядка. ■

4. Функции длины на ультрастепени

Пусть G – группа, I – бесконечное множество, D – неглавный ультрафильтр над I, ${}^*G = G^I \big/ D$ – ультрастепень, $\Delta : G \to {}^*G$ диагональное вложение G в ${}^*G$. Возьмем элемент $t \in {}^*G \backslash G$ и будем рассматривать группу $H = \langle G, t \rangle$. В ультрастепени естественным образом определена функция длины ${}^*L : {}^*G \to {}^*\mathbb{Z}$, детали смотри в [1].

Предложение 4.1. *Элемент конечного порядка в ${}^*G$ неархимедов.*

Доказательство. Пусть $g \in {}^*G$ и пусть порядок g равен n. Выберем представитель $(g_i) \in G^I$ для g. Тогда $I_g = \{i \in I | g_i^n = 1\} \in D$. Так как $I_1 = \{i \in I | L(g_i^2) \leqslant L(g_i)\} \supset I_g$, то I_1 тоже принадлежит D, а потому ${}^*L(g^2) \leqslant {}^*L(g)$, и g – неархимедов.

Лемма 4.1. *Если $A_1 \cup \ldots \cup A_k \in D$, то $A_j \in D$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$.*

Доказательство. Предположим, что для любых $i \in \{1, ..., k\}$ $A_i \notin D$. Тогда $I \backslash A_i \in D$ и $I \backslash A_1 \cap ... \cap I \backslash A_k \in D$, что эквивалентно $I \backslash (A_1 \cup ... \cup A_k) \in D$. По свойству ультрафильтра получаем, что $A_1 \cup ... \cup A_k \notin D$. Противоречие. ■

Лемма 4.2. *Если $A_1 \cup \ldots \cup A_k \in D$, где $A_1, \ldots, A_k$ попарно не пересекаются, то существует единственный $j \in \{1, \ldots, k\}$, для которого $A_j \in D$.*

Доказательство. То, что такой элемент существует, следует из леммы 4.1. Предположим, что $A_{j_1} \in D$ и $A_{j_2} \in D$, где $j_1 \neq j_2$. Тогда $\emptyset = A_{j_1} \cap A_{j_2} \in D$, что противоречит определению ультрафильтра. ■

Предложение 4.2. *Неархимедовый элемент имеет конечный порядок.*

Доказательство. Пусть $g \in G^*$, $L^*(g^2) \leqslant L(g)$. Тогда $\{i \in I | L(g_i^2) \leqslant L(g_i)\} \in D$, $\{i \in I | L(g_i^2) \leqslant L(g_i)\} \subset \{i \in I | g_i^{n_i} = 1\} = \bigcup\limits_{k \in O(G)} \{i \in I | g_i^{n_k} = 1\}$.

Так как $O(G)$ – конечное множество, то по лемме 4.1 для некоторого $j \in O(G)$, $\left\{i \in I | g_i^{n_j} = 1\right\} \in D$. Следовательно, $g^{n_j} = 1$. ■

Предложение 4.3. *Пусть $g = a^f$, где $a \in A \cup B$, $f \in {}^*G$. Тогда $g^n = 1$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.* ■

Предложение 4.4. *Если $g^n = 1$, то элемент g имеет вид a^f, где $a \in A \cup B$, $f \in {}^*G$.* ■

Будем говорить, что для элементов $g, f \in G^*$ выполняется слияние $g * f$, если существуют представители $(f_i), (g_i) \in G^I$, для которых верно включение $\{i \in I | g_i * f_i\} \in D$.

Нетрудно проверить, что для элементов $g, f \in G^*$ их произведение является слиянием $g * f$, если

$$ {}^*L(gf) = \begin{cases} {}^*L(g) + {}^*L(f) \\ {}^*L(g) + {}^*L(f) - 1. \end{cases} $$

Доказательство предложения 4.4. Пусть $g^n = 1$, тогда по предложению 4.1 $L^*(g^2) \leqslant L^*(g)$. По определению, $g = f^{-1} \circ g_0 * f$. Тогда $g^2 = f^{-1} \circ g_0^2 * f$, и если $L^*(g_0) > 1$. Для $n > 0$, $L^*(g^n) = 2L^*(f) + nL^*(g_0) - \varepsilon$, где ε - либо 0, либо 1 и не зависит от n. Тогда $L^*(g^2) > L^*(g)$ – противоречие. Следовательно, $L^*(g_0) = 1$. ■

5. Свойства функции длины

Далее мы будем использовать схему статьи [1]. Некоторые леммы этой статьи выполняются для случая свободных произведений без изменений, лемма 4.2 [1], часть (2), требует переформулировки. Лемма 5.1 — это аналог Леммы 4.2,(2), из [1]. Если $u, v \in {}^*G$, то существуют $u', v', t \in {}^*F$ такие, что $u = u' \circ t$, $v = t^{-1} \circ v'$, $uv = u' * v'$ и ${}^*L(t) = [{}^*c(u^{-1}, v)]$.

Переформулируем лемму 4.4 из [1].

Лемма 5.2. (Лемма 4.4, [1]) *Пусть t – большой элемент, $u \in G$.*

(1) *Если пара (t, ut) имеет большое сокращение, тогда мы можем записать $u = u_1 \circ u_2$, $t = u_2^{-1} * t' * u_1^{-1}$ и $t' = f^{-1} \circ t'' \circ f$, где f большой элемент.*

(2) *Предположим* $u \in G\setminus\{1\}$, $f \in G^*\setminus G$, *и запишем* $u = v \circ \tilde{u} * v^{-1}$, *где* $\tilde{u}$ *– циклически приведенный. Если пара* (f^{-1}, uf) *имеет большое сокращение, тогда мы можем записать* $f = v \circ \tilde{u}^{\alpha} \circ f'$, *где* $\alpha \in \mathbb{Z}^*\setminus\mathbb{Z}$, $f' \in G^*$. ■

Определение 5.1. Элемент $g \in {}^*G$ называется корневым, если он является порождающим максимальной циклической подгруппы группы ${}^*G$.

Лемма 5.3. (Лемма 4.5, [1]) *Эта лемма и ее доказательство переписываются дословно.* ■

Лемма 4.6 из [1] заменяется следующей леммой.

Лемма 5.4. *Пусть* $f, g, v \in G$, $\alpha, \beta \in^* \mathbb{Z}$, f, g *– циклически приведенные корневые элементы.*

Тогда

(1) *если* $can\left(f^{\alpha}, vf^{\beta}\right) \in {}^*G\setminus G$, *то* $[f, v] = 1$, *более того,* α *и* β *имеют разные знаки;*

(2) *если* $can\left(f^{\alpha}, vg^{\beta}\right) \in {}^*G\setminus G$, *то* f *сопряжен* g *или* g^{-1}. ■

Лемма 5.5. (Лемма 4.7, [1]) *Пусть* $t \in {}^*G\setminus G$ *– архимедовый элемент такой, что* ${}^*L(t) \notin \mathbb{Z}$. *Тогда выполняется одно из следующих условий:*

(I) класс эквивалентности $[t]_G$ не содержит элементов, делящихся справа или слева на элемент из $G\setminus\{1\}$;

(II) класс эквивалентности $[t]_G$ содержит элемент вида $f^{\alpha} \circ t_1$, где $t_1 \in {}^*G\setminus G$, $f \in F_2\setminus\{1\}$, f – корневой элемент и циклически приведенный, $f^{\alpha} \in {}^*G\setminus G$, и класс эквивалентности элемента t_1 не содержит элементов вида $t_2 \circ g^{\beta}$, где $g \in G$ и $g^{\beta} \in {}^*G\setminus G$. В дальнейшем, t_1 не может быть записан в виде $f^{\pm 1} \circ t'$;

(III) t^{-1} попадает под случай (ii);

(IV) класс эквивалентности $[t]_G$ содержит элемент вида $f^{\alpha} \circ t_1 \circ g^{\beta}$, где $f, g \in G\setminus\{1\}$, f, g – корневые элементы и циклически приведенные, $f^{\alpha}, g^{\beta} \in {}^*G\setminus G$ и g не сопряжен $f^{\pm 1}$. В дальнейшем, t_1 не может быть записан в виде $f^{\pm 1} \circ t'$ или $t' \circ g^{\pm 1}$;

(V) класс эквивалентности $[t]_G$ содержит элемент вида $f^{a} \circ t_1 \circ f^{\beta}$, где $f \in G\setminus\{1\}$, f – корневой элемент и циклически приведенный, $f^{\alpha}, f^{\beta} \in {}^*G\setminus G$, $t_1 \in {}^*G\setminus\{1\}$ и t_1 не может быть записан в виде $f^{\pm 1} \circ t'$ или $t' \circ f^{\pm 1}$;

(VI) класс эквивалентности $[t]_G$ содержит элемент вида f^{α} , где $f \in G$ – циклически приведенный и корневой элемент, и $f^{\alpha} \in {}^*G\setminus G$. ■

Лемма А. *Пусть* $f, g \in G$. *Если* $[f, g^{n_1} f^{m_1} \dots g^{n_p} f^{m_p} g^{n_{p+1}}] = 1$, *для* $n_1, \dots, n_{p+1}$, $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $g^{n_1} f^{m_1} \dots g^{n_p} f^{m_p} g^{n_{p+1}}$ *– приведенное слово от* f *и* g. *Тогда* $[f, g] = 1$. ■

Лемма 5.6. (аналог Леммы 6.4 [1] для неархимедовых элементов) *Пусть* $t \in {}^*G\setminus G$ *– неархимедовый элемент такой, что* ${}^*L(t) \notin \mathbb{Z}$. *Класс эквивалентности* $[t]_G$ *содержит элемент вида* $f^{a} \circ t_1 \circ f^{\beta}$, *где* $f \in G\setminus\{1\}$, f *– корневой* *элемент и циклически приведенный,* $f^\alpha, f^\beta \in {}^*G\backslash G$, $t_1 \in {}^*G\backslash\{1\}$ *и* t_1 *не может быть записан в виде* $f^{\pm 1}\circ t'$ *или* $t'\circ f^{\pm 1}$. *Тогда* $\langle G, t\rangle$ – *группа, равная* $G * \langle t''\rangle$ *для некоторого* t'', F_2*-эквивалентного* t ($\langle G, t\rangle = G * \langle t''\rangle$).

Доказательство. Нам нужно показать, что если $h = u_1 t^{\varepsilon_1} u_2 t^{\varepsilon_2}\dots u_k t^{\varepsilon_k} u_{k+1}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $u_i \in G$ и если $u_i = 1$, то $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ и $h \neq 1$. Положим $h_r = u_1 t^{\varepsilon_1} u_2 t^{\varepsilon_2}\dots u_r t^{\varepsilon_r}$.

Имеются два случая. Предположим вначале, что α и β имеют один знак. Докажем, что h_r может быть записан в виде $h_r = v_1 s_1 \dots v_m s_m$, где $m = m(r) \geqslant 1$, $v_i \in F_2$ и

(1) $s_i = x_i w_i y_i$, где $x_i = f^\alpha$ или $f^{-\beta}$, $y_i = f^{-\alpha}$ или f^β и $w_i = t_1^{\eta_1} f^{n_1} t_1^{\eta_2}\dots f^{n_{p-1}} t_1^{\eta_p}$ где $p = p(i) \geqslant 1$, $\eta_j = \eta_j(i) = \pm 1$, $n_j = n_j(i) \in {}^*\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $f^{n_j} \in F_2$ и $\eta_1 = 1$, если $x_i = f^\alpha$; $\eta_1 = -1$, если $x_i = f^\beta$; $\eta_p = 1$, если $y_i = f^\beta$; $\eta_p = -1$, если $y_i = f^\alpha$;

далее, $\eta_{j-1}\eta_j = -1$ для $2 \leqslant j \leqslant p$;

(2) для $i > 1$, если $y_{i-1} = f^{-\alpha}$ и $x_i = f^\alpha$, тогда $[v_i, f] \neq 1$; также, если $y_{i-1} = f^\beta$ и $x_i = f^{-\beta}$, то $[v_i, f] \neq 1$;

(3) если $\varepsilon_r = 1$, то $y_m = f^\beta$, и если $\varepsilon_r = -1$, то $y_m = f^{-\alpha}$.

Доказательство проведем индукцией по r. Для случая $r = 1$ утверждение верно. Предполагая, что оно верно для r. Рассмотрим

$$h_{r+1} = (v_1 s_1 \dots v_m s_m)\, u_{r+1} t^{\varepsilon_{r+1}}.$$

Положим $u = u_{r+1}$.

Случай 1. $\varepsilon_{r+1} = 1$. Тогда $h_{r+1} = (v_1 s_1 \dots v_m s_m)\, u f^\alpha t_1 f^\beta$. Если $\varepsilon_r = 1$, то $y_m = f^\beta$ и полагая $v_{m+1} = u$, $x_{m+1} = f^\alpha$, $w_{m+1} = t_1$, $y_{m+1} = f^\beta$, запишем h_{r+1} в виде $v_1 s_1 \dots v_{m+1} s_{m+1}$, что и требовалось. Если $\varepsilon_r = -1$, то $y_m = f^{-\alpha}$, и доказательство аналогично предыдущему, исключая случай, когда u коммутирует с f. В этом случае по лемме 4.1 [4] $u = f^n$ для $n \in {}^*\mathbb{Z}$. Следовательно, $h_{r+1} = v_1 s_1 \dots x_m w_m f^n t_1 f^\beta$. Положим $w'_m = w_m f^n t_1$, $y'_m = f^\beta$ и $s'_m = x_m w'_m y'_m$. Тогда $h_{r+1} = v_1 s_1 \dots v_{m-1} s_{m-1} v_m s'_m$ – выражение для h_{r+1} требуемой формы.

Случай 2. $\varepsilon_{r+1} = -1$. Доказательство этого случая аналогично случаю 1.

Далее, мы утверждаем, что $can\,(x_i w_i, y_i) \in G$ и $can\,(x_i, w_i) \in G$ для всех подходящих i, так что $s_i \in {}^*G\backslash G$. Если считать это доказанным, тогда $can\,(v_i x_i w_i, y_i) \in G$ по лемме 5.3 (1). По условию (2) и лемме 5.4 $can\,(y_{i-1}, v_i x_i) \in G$ для $i > 1$. Кроме того, несколько раз используя лемму 5.3 (1), $can(v_i x_i, w_i) \in G$ и $can\,(y_{i-1}, v_i x_i w_i) \in G$, и поэтому $can\,(y_{i-1} v_i x_i w_i y_i) \in G$, то есть $can\,(y_{i-1}, v_i s_i) \in G$. При дальнейшем применении леммы 5.3 (1) получаем $can\,(s_{i-1}, v_i s_i) \in G$ и $can\,(v_{i-1} s_{i1}, v_i s_i) \in G$. По лемме 5.3 (2), $h_r \in {}^*G\backslash G$, так что $h = h_k u_{k+1} \in {}^*G\backslash G$. Следовательно $h \neq 1$, как и требовалось.

Чтобы завершить доказательство леммы, достаточно показать, по лемме 5.4, что w_i не коммутирует с f. Если $[w_i, f] = 1$, то беря координаты и используя лемму A мы можем доказать, что $[t_1, f] = 1$, и тогда по лемме 4.1 [4] $t_1 = f^m$ для некоторого $m \in {}^*\mathbb{Z}$. Это противоречит предположениям на t_1.

Далее предполагаем, что α, β имеют разные знаки. Проверим, что h_r может быть записан в виде $h_r = v_1 s_1 \dots v_m s_m$, где $m = m(r) \geqslant 1$, $v_i \in F_2$ и

(1) $s_i = x_i w_i y_i$, где $x_i = f^{\alpha}$ и $y_i = f^{\beta}$, или $x_i = f^{-\beta}$ и $y_i = f^{-\alpha}$, и $w_i = t_1 f^{n_1+\alpha+\beta} t_1 \dots f^{n_{p-1}+\alpha+\beta} t_1$, если $x_i = f^{\alpha}$, $y_i = f^{\beta}$ $w_i = t_1^{-1} f^{n_1-\alpha-\beta} t_1^{-1} \dots f^{n_{p-1}-\alpha-\beta} t_1^{-1}$, если $x_i = f^{-\beta}$, $y_i = f^{-\alpha}$;

(2) для $i > 1$, если $y_{i-1} = f^{-\alpha}$ и $x_i = f^{\alpha}$, то $[v_i, f] \neq 1$; также, если $y_{i-1} = f^{\beta}$ и $x_i = f^{\beta}$, то $[v_i, f] \neq 1$;

(3) если $\varepsilon_r = 1$ то $y_m = f^{\beta}$, и если $\varepsilon_r = -1$, то $y_m = f^{-\alpha}$.

Доказательство индукцией по r.

Обозначим $G_{\mathbb{Z}} = \{f \in G^* | L^*(f) \in \mathbb{Z}\}$. Ультрапроизведения ${}^*A_i$ естественным образом вкладываются в ${}^*G$. Следующая лемма дает описание структуры группы $G_{\mathbb{Z}}$.

Лемма 5.7. *Группа $G_{\mathbb{Z}}$ является свободным произведением ультрапроизведений ${}^*A_i$, то есть $G_{\mathbb{Z}} = \mathop{*}\limits_{i=1}^{k} {}^*A_i$.*

Доказательство. Вначале докажем, что любой элемент $f \in G^*$ такой, что $L^*(f) \in \mathbb{Z}$, представляется в виде произведения элементов из множества $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$. Пусть длина элемента f равна n. Возьмем некоторый представитель f' элемента f в декартовом произведении $\prod\limits_{j \in I} G$. Тогда множество $I_0 \subseteq I$, на котором выполняется равенство $L(f_j) = n$, принадлежит ультрафильтру. Любой элемент $g \in G$ длины n однозначно представляется в виде $g = g_1 g_2 ... g_n$, где $g_1 \in A_{i_1}, ..., g_n \in A_{i_n}$, набор $(i_1, i_2, ..., i_n)$ принадлежит некоторому конечному множеству наборов, а именно k^n. Этот набор назовем структурой элемента g. Таким образом, множество I_0 разбивается на конечное объединение непересекающихся множеств $I_0 = \bigcup\limits_{i' \in k^n} I_{i'}$ по следующему принципу: $I_{i'}$ – это множество всех индексов, для которых f_j имеет структуру i'. По лемме 2 [5] существует единственный $i'_0 \in k^n$, для которого множество $I_{i'_0}$ принадлежит ультрафильтру. Тогда элемент f представляется в виде $f = f_1 ... f_n$, где $f_1 \in {}^*A_{i_{01}}, f_2 \in {}^*A_{i_{02}}, ..., f_n \in {}^*A_{i_{0n}}$, $(i_{01}, i_{02}, ..., i_{0n}) = i'_0$.

Чтобы завершить доказательство леммы достаточно показать, что из условия $f_1 ... f_n = 1$, где $f_1 \in {}^*A_{i_1}, f_2 \in {}^*A_{i_2}, ..., f_n \in {}^*A_{i_n}$, $(i_1, i_2, ..., i_n) = i'$, $i_1 \neq i_2, ..., i_{n-1} \neq i_n$, следует, что $f_i = 1$ для некоторого $i \in \{1, ..., n\}$. Также, как в начале доказательства, возьмем представители $f'_1, f'_2, ..., f'_n$ соответственно элементов $f_1, f_2, ..., f_n$. Множество индексов $j \in I$, для которых $f'_{1j} f'_{2j} ... f'_{nj} = 1$, принадлежит ультрафильтру, где $f_{1j} \in A_{i_1}, f_{2j} \in A_{i_2}, ..., f'_{nj} \in A_{i_n}$. Тогда по лемме 2 [5] и по свойству ультрафильтра множество индексов $j \in I$, для которых $f_{ij} = 1$, тоже принадлежит ультрафильтру. ■

Доказательство основной теоремы разбиваем на два случая. Первый – когда ${}^*L(t) \in \mathbb{Z}$ (теорема 5.1), и второй – когда ${}^*L(t) \notin \mathbb{Z}$ (теорема 5.2, теорема 5.3).

Лемма B. *Если $h_1 \in G$, $h_2 \in {}^*G \backslash G$, $h_3 \in {}^*G$, тогда из условия $h_2 \circ h_3$ следует $(h_1 h_2) \circ h_3$.* ■

Теорема 5.1. *Пусть G – группа, определенная в параграфе 1, ${}^*G$ – ультрастепень по неглавному ультрафильтру, $t \in {}^*G \backslash G$ – элемент конечной длины.*

Тогда группа, порожденная группой G и элементом t, G-изоморфна одной из групп:

1) $G * \langle t' \rangle$,
2) $G * \langle t' | t'^n = 1 \rangle$, где $n \in O(G)$,
3) $\langle G, t' | [A_i, t'] = 1 \rangle$,
4) $\langle G, t' | [A_i, t'] = t'^n = 1 \rangle$, где $n \in O(G)$.

Доказательство. У нас есть элемент $t \in {}^*G \backslash G$, ${}^*L(t) \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $H = \langle G, t \rangle$ группу, порожденную G и t. По лемме 5.7 элемент t имеет вид: $t = b_1 b_2 ... b_p$, где $b_1 \in {}^*A_{i_1}, b_2 \in {}^*A_{i_2}, ..., b_p \in {}^*A_{i_p}$.

Если $p = 1$, тогда $t = b_1$, и имеем следующую последовательность рассуждений: A_{i_1} элементарно вложена в ${}^*A_{i_1}$ (общая теорема теории моделей), A_{i_1} – сервантная в ${}^*A_{i_1}$, для элемента b_1 существует $b_1' = b_1 a'$ такой, что $a' \in A_{i_1}$ и $\langle A_{i_1}, b_1' \rangle = \langle A_{i_1} \rangle \oplus \langle b_1' \rangle$. Далее, рассматривая нормальные формы в ${}^*G$, получаем, что H G-изоморфна одной из групп:

$\langle G, t' | [A_i, t'] = 1 \rangle$ или $\langle G, t' | [A_i, t'] = t'^n = 1 \rangle$, где $n \in O(G)$.

Если $p > 1$, то можем считать (так как группы классифицируются с точностью до G-изоморфизма), что $b_1, b_p \notin G$. Порядок элемента t может быть конечен; если это так, то обозначим его через n.

Предположим, что есть нетривиальное соотношение $w = g_1 t^{n_1} g_2 t^{n_2} ... g_k t^{n_k} = 1$, где $g_1, ..., g_k \in G$, $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}$, $t^{n_1} \neq 1, ..., t^{n_k} \neq 1$, $g_1 \neq 1, ..., g_k \neq 1$. Предположим, что $k = 1$. Можем считать, что $n_1 > 0$.

Случай 1. В записи элемента t, $i_1 = i_p$. Как замечено в параграфе 2, элемент t записывается в виде $t = f^{-1} \circ t_0 * f$, где t_0 – $*$-циклически редуцированный элемент, $t^n = f^{-1} \circ \underbrace{t_0 * ... * t_0}_{n} * f$, и пусть $f^{-1} = b_1 \circ ... \circ b_s$, $t_0 = b_{s+1} \circ ... \circ b_{p-s} \circ c_3$, $f = b_{p-s+1} \circ ... \circ b_p = b_s^{-1} \circ ... \circ b_1$. Тогда по лемме B $w = g_1 t^{n_1} = g_1 b_1 ... b_s t_0^{n_1} b_s^{-1} ... b_1^{-1} = (g_1 b_1) \circ b_2 \circ ... \circ b_s \circ t_0^{n_1} * f \neq 1$. Получили противоречие.

Случай 2. В записи элемента t, $i_1 \neq i_p$. Тогда $w = g_1 t^{n_1} = (g_1 b_1) \circ ... \circ b_p \circ t^{n_1 - 1} \neq 1$. Противоречие.

Далее предполагаем, что $k > 1$.

Случай 1. В записи элемента t, $i_1 = i_p$. Как замечено в параграфе 2, элемент t записывается в виде $t = f^{-1} \circ t_0 * f$, где t_0 – $*$-циклически редуцированный элемент, $t^n = f^{-1} \circ \underbrace{t_0 * ... * t_0}_{n} * f$, и пусть $f^{-1} = b_1 \circ ... \circ b_s$, $t_0 = b_{s+1} \circ ... \circ b_{p-s} \circ c_3$, $f = b_{p-s+1} \circ ... \circ b_p = b_s^{-1} \circ ... \circ b_1$. Рассмотрим тройку элементов: $t^{n_{j-1}} g_j t^{n_j} = \left(b_1 \circ ... \circ b_s \circ t_0^{n_{j-1}} * b_s^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}\right) g_j \left(b_1 \circ ... \circ b_s \circ t_0^{n_j} * b_s^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}\right)$.

1) Если $g_j \in A_{i_1}$ и $s > 1$, то $t^{n_{j-1}} g_j t^{n_j} = b_1 \circ ... \circ b_s \circ t_0^{n_{j-1}} * b_s^{-1} \circ ... \circ b_2^{-1} \circ g_j \circ b_b \circ ... \circ b_s \circ t_0^{n_j} * b_s^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1}$.

2) Если $g_j \in A_{i_1}$ и $s = 1$, то $t^{n_{j-1}} g_j t^{n_j} = b_1 \circ t_0^{n_{j-1}} * g_2 \circ t_0^{n_j} * b_1^{-1}$.

3) Если $g_j \notin A_{i_1}$, тогда нет сокращений в этой тройке.

Везде степень t_0 остается. Делая сокращения во всем слове, получаем, $w = g_1 \left(b_1 \circ v \circ t_0^{n_k} * b_1^{-1}\right)$. Так как $b_1 \in {}^*G \backslash G$, то $w = (g_1 b_1) \circ v \circ t_0^{n_k} * b_1^{-1} \neq 1$. Таким образом, в случае 1 все доказано.

Случай 2. В записи элемента t, $i_1 \neq i_p$.

Случай 2.1. $p > 2$.

Рассмотрим тройку $t^{n_{j-1}}g_jt^{n_j}$. Если n_{j-1}, n_j – положительны, тогда

$$t^{n_{k-1}}g_jt^{n_k} = b_1...b_pg_jb_1...b_p = \begin{cases} b_1 \circ ... \circ (b_pg_j) \circ b_1 \circ ... \circ b_p \\ b_1 \circ ... \circ b_p \circ (g_jb_1) \circ ... \circ b_p \\ b_1 \circ ... \circ b_p \circ g_j \circ b_1 \circ ... \circ b_p. \end{cases}$$

Если $n_{j-1} < 0$, $n_j > 0$, тогда

$$t^{n_{k-1}}g_jt^{n_k} = b_p^{-1}...b_1^{-1}g_jb_1...b_p = \begin{cases} b_p^{-1} \circ ... \circ b_1^{-1} \circ g_j \circ b_1 \circ ... \circ b_p \\ b_p^{-1} \circ ... \circ b_2^{-1} \circ g_j \circ b_2 \circ ... \circ b_p. \end{cases}$$

Во всех случаях множитель b_2 остается после сокращений как в степени t^{n_j}, так и в $t^{n_{j-1}}$. Если n_{j-1}, n_j – отрицательны или $n_{j-1} < 0$, $n_j > 0$, тогда берем обратный элемент к тройке и используем уже доказанное. Получаем, что $g_1t^{n_1}g_2t^{n_2}...g_kt^{n_k} \neq 1$.

Случай 2.2. $p = 2$.

Мы утверждаем, что для $j = 1, ..., k$ подслово $w_j = g_1t^{n_1}...g_jt^{n_j}$ слова w заканчивается на

$$\begin{cases} ... \circ b'_j \circ b_2, b'_j \in {}^*A_{i_1} \\ ... \circ b'_j \circ b_1^{-1}, b'_j \in {}^*A_{i_2} \end{cases} \quad \text{(на месте точек может быть пустое слово).}$$

Доказываем это утверждение индукцией по j. База индукции:

если $g_1 \in A_{i_1}$, тогда

$$w_1 = \begin{cases} (g_1b_1) \circ b_2, & n_1 = 1 \\ (g_1b_1) \circ b_2 \circ ... \circ b_1 \circ b_2, & n_1 > 1 \\ g_1 \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_1 = -1 \\ g_1 \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1} \circ ... \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_1 < -1, \end{cases}$$

если $g_1 \in A_{i_2}$, тогда

$$w_1 = \begin{cases} g_1 \circ b_1 \circ b_2, & n_1 = 1 \\ g_1 \circ b_1 \circ b_2 \circ ... \circ b_1 \circ b_2, & n_1 > 1 \\ \left(g_1b_2^{-1}\right) \circ b_1^{-1}, & n_1 = -1 \\ \left(g_1b_2^{-1}\right) \circ b_1^{-1} \circ ... \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_1 < -1, \end{cases}$$

если $g_1 \notin A_{i_1} \cup A_{i_2}$, тогда

$$w_1 = \begin{cases} g_1 \circ b_1 \circ b_2, & n_1 = 1 \\ g_1 \circ b_1 \circ b_2 \circ ... \circ b_1 \circ b_2, & n_1 > 1 \\ g_1 \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_1 = -1 \\ g_1 \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1} \circ ... \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_1 < -1. \end{cases}$$

Далее предположим, что для $i \leqslant j$ наше утверждение доказано. Рассмотрим $w_{j+1} = w_jg_{j+1}t^{n_{j+1}}$. Вначале рассмотрим случаи, когда $w_j = ... \circ b'_j \circ b_2, b'_j \in {}^*A_{i_1}$.

Если $g_{j+1} \in A_{i_1}$, тогда

$$w_{j+1} = \begin{cases} ... \circ b'_j \circ b_2 \circ (g_{j+1}b_1) \circ b_2, & n_j = 1 \\ ... \circ b'_j \circ b_2 \circ (g_{j+1}b_1) \circ b_2 \circ ... \circ b_1 \circ b_2, & n_j > 1 \\ ... \circ b'_j \circ b_2 \circ g_{j+1} \circ b_2^{-1} \circ b_1^{1}, & n_j = -1 \\ ... \circ b'_j \circ b_2 \circ g_{j+1} \circ b_2^{-1} \circ b_1^{1} \circ ... \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_j < -1, \end{cases}$$

если $g_{j+1} \in A_{i_2}$, тогда

$$w_{j+1} = \begin{cases} ... \circ b'_j \circ (b_2g_{j+1}) \circ b_1 \circ b_2, & n_j = 1 \\ ... \circ b'_j \circ (b_2g_{j+1}) \circ b_1 \circ b_2 \circ ... \circ b_1 \circ b_2, & n_j > 1 \\ ... \circ b'_j \circ g_{j+1} \circ b_1^{-1}, & n_j = -1 \\ ... \circ b'_j \circ g_{j+1} \circ b_1^{-1} \circ ... \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_j < -1, \end{cases}$$

если $g_1 \notin A_{i_1} \cup A_{i_2}$, тогда

$$w_{j+1} = \begin{cases} \ldots \circ b'_j \circ b_2 \circ g_{j+1} \circ b_1 \circ b_2, & n_j = 1 \\ \ldots \circ b'_j \circ b_2 \circ g_{j+1} \circ b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_1 \circ b_2, & n_j > 1 \\ \ldots \circ b'_j \circ b_2 \circ g_{j+1} \circ b_2^{-1} \circ b_1^1, & n_j = -1 \\ \ldots \circ b'_j \circ b_2 \circ g_{j+1} \circ b_2^{-1} \circ b_1^1 \circ \ldots \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_j < -1. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим случаи, когда $w_j = \ldots \circ b'_j \circ b_1^{-1}, b'_j \in {}^*A_{i_2}$.

Если $g_{j+1} \in A_{i_1}$, тогда

$$w_{j+1} = \begin{cases} \ldots \circ b'_j \circ g_{j+1} \circ b_2, & n_j = 1 \\ \ldots \circ b'_j \circ g_{j+1} \circ b_2 \circ \ldots \circ b_1 \circ b_2, & n_j > 1 \\ \ldots \circ b'_j \circ \left(b_1^{-1} g_{j+1}\right) \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_j = -1 \\ \ldots \circ b'_j \circ \left(b_1^{-1} g_{j+1}\right) \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1} \circ \ldots \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_j < -1, \end{cases}$$

если $g_{j+1} \in A_{i_2}$, тогда

$$w_{j+1} = \begin{cases} \ldots \circ b'_j \circ b_1^{-1} \circ g_{j+1} \circ b_1 \circ b_2, & n_j = 1 \\ \ldots \circ b'_j \circ b_1^{-1} \circ g_{j+1} \circ b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_1 \circ b_2, & n_j > 1 \\ \ldots \circ b'_j \circ b_1^{-1} \circ \left(g_{j+1} b_2^{-1}\right) \circ b_1^{-1}, & n_j = -1 \\ \ldots \circ b'_j \circ b_1^{-1} \circ \left(g_{j+1} b_2^{-1}\right) \circ b_1^{-1} \circ \ldots \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_j < -1, \end{cases}$$

если $g_1 \notin A_{i_1} \cup A_{i_2}$, тогда

$$w_{j+1} = \begin{cases} \ldots \circ b'_j \circ b_1^{-1} \circ g_{j+1} \circ b_1 \circ b_2, & n_j = 1 \\ \ldots \circ b'_j \circ b_1^{-1} \circ g_{j+1} \circ b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_1 \circ b_2, & n_j > 1 \\ \ldots \circ b'_j \circ b_1^{-1} \circ g_{j+1} \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_j = -1 \\ \ldots \circ b'_j \circ b_1^{-1} \circ g_{j+1} \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1} \circ \ldots \circ b_2^{-1} \circ b_1^{-1}, & n_j < -1. \end{cases}$$

Итак, получили, что приведенное слово w_k заканчивается на b_2 или b_1^{-1}. Отсюда следует, что $1 = w = w_k$ – пустое слово, и группа H G-изоморфна одной из групп: $G * \langle t' \rangle$ или $G * \langle t' | t'^n = 1 \rangle$, где $n \in O(G)$. Теорема доказана. ■

Теорема 5.2. *Пусть G – группа, определенная в параграфе 1, ${}^*G$ – ультрастепень по неглавному ультрафильтру, $t \in {}^*G \backslash G$ элемент конечного порядка такой, что ${}^*L(t) \notin \mathbb{Z}$. Тогда группа, порожденная группой G и элементом t, является свободным произведением $G * \langle t \rangle$.*

Доказательство. Возьмем слово $w = g_1 t^{\alpha_1} g_2 t^{\alpha_2} \ldots g_k t^{\alpha_k}$, где $g_1, \ldots, g_k \in G \backslash \{1\}$, $0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_k < o(t)$. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $w \neq 1$. По предложению 4.4 элемент t имеет вид $t = f \circ u \circ f^{-1}$, где $f \in {}^*G \backslash G$, $u \in \bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i$. Перепишем слово w в следующем виде $w = g_1 f \circ u^{\alpha_1} \circ f^{-1} g_2 f \circ u^{\alpha_2} \circ f^{-1} \ldots g_k f \circ u^{\alpha_3} \circ f^{-1}$.

Предположим, что $w = 1$, тогда в некоторой тройке $f^{-1} g_i f$ существует большое сокращение. Без уменьшения общности можно считать, что $can\left(f^{-1}, g_i f\right) \in {}^*G \backslash G$. Тогда по лемме 5.3 элемент f записывается в виде $f = v_1 \circ v_2^{\beta} \circ f'$, где $g_i = v_1 \circ v_2 * v_1^{-1}$. Отсюда утверждение теоремы следует из Леммы 5.6. ■

Теорема 5.3. *В случаях, когда элемент t не удовлетворяет условиям теоремы* 5.1 *и теоремы* 5.2, *группа $H = \langle G, t \rangle$ G-изоморфна одной из групп, записанных в теореме* 1.2, *за исключением серий* (3.1) *и* (3.2).

Доказательство. Случай теоремы 1.2, когда элемент t имеет бесконечный порядок и бесконечную длину, следует из леммы 5.5 и лемм, аналогичных леммам параграфа 6 статьи [1]. Формулировки и доказательства в нашем случае повторяются дословно. ■

Вернемся к доказательству теоремы 1.1. По теореме 2.1 все координатные группы неприводимых алгебраических множеств над группой G вкладываются в $^*G$. Поэтому для доказательства теоремы 1.1 нужно проверить, что все однопорожденные подгруппы $^*G$ являются координатными группами некоторых неприводимых алгебраических множеств.

Непосредственно из доказательства теоремы 1.2 следует, что группы типа 1.1, 2.1, 2.2 и 3.1 являются подгруппами $^*G$, а потому они являются CSA-группами и по предложению 2.6 они являются координатными группами неприводимых алгебраических множеств. Остается проверить, при выполнении каких условий группы типа 2.3 и 3.2 являются подгруппами $^*G$.

Разберем случай группы типа 2.3. Непосредственно из соотношений соответствующей координатной группы следует, что элемент t принадлежит $^*A_i$. Если A – абелева группа, то в ее ультрастепени по неглавному ультрафильтру есть элемент бесконечного порядка тогда и только тогда, когда A – неограниченная группа. Поэтому при выполнении условия, сформулированного в случае 2.3, группа типа 2.3 есть в ультрастепени, а в противном случае ее нет.

И, наконец, разберем случай групп типа 3.2. Допустим, что группа этого типа есть в ультрастепени, тогда соответствующее алгебраическое множество Y равно группе $A_i\,[n]$. Рассмотрим систему уравнений $\{[A_i, t] = t^n = 1$ над абелевой группой A_i. Ясно, что решения этой системы над группой A_i совпадают с решениями над группой G. Тогда в $^*A_i$ содержится элемент t порядка n такой, что $\langle t\rangle \cap A_i = 1$. И, следовательно, по доказательству теоремы 1.2 (случай $p = 1$) существует подгруппа типа 3.2. Если же $\alpha_n\,(A_i)$ конечно, то такого элемента в $^*A_i$ не существует, а потому и подгруппы такого типа не содержатся в $^*G$.

В заключение приведем один важный пример приводимого алгебраического множества Y над группой G, имеющий вид, определенный в параграфе 1.

Пример. Пусть $G = A_1 * A_2$, где $A_1 = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} C_3\,(i) \oplus C_5$, $C_3\,(i) = \langle a_i | a_i^3 = 1\rangle$, $i \in \mathbb{Z}$, $C_5 = \langle b | b^5\rangle$, $A_2 = \langle c\rangle$. Множество Y задаем системой $S = \{[x, b] = 1$. Оно равняется A_1, так как A_1 совпадает с централизатором в группе G любого своего неединичного элемента. Оно приводимо, так как раскладывается в объединение алгебраических множеств Y_j, являющихся классами смежности группы A_1 по подгруппе $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} C_3\,(i)$. Множество Y_j определяется системой $S_j = \begin{cases} [x, b] = 1 \\ (b^{-j}x)^3 = 1, \end{cases}$ где $j = 0, ..., 4$.

Литература

1. Chiswell I.M., Remeslennikov V N. *Equations in Free Groups with One Variable* // J. Group Theory. 2000. V.3, № 4. P. 455–466.
2. Магнус В., Каррас В., Солитэр Д. *Комбинаторная теория групп.* М.: Наука, 1974. С.455.
3. Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп.* М.: Мир, 1980. С.448.

4. Есып Е.С. *О координатных группах систем уравнений над свободными группами. I.*: Препринт № 24. Омск, 1999.
5. Есып Е.С., Ремесленников В.Н. *Уравнения от одной переменной над свободными произведениями циклических групп:* Препринт № 31. Омск: ОмГАУ, 2000. 8 с.
6. Myasnikov A.G., Remeslennikov V.N. *Exponential groups 2: Extentions of centralizers and tenzor completion of CSA-groups* // Intern. Journal of Algebra and Computation. 1996. V.6, №. 6. P.687–711.
7. Remeslennikov V.N., Baumslag G., Miasnikov A. *Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and Ideal Theory* // Journal of Algebra. 1999. № 219. P.16–79.