Математические
структуры и моделирование
2003, вып. 11, с. 39–41

УДК 530.145+621.142

РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НА ОСНОВЕ КВАНТОВОГО НЕЙРОНА

С.В. Белим, С.Ю. Белим

The two possible realizations of the quantum neuron are considered. It is shown that the most simplest realization of the quantum neuron complies with classical neuron. Will built quantum neuron allowing realize all logical operations.

Как известно, обучение формального нейрона с целью реализации логических операций сталкивается с рядом трудностей [1]. Эти проблемы связаны прежде всего с задачей отделения. Некоторые алгоритмы не удается реализовать на отдельно взятом нейроне, например логическую схему «исключающее или».

Ряд проблем снимается, если реализовать нейрон как квантовую систему. Как всякий квантовый объект, нейрон находится в неопределенном состоянии до процесса измерения. В качестве такого процесса возбуждения, переводящего нейрон в определенное состояние, можно рассматривать наличие входного сигнала на синапсах нейрона. Переход в конкретное состояние приводит к появлению определенного сигнала на выходе нейрона. До подачи входного сигнала может быть определена лишь вероятность нахождения нейрона в некотором состоянии.

Рассмотрим две возможные реализации квантового нейрона. Пусть состояние невозбужденного нейрона описывается функцией состояния:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} c_i \Psi_i, \tag{1}$$

где N – количество синапсов, c_i – весовые коэффициенты, Ψ_i – набор ортонормированных функций:

$$\int \Psi_i^* \Psi_j dV = \delta_{ij}, \tag{2}$$

δ_{ij} – символ Кронекера, Ψ_i^* – функция комплексно сопряженная Ψ_i^*.

E-mail: belim@univer.omsk.su
Омский государственный университет

Пусть x_i – сигнал, подаваемый на i-й синапс. Входной сигнал мы можем рассматривать как состояние с функцией состояния:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} x_i \Psi_i^*. \tag{3}$$

Тогда возбуждение нейрона будет определяться проекцией функции состояния нейрона на состояние входного сигнала:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{i,k=1}^{N} c_i x_k \int \Psi_i^* \Psi_k dV. \tag{4}$$

В силу ортонормированности функций получаем

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{i,k=1}^{N} c_i x_i. \tag{5}$$

Пусть y – выходной сигнал, принимающий значение нуль, если нейрон в невозбужденном состоянии, и единица, если в возбужденном. В качестве синаптической функции отклика выберем ступенчатую Θ-функцию:

$$\Theta(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu > 0; \\ 0, & \nu \leq 0, \end{cases} \tag{6}$$

то есть

$$y = \Theta(\langle \Phi | \Psi \rangle - u_0), \tag{7}$$

где u_0 – пороговое возбуждение. Нейрон не реагирует на сигналы меньше u_0 и реагирует на сигналы больше u_0.

Подстановка (5) в (7) дает:

$$y = \Theta\left(\sum_{i=1}^{N} c_i x_i - u_0\right). \tag{8}$$

Данная модель совпадает с классическим нейроном, в котором происходит линейное суммирование входных сигналов с весами. Задача обучения такого нейрона сводится к нахождению весовых коэффициентов c_i и порогового значения u_0. Однако существует ряд задач, неразрешимых в рамках такого нейрона и требующих построения персептронов.

Другой возможной реализацией квантового нейрона является рассмотрение значений входного сигнала как квантовых чисел входного состояния, на которое проектируется нейрон. Это приводит к ограничению возможных значений входного сигнала рациональным множеством чисел.

Нейрон описывается волновой функцией:

$$\Psi = \sum_{n1,...,nk} c_{n1,...,nk} \Psi(n1,...,nk). \tag{9}$$

Входному сигналу будем сопоставлять функцию состояния:

$$\Phi = \Psi(n1, ..., nk). \tag{10}$$

Соответственно выходной сигнал формируется с помощью функции отклика:

$$y = \Theta(\langle\Phi|\Psi\rangle - u_0). \tag{11}$$

Обучение такого нейрона также сводится к выбору значений коэффициентов $c_{n1,...,nk}$ и порога возбуждения u_0.

Рассмотрим реализацию логической операции «исключающее ИЛИ», невозможную в рамках классического нейрона. Пусть нейрон имеет два синаптических входа, то есть входной вектор $X = (x_1, x_2)$, $x_i = 0, 1$. Потребуем, чтобы выходной сигнал был нулевым ($y = 0$), если $X = (0, 0)$ или $X = (1, 1)$, и единичным ($y = 1$), если $X = (1, 0)$ или $X = (0, 1)$.

В качестве ортонормированного базиса выберем собственные функции системы двух частиц со спином $1/2$ каждая. Проекция спина каждой частицы может принимать значения $+1/2$ и $-1/2$. Функция состояния нейрона с учетом принципа неразличимости частиц может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \Psi &= 0 \cdot \Psi_1(1/2)\Psi_2(1/2) + 0 \cdot \Psi_1(-1/2)\Psi_2(-1/2) + \\ &+ 1 \cdot \Psi_1(1/2)\Psi_2(-1/2) + 1 \cdot \Psi_1(-1/2)\Psi_2(1/2). \end{aligned} \tag{12}$$

Входной сигнал будем формировать следующим образом:

$$\Phi = \Psi_1(x_1 - 1/2)\Psi_2(x_2 - 1/2). \tag{13}$$

Выходной сигнал будем формировать с помощью все той же ступенчатой функции:

$$y = \Theta(\langle\Phi|\Psi\rangle - 1/2). \tag{14}$$

Используя условие нормировки

$$\int \Psi^*_{i1}(s_{i2})\Psi_{j1}(s_{j2})dV = \delta_{i1j1}\delta_{i2j2}, \tag{15}$$

получаем нейрон с искомыми свойствами.

Таким образом, квантовый нейрон первого типа эквивалентен классическому нейрону. Квантовый же нейрон второго типа позволяет реализовать все элементарные логические функции.

Литература

1. Горбань А.Н., Дунин-Барковский В.Л., Кирдин А.Н. и др. *Нейроинформатика.* Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН. 1998. 296с.