Математические структуры и моделирование
2003, вып. 11, с. 97–101

УДК 536.763/764

КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ТРЕХМЕРНЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМ С ЭФФЕКТАМИ ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ

С.В. Белим

The renormalization-group method is applied to analysis of dynamic of critical behavior in three-dimensional Ising systems with long-range effect.

Как показано в [1], эффекты дальнодействия оказывают существенное влияние на критическое поведение изинговских систем. Ренормгрупповой подход к описанию спиновых систем с эффектами дальнодействия, проведенный в [2] непосредственно для трехмерных систем, позволил получить значения статических критических индексов в двухпетлевом приближении. Однако подобные расчеты отсутствуют при описании критической динамики данных систем.

В предлагаемой работе осуществляется теоретико-полевое описание критической динамики однородных спиновых систем с эффектами дальнодействия непосредственно при $D = 3$ в двухпетлевом приближении. Рассматриваемая модель представляет собой классическую спиновую систему с обменным интегралом, зависящим от расстояния между спинами, описываемую гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{ij} J(|r_i - r_j|) S_i S_j, \tag{1}$$

где S_i – спиновая переменная; $J(|r_i - r_j|)$ - интегралы обменного взаимодействия. Данная модель термодинамически эквивалентна $O(n)$ – симметричной модели Гинзбурга-Ландау- Вильсона, определяемой эффективным гамильтонианом

$$H = \int d^D q \Big\{ \frac{1}{2}(\tau_0 + q^a)\varphi^2 + u_0 \varphi^4 \Big\}, \tag{2}$$

где φ – флуктуации параметра порядка, D – размерность пространства, $\tau_0 \sim |T - T_c|$, T_c – критическая температура, u_0 - положительная константа. Критическое поведение существенно зависит от параметра a, задающего скорость убывания взаимодействия с расстоянием. Как показано в работе [1], влияние эффектов дальнодействия существенно при $0 < a < 2$, а при $a \geq 2$ критическое поведение эквивалентно короткодействующим системам. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся случаем $0 < a < 2$.

E-mail: belim@univer.omsk.su
Омский государственный университет

Динамическое поведение спиновых систем в релаксационном режиме вблизи критической температуры может быть описано кинетическим уравнением для параметра порядка типа уравнения Ланжевена:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\lambda_0 \frac{\delta H}{\delta\varphi} + \eta + \lambda_0 \mathbf{h}, \tag{3}$$

где λ_0 – кинетический коэффициент, $\eta(x,t)$ – гауссова случайная сила, характеризующая влияние теплового резервуара и задаваемая функцией распределения

$$P_\eta = A_\eta \exp\left[-(4\lambda_0)^{-1} \int d^d x\, dt\, \eta^2(x,t)\right] \tag{4}$$

с нормировочной константой A_η, $\mathbf{h}(t)$ – внешнее поле, термодинамически сопряженное параметру порядка. Временная корреляционная функция $G(x,t)$ параметра порядка определяется путем решения уравнения (3) с $H[\varphi]$, задаваемым (2), относительно $\varphi[\eta,\mathbf{h}]$ с последующим усреднением по гауссовской случайной силе η с помощью P_η и выделением линейной по $\mathbf{h}(0)$ части решения, т.е.

$$G(x,t) = \frac{\delta}{\delta\mathbf{h}(0)} [\langle\varphi(x,t)\rangle]|_{h=0}, \tag{5}$$

где

$$[\langle\varphi(x,t)\rangle] = B^{-1} \int D\{\eta\} \varphi(x,t) P_\eta, \tag{6}$$

$$B = \int D\{\eta\} P_\eta. \tag{7}$$

При применении стандартной ренормгрупповой техники к данной динамической модели приходится сталкиваться со значительными трудностями. Однако для однородных систем в отсутствие эффектов дальнодействия было показано [6], что при описании критической динамики модель, основанная на уравнении типа Ланжевена, полностью эквивалентна стандартной лагранжевой системе [7] с лагранжианом

$$L = \int d^d x\, dt \left\{ \lambda_0^{-1} \varphi^2 + i\varphi^* \left(\lambda_0^{-1} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\delta H}{\delta\varphi} \right) \right\}, \tag{8}$$

где введено вспомогательное поле φ^*. При этом корреляционная функция $G(x,t)$ параметра порядка для однородной системы определяется как

$$G(x,t) \;\; = \;\; \langle\varphi(0,0)\varphi(x,t)\rangle = \Omega^{-1} \int D\{\varphi\} D\{\varphi^*\} \varphi(0,0) \varphi(x,t) \exp(-L[\varphi,\varphi^*]),$$

где

$$\Omega = \int D\{\varphi\} D\{\varphi^*\} \exp(-L[\varphi,\varphi^*]). \tag{9}$$

Вместо корреляционной функции удобнее рассматривать ее вершинную часть, которую можно представить в формализме фейнмановских диаграмм в двухпетлевом приближении в виде

$$\Gamma^{(2)}(k,\omega;\tau_0,u_0,\lambda_0)=\tau_0+k^a-\frac{i\omega}{\lambda_0}-96{u_0}^2D_0, \tag{10}$$

$$D_0=\frac{3}{4}\int\frac{d^Dqd^Dp}{(1+|\vec{q}|^a)(1+|\vec{p}|^a)(3+|\vec{q}|^a+|\vec{p}|^a+|\vec{p}+\vec{q}|^a-i\omega/\lambda)}.$$

Следующим шагом в теоретико-полевом подходе является определение скейлинговых функций β, γ_τ, γ_φ и γ_λ, задающих дифференциальное уравнение ренормгруппы для вершинных функций:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial u}-\gamma_\tau\tau\frac{\partial}{\partial\tau}+\gamma_\lambda\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}-\frac{m}{2}\gamma_\varphi\right]\times\Gamma^{(m)}(k,\omega;\tau,u,\lambda,\mu)=0, \tag{11}$$

где масштабный параметр μ вводится для обезразмеривания величин.

Для дальнейшего обсуждения динамического поведения нам потребуется только функция β и динамическая скейлинговая функция γ_λ.

Явный вид функций β в двухпетлевом приближении был получен в работе [2]:

$$\begin{aligned}
\beta &= -(4-D)\Big[1-36uJ_0+1728\Big(2J_1-J_0^2-\frac{2}{9}G\Big)u^2)\Big],\\
J_1 &= \int\frac{d^Dqd^Dp}{(1+|\vec{q}|^a)^2(1+|\vec{p}|^a)(1+|q^2+p^2+2\vec{p}\vec{q}|^{a/2})},\\
J_0 &= \int\frac{d^Dq}{(1+|\vec{q}|^a)^2},\\
G &= -\frac{\partial}{\partial|\vec{k}|^a}\int\frac{d^Dqd^Dp}{(1+|q^2+k^2+2\vec{k}\vec{q}|^{a/2})(1+|\vec{p}|^a)(1+|q^2+p^2+2\vec{p}\vec{q}|^{a/2})}.
\end{aligned}$$

Вычисления функции γ_λ в двухпетлевом приближении дали:

$$\gamma_\lambda=(4-D)2(D'-G)u^2, \tag{12}$$

$$D'=\frac{\partial D_0}{\partial(-i\omega/\lambda)}|_{k=0,\omega=0}.$$

Переопределим эффективную вершину взаимодействия:

$$v=\frac{u}{J_0}. \tag{13}$$

В результате приходим к следующему выражению для функций β, и γ_λ:

$$\begin{aligned}
\beta &= -(4-D)\Big[1-36v+1728\Big(2\widetilde{J}_1-1-\frac{2}{9}\widetilde{G}\Big)v^2)\Big],\\
\gamma_\lambda &= (4-D)96(\widetilde{D}-\widetilde{G})v^2,\\
\widetilde{J}_1 &= \frac{J_1}{J_0^2}\quad \widetilde{G}=\frac{G}{J_0^2}\quad \widetilde{D}=\frac{D'}{J_0^2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Такое переопределение приобретает смысл при значениях $a \leq D/2$. При этом J_0, J_1, G и D' становятся расходящимися функциями. Вводя же параметр обрезания Λ и рассматривая предел отношений

$$\begin{aligned}
\frac{J_1}{J_0^2} &= \frac{\int_0^\Lambda \int_0^\Lambda d^Dqd^Dp/((1+|\vec{q}|^a)^2(1+|\vec{p}|^a)(1+|q^2+p^2+2\vec{p}\vec{q}|^a))}{\left[\int_0^\Lambda d^Dq/(1+|\vec{q}|^a)^2\right]^2}, \qquad (15)\\
\frac{G}{J_0^2} &= \frac{-\partial/(\partial|\vec{k}|^a)\int_0^\Lambda \int_0^\Lambda d^Dqd^Dp/((1+|q^2+k^2+2\vec{k}\vec{q}|^a)(1+|\vec{p}|^a)(1+|q^2+p^2+2\vec{p}\vec{q}|^a))}{\left[\int_0^\Lambda d^Dq/(1+|\vec{q}|^a)^2\right]^2},\\
\frac{D'}{J_0^2} &= \frac{3/4\int d^Dqd^Dp/((1+|\vec{q}|^a)(1+|\vec{p}|^a)(3+|\vec{q}|^a+|\vec{p}|^a+|\vec{p}+\vec{q}|^a)^2)}{\left[\int_0^\Lambda d^Dq/(1+|\vec{q}|^a)^2\right]^2},
\end{aligned}$$

при $\Lambda \to \infty$ получаем конечные выражения.

Значения интегралов находилось численно. Для случая $a \leq D/2$ строилась последовательность значений J_1/J_0^2 и G/J_0^2 при различных значениях Λ и апроксимировалась на бесконечность.

Режим критического поведения полностью определяется устойчивыми неподвижными точками ренормгруппового преобразования, которые могут быть найдены из условия равенства нулю β-функций:

$$\beta(v^*) = 0. \qquad (16)$$

Значения эффективных вершин взаимодействия для устойчивых фиксированных точек ренормгруппового преобразования были получены в работе [2].

Подстановка величин эффективных зарядов в фиксированной точке в скейлинговую функцию γ_λ позволяет определить динамический критический индекс z, характеризующий критическое замедление процессов релаксации,

$$z = 2 + \gamma_\lambda. \qquad (17)$$

Устойчивые фиксированные точки ренормгруппового преобразования, и значения динамического критического индекса для значений параметра $1,5 \leq a \leq 1,9$ приведены в таблице. Для значений параметра $0 < a < 1,5$ существует только гауссова фиксированная точка $v^* = 0$, не являющаяся устойчивой.

Сопоставление полученных результатов со значением динамического критического индекса для трехмерных систем с короткодействием [6] $z = 2,017$ показывает значительное влияние эффектов дальнодействия на критическую динамику спиновых систем, выражающееся в увеличении времени релаксации системы ($t \sim |T-T_c|^{\nu z}$, где ν - критический индекс, характеризующий рост радиуса корреляции). Для критической динамики трехмерных систем с дальнодействием, как и для статического поведения [2], наблюдается приближение к гауссовому режиму при уменьшении параметра дальнодействия a. При значениях $a \leq 1,8$ критическое поведение практически неотличимо от гауссова.

Значения фиксированных точек и динамического критического индекса для трехмерных систем.

a	v^*	z
1,5	0,015151	2,006628
1,6	0,015974	2,001529
1,7	0,020485	2,000777
1,8	0,023230	2,000180
1,9	0,042067	2,000072

Литература

1. Luijten E., Mebingfeld H. //*Phys. Rev. Lett.*B. 2001. V.6. P.5305.
2. С.В. Белим, //*Письма в ЖЭТФ*.2003. Т.77. В.2. 2003. С.118.
3. Fisher M. E., Ma S.-k., Nickel B.G. //*Phys. Rev. Lett.* 1972. V.29. P.917.
4. De Dominicis C., //*Nuovo Cimento Lett.*1975. V.12. P.567.
5. Brezin E., et.al., //*Phys.Rev.* D. 1973. V.8. P.434.
6. Прудников В.В., Белим С.В., Иванов А.В., Осинцев Е.В., Федоренко А.А. //*ЖЭТФ*. 1998. Т.114. В.3. С.972.