Математические структуры и моделирование
2003, вып. 11, с. 21–27

УДК 515.122:515.126.2

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЕКВЕНЦИАЛЬНОГО ЗАМЫКАНИЯ

А.А. Чемёркин

In this paper it is proved that the operation of sequential closure generates some topology on a set. Properties of this topology are considered.

Пусть (X,τ) — топологическое пространство. Замыкание множества $A \subset X$ в топологии τ будем обозначать $\operatorname{cl} A$ (или при необходимости $\operatorname{cl}_\tau A$).

Определение 1. Подмножество A топологического пространства (X,τ) называется секвенциально замкнутым, если оно содержит предел каждой своей сходящейся последовательности. Наименьшее секвенциально замкнутое множество, содержащее множество A, называется его секвенциальным замыканием и обозначается $\operatorname{scl} A$.

Приведем основные свойства секвенциального замыкания в следующей лемме (см., например, [1, с.4], [2, с.14]).

Лемма 1. *Для любых* A, $B \subset X$ *верно*
1. $\operatorname{scl} \varnothing = \varnothing$
2. $A \subset \operatorname{scl} A \subset \operatorname{cl} A$
3. A *секвенциально замкнуто* $\Leftrightarrow$ $A = \operatorname{scl} A$
4. $\operatorname{scl}(\operatorname{scl} A) = \operatorname{scl} A$
5. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{scl} A \subset \operatorname{scl} B$
6. $\operatorname{scl}(A \cup B) = \operatorname{scl} A \cup \operatorname{scl} B$
7. $\operatorname{scl}(A \cap B) \subset \operatorname{scl} A \cap \operatorname{scl} B$.

Из леммы 1 следует, что оператор, который каждому подмножеству X сопоставляет его секвенциальное замыкание, является оператором Куратовского, следовательно, на X существует единственная топология, операция замыкания в которой совпадает с операцией секвенциального замыкания в исходной топологии τ (см. [3, с.68]). Эту топологию будем называть *секвенциальной топологией, ассоциированной с* τ, и обозначим $s\tau$. Замкнутые множества в топологии $s\tau$ — это множества, секвенциально замкнутые в τ, и для каждого $A \subset X$ $\operatorname{scl}_\tau A = \operatorname{cl}_{s\tau} A$.

E-mail: archem-math@mail.ru
Омский государственный университет

Предложение 1. *Множество $A \subset X$ открыто в топологии $s\tau$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, x \in A\ ,\ \forall\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X\ (\ x_n \to x\ \textit{в}\ \tau \Rightarrow\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0\ x_n \in A).$$

Доказательство. Необходимость.
Пусть A открыто в $s\tau$, тогда $A = X \setminus B$, где B секвенциально замкнуто в τ. Допустим, что существуют $x \in A$ и последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, для которых утверждение предложения не выполнено, то есть

$$x_n \to x\ \text{ в }\ \tau\ \text{ и }\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \ \exists\, n_k \geq k\ :\ x_{n_k} \in B.$$

Очевидно, что каждое из чисел n_k $(k \in \mathbb{N})$ можно выбирать так, что $n_{k+1} \geq n_k$, то есть найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, лежащая в B. Так как $x_n \to x$ в топологии τ, то $x_{n_k} \to x$ в τ и $x \in B$, поскольку B секвенциально замкнуто в τ. Получили противоречие с тем, что $x \in A$.
Достаточность.
Если предположить, что $B = X \setminus A$ не является секвенциально замкнутым в топологии τ, то существует последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, сходящаяся в τ к некоторому элементу $x \in A$. Тогда найдется номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $x_n \in A$. Получили противоречие. ∎

Предложение 2.
1. Топология $s\tau$ мажорирует топологию τ.
2. Сходящиеся последовательности в топологиях τ и $s\tau$ одни и те же.
3. Если на множестве X заданы две топологии τ и σ, сходящиеся последовательности в которых одни и те же, то $s\tau = s\sigma$. В частности, секвенциальная топология, ассоциированная с топологией $s\tau$, совпадает с ней.

Доказательство.
1. Утверждение непосредственно следует из того, что замкнутое множество является секвенциально замкнутым.

2. Так как $s\tau \succeq \tau$, то последовательность, сходящаяся в $s\tau$, сходится и в τ. Покажем обратное. Пусть $x_n \to x$ в τ и $V \in \mathrm{Op}(X, s\tau)$ — окрестность точки x в $s\tau$. Тогда по предложению 1 существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для каждого $n \geq n_0$ $x_n \in V$, следовательно, $x_n \to x$ в $s\tau$.

3. Следствие утверждения 2 и предложения 1. ∎

Определение 2. Топологическое пространство (X, τ) будем называть секвенциальным, если топологии τ и $s\tau$ совпадают (см. также [4, с.94]).

Класс секвенциальных пространств достаточно широк. Например, любое топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности (тем более полуметризуемое пространство), является секвенциальным (см. [3, с.105]). Однако наличие первой аксиомы счетности не является необходимым условием для секвенциальности пространства (см. [4, с.95]). Используя [5, с.204], получаем следующий простой пример несеквенциального пространства.

Пример 1. Рассмотрим несчетное множество X (например множество вещественных чисел $\mathbb{R}$) и две топологии τ и σ на нем. Топологию τ возьмем дискретной, открытыми множествами в топологии σ назовем X, $\varnothing$ и дополнения до конечных или счетных подмножеств множества X. Легко видеть, что последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к элементу $x \in X$ в топологии σ тогда и только тогда, когда найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для каждого $n \geq n_0$ $x_n = x$, то есть сходящиеся последовательности в топологиях τ и σ одни и те же. Тогда $s\tau = s\sigma$ (см. утверждение 3 предложения 2), причем $s\tau = \tau$ (так как $s\tau \succeq \tau$ и τ является дискретной топологией). То есть $s\sigma$ — дискретная топология и, следовательно, $s\sigma \neq \sigma$.

Пусть $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X. Определим оператор $S : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ по следующему правилу

$$S(A) = \{x \in X \mid \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : x_n \to x \text{ в } \tau\}, \text{ где } A \subset X.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ положим $S^{n+1}(A) = S(S^n(A))$.

Предложение 3.
1. Для каждого подмножества $A \subset X$ верно $A \subset S(A)$.
2. Если $A \subset B$ и B секвенциально замкнуто, то для любого $n \in \mathbb{N}$ $S^n(A) \subset B$.
3. Пусть $\{(X_j, \tau_j) \mid j \in J\}$ — семейство топологических пространств и на $\prod\limits_{j\in J} X_j$ задана топология произведения, тогда $S(\prod\limits_{j\in J} A_j) = \prod\limits_{j\in J} S(A_j)$, где $A_j \subset X_j$.

Доказательство.

1. Если $x \in A$, то последовательность $x_n = x$ $(n \in \mathbb{N})$ сходится к x и, следовательно, $x \in S(A)$.

2. Доказательство проведем индукцией по $n \in \mathbb{N}$. Пусть $n = 1$ и $x \in S(A)$, тогда найдется последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \subset B$, которая сходится к x в топологии τ, откуда получаем, что $x \in B$, так как B секвенциально замкнуто, то есть $S(A) \subset B$. Пусть далее $S^n(A) \subset B$, проводя аналогичные рассуждения, как и для $n = 1$, получаем, что $S^{n+1}(A) \subset B$.

3. Через P_i $(i \in J)$ обозначим операторы проектирования $\prod\limits_{j\in J} X_j$ на X_i. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \prod\limits_{j\in J} X_j$ сходится в топологии произведения к элементу $x \in \prod\limits_{j\in J} X_j$ тогда и только тогда, когда для любого $i \in J$ $P_i(x_n) \to P_i(x)$ в топологии τ_i (см., например, [3, с.129]), откуда и получаем требуемое равенство. ■

Из утверждения 2 следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $S^n(A) \subset \operatorname{scl} A$. В следующем примере показано, что для любого $n \in \mathbb{N}$ можно указать топологическое пространство X и его подмножество A, для которого $S^n(A) = \operatorname{scl} A$, так же построено пространство X и множество $B \subset X$ такое, что $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S^n(B) \neq \operatorname{scl} B$.

Пример 2. Рассмотрим множество $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем. Множества вида

$$V_\mu = \{x \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}) \mid \forall\, t \in \mathbb{R}\ \ |x(t)| \leq \mu(t)\}\,, \text{ где } \mu \in \mathrm{C}(\mathbb{R}),\ \ \mu > 0$$

образуют базу окрестностей нуля (функции, тождественно равной нулю) некоторой линейной топологии τ на $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ сходится в топологии τ к функции $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:
1. Существует компакт K в $\mathbb{R}$ такой, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно включение $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$.
2. На компакте K последовательность φ_n сходится к φ равномерно.
Действительно, пусть последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к нулю в смысле условий 1, 2. Возьмем базисную окрестность нуля в топологии τ V_μ и положим $\alpha = \min\limits_{t\in K}\mu(t)$, где K — компакт из условия 1, тогда $\alpha > 0$ в силу теоремы Вейерштрасса. Из условия 2 следует, что найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n \geq n_0$, для любого $t \in \mathbb{R}$ $|\varphi_n(t)| < \alpha$, то есть $\varphi_n \in V_\mu$, и, следовательно, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к нулю в топологии τ.

Пусть теперь последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к нулю в топологии τ. Тогда φ_n сходится к нулю равномерно на $\mathbb{R}$ (для доказательства этого достаточно в качестве функций μ из определения базисных окрестностей нуля брать сколь угодно малые постоянные). То есть нужно показать только выполнение условия 1. Предположим, что $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{supp}\varphi_n$ не ограничено сверху (случай неограниченности снизу рассматривается аналогично), тогда можно найти такие возрастающие последовательности $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ и $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, что $\varphi_{n_k}(t_k) \neq 0$. Положим $\mu(t_k) = \frac{|\varphi_{n_k}(t_k)|}{2}$ $(k \in \mathbb{N})$, $\mu(t) = \mu(t_1)$ при $t \leq t_1$, и на каждом из промежутков $[t_k, t_{k+1}]$ определим функцию μ как отрезок прямой, соединяющей точки $(t_k, \mu(t_k))$ и $(t_{k+1}, \mu(t_{k+1}))$ на плоскости. Таким образом, $\mu \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ и $\mu > 0$, то есть V_μ — окрестность нуля в топологии τ. Тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n \geq n_0$ $\varphi_n \in V_\mu$. Однако

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, k \in \mathbb{N}\ :\ n_k \geq n \ \text{ и } \ |\varphi_{n_k}(t_k)| > \mu(t_k).$$

Полученное противоречие показывает, что $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{supp}\varphi_n$ ограничено сверху.

Таким образом, сходимость последовательности $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ к нулю в топологии τ равносильна сходимости ее к нулю в смысле условий 1, 2. Осталось лишь заметить, что φ_n сходится к φ (как в τ, так и в смысле условий 1, 2) тогда и только тогда, когда $\varphi_n - \varphi$ сходится к нулю.

Далее зафиксируем функцию $\varphi_0 \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ такую, что $\varphi_0 \geq 0$ и $\varphi_0 \neq 0$ тождественно. Определим функции $\varphi_m(t) = \varphi_0(\frac{t}{m})$ $(m \in \mathbb{N})$ и, используя идею О.Г. Смолянова [6, с.15], рассмотрим множество

$$A_1 = \left\{\frac{\varphi_0}{m} + \frac{\varphi_m}{k} \mid m \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Покажем, что $S(A_1) \subsetneq S^2(A_1) = \operatorname{scl} A_1$.

Рассмотрим последовательность функций $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A_1$, она определяется двумя последовательностями натуральных чисел $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ таких, что $\psi_n = \dfrac{\varphi_0}{m_n} + \dfrac{\varphi_{m_n}}{k_n}$. Если последовательность $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не ограничена, то носители ψ_n не могут лежать в одном компакте (если $\varphi_0 \neq 0$ в точке $a \in \mathbb{R}$, то $\varphi_m \neq 0$ в точке ma и $\psi_n(m_n a) \neq 0$). То есть, если ψ_n сходится в τ, то m_n ограничена. Далее, если k_n ограничена, то возможна сходимость лишь к элементу из A, если же k_n не ограничена, то ψ_n может сходиться только к функции вида $\dfrac{\varphi_0}{p}$ $(p \in \mathbb{N})$. Таким образом,

$$S(A_1) = A_1 \cup \left\{ \frac{\varphi_0}{p} \,|\, p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Причем функция $\phi \equiv 0$ не принадлежит $S(A_1)$, однако $\phi \in S^2(A_1)$, так как последовательность $\dfrac{\varphi_0}{p}$ сходится в топологии τ к ϕ при $p \to \infty$. Легко видеть, что $S^2(A_1) = S(A_1) \cup \{\phi\}$ и $S^2(A_1) = \operatorname{scl} A_1$, потому что $S^2(A_1)$ содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей.

Далее определим функции $\varphi_{mn}(t) = \varphi_0\left(\frac{t}{m+n}\right)$ $(m,\, n \in \mathbb{N})$ и зададим множество

$$A_2 = \left\{ \frac{\varphi_0}{m} + \frac{\varphi_m}{n} + \frac{\varphi_{mn}}{k} \,|\, m \in \mathbb{N},\; n \in \mathbb{N}\; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что

$$S(A_2) = A_2 \cup \left\{ \frac{\varphi_0}{m} + \frac{\varphi_m}{n} \,|\, m \in \mathbb{N},\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

И далее

$$S^2(A_2) = S(A_2) \cup \left\{ \frac{\varphi_0}{p} \,|\, p \in \mathbb{N} \right\}.$$

То есть $\phi \in S^3(A_2) \setminus S^2(A_2)$ и $S^3(A_2) = S^2(A_2) \cup \{\phi\} = \operatorname{scl} A_2$. Определяя $\varphi_{k_1\ldots k_n}(t) = \varphi_0\left(\dfrac{t}{k_1 + \ldots + k_n}\right)$, продолжаем строить множества A_n, причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\phi \in S^{n+1}(A_n) \setminus S^n(A_n)$ и $S^{n+1}(A_n) = S^n(A_n) \cup \{\phi\} = \operatorname{scl} A_n$.

Теперь определим пространство $X = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, где $X_n = \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ $(\mathrm{n} \in \mathbb{N})$, причем на X зададим топологию произведения. Рассмотрим подмножество $B = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ пространства X. Для $k \in \mathbb{N}$ имеем $S^k(B) = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} S^k(A_n)$ (см. предложение 3). Так как $\phi \in S^{k+1}(A_k) \setminus S^k(A_k)$, то $S^k(B) \subsetneq S^{k+1}(B)$, следовательно, ни одно из множеств $S^k(B)$ $(k \in \mathbb{N})$ не является секвенциально замкнутым, то есть не может совпадать с секвенциальным замыканием B. Более того, множество $C = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S^n(B)$ также не совпадает с $\operatorname{scl} B$. Действительно, рассмотрим последовательность $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$, где $\Psi_n = (\phi, \ldots, \phi, \rho_{n+1}, \rho_{n+2}, \ldots)$, причем функция ϕ стоит на первых n местах, а на остальных стоят произвольные функции ρ_m из соответствующих множеств A_m. Тогда Ψ_n сходится к $\Psi = (\phi, \phi, \ldots)$ в топологии произведения, однако Ψ не принадлежит C.

Далее наряду с X в тексте будет фигурировать еще одно топологическое пространство Y. Топологии, заданные на X и Y, будем обозначать τ_1 и τ_2, а через $s\tau_1$, $s\tau_2$ обозначим секвенциальные топологии, ассоциированные с τ_1 и τ_2, соответственно.

Предложение 4.
1. Секвенциально непрерывное отображение (X,τ_1) в (Y,τ_2) является непрерывным отображением $(X,s\tau_1)$ в $(Y,s\tau_2)$, верно и обратное.
2. Топологии τ_1 и $s\tau_1$ совпадают тогда и только тогда, когда каждое секвенциально непрерывное отображение (X,τ_1) в любое пространство (Y,τ_2) непрерывно.

Доказательство.
1. Секвенциально непрерывное отображение (X,τ_1) в (Y,τ_2) обозначим через f. Для доказательства непрерывности f покажем, что прообраз открытого множества открыт. Рассмотрим $V \in \mathrm{Op}(Y,s\tau_2)$, покажем, что $f^{-1}(V) \in \mathrm{Op}(X,s\tau_1)$. Воспользуемся критерием открытости в топологии $s\tau_1$ (см. предложение 1). Пусть $x \in f^{-1}(V)$ и последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к x в топологии τ_1, тогда $f(x_n) \to f(x)$ в τ_2 (так как f — секвенциально непрерывно). Так как $f(x) \in V$ и V открыто в топологии $s\tau_2$, то по предложению 1 существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такой что для каждого $n \geq n_0$ $f(x_n) \in V$, следовательно, $x_n \in f^{-1}(V)$, откуда имеем $f^{-1}(V) \in \mathrm{Op}(X,s\tau_1)$.
Покажем обратное. Пусть f является непрерывным отображением $(X,s\tau_1)$ в $(Y,s\tau_2)$ и последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в топологии τ_1 к элементу $x \in X$. По утверждению 2 предложения 2 $x_n \to x$ в $s\tau_1$. Тогда $f(x_n) \to f(x)$ в топологии $s\tau_2$, откуда по тому же утверждению получаем, что $f(x_n) \to f(x)$ в τ_2. Следовательно, отображение $f : (X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ секвенциально непрерывно.

2. Необходимость. Если f — секвенциально непрерывное отображение (X,τ_1) в (Y,τ_2), то по утверждению 1 f непрерывно отображает (X,τ_1) в $(Y,s\tau_2)$. Пусть $V \subset Y$ — открытое множество в топологии τ_2, так как $s\tau_2 \succeq \tau_2$, то V открыто и в $s\tau_2$, следовательно, $f^{-1}(V)$ открыто в τ_1. Таким образом, f является непрерывным отображением (X,τ_1) в (Y,τ_2).
Достаточность. Нужно лишь показать, что $\tau_1 \succeq s\tau_1$, так как топология $s\tau_1$ всегда мажорирует топологию τ_1. Тождественное отображение I из (X,τ_1) в $(X,s\tau_1)$ секвенциально непрерывно (см. утверждение 2 предложения 2), следовательно, непрерывно. Пусть множество V открыто в $s\tau_1$, прообраз $I^{-1}(V)$ открыт в τ_1, причем $I^{-1}(V) = V$, откуда получаем $\tau_1 \succeq s\tau_1$. ■

Теорема 1. *Отображение f топологического пространства (X,τ_1) в топологическое пространство (Y,τ_2) секвенциально непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого подмножества A в X $f(\mathrm{scl}_{\tau_1} A) \subset \mathrm{scl}_{\tau_2} f(A)$.*

Доказательство. Так как $\mathrm{scl}_{\tau_1} A = \mathrm{cl}_{s\tau_1} A$ и $\mathrm{scl}_{\tau_2} f(A) = \mathrm{cl}_{s\tau_2} f(A)$, то приведенное выше включение равносильно следующему: $f(\mathrm{cl}_{s\tau_1} A) \subset \mathrm{cl}_{s\tau_2} f(A)$, которое в свою очередь выполнено в том и только в том случае, когда f непрерывно как отображение $(X,s\tau_1)$ в $(Y,s\tau_2)$ (см. [3, с.122]), после этого замечания теорема становится непосредственным следствием утверждения 1 предложения 4. ■

Уже в процессе подготовки статьи к печати выяснилось, что справедливость того, что прообраз секвенциально замкнутого множества при секвенциально непрерывном отображении секвенциально замкнут, а также необходимость утверждения теоремы 1 была установлена Е.В. Мельниковым в 1992 году.

Литература

1. Мельников Е.В. *Векторнозначные распределения и обобщенная корректность абстрактной задачи Коши.* / Омский гос. ун-т. Омск, 1988. Деп. ВИНИТИ 15.03.1988. №1994 – B88. 79 с.
2. Мельников Е.В. *Топологические векторные пространства.* Методические указания. Омск: ОмГУ, 1990. 43 с.
3. Келли Дж.Л. *Общая топология.* М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1968. 384 с.
4. Энгелькинг Р. *Общая топология.* М.: Мир, 1986. 752 с.
5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе.* М.: Мир, 1967. 250 с.
6. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс.* М.: Наука, 1965. 328 с.