Математические структуры и моделирование
2003, вып. 11, с. 10–14

УДК 62.501.12

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Т. Когут

In this article a modification of Newton's method for solution of nonlinear equation is reviewed. The Newton's method may be derived by decomposition of nonlinear smooth functions in linear section of Taylor's series taking into account only the first derivative. It is offered a linear approximation, based on Taylor's series and including second-order derivative. Both forms of linearization were received by means of which the recurrence procedures, that use classical Newton's method, were designed. Convergence of worked out algorithms was examined and the cubic speed was obtained.

Введение

Простейший итерационный метод решения нелинейных уравнений содержит значения самой функции, метод Ньютона – первую производную и обладает уже квадратичной скоростью сходимости. Существуют итерационные методы высших порядков, которые содержат вторые и более высокие производные [1]. В работе предлагается один из возможных подходов к получению рекуррентных процедур второго порядка путем построения линейных аппроксимаций, основанных на разложении нелинейной функции в ряд Тейлора и учитывающих вторые производные.

1. Построение алгоритмов

Рассмотрим определение на интервале $[a, b]$ корня x^* нелинейного уравнения

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция.

Для численного решения уравнения (1) часто применяется метод Ньютона, представляющий собой рекуррентную процедуру [1]:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{2}$$

Омский государственный университет путей сообщения

и его модификацию

$$x_{k+1} = x_k - h_{k+1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{3}$$

где h_{k+1} – в общем случае переменный шаг, вводимый для ускорения сходимости.

Формула (3) может быть получена из разложения $f(x_{k+1})$ в ряд Тейлора вида

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)\Delta x + O(\Delta x^2). \tag{4}$$

В выражении (4) разность

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k. \tag{5}$$

Для получения явных вычислительных схем допустим,что

$$f(x_{k+1}) = 0. \tag{6}$$

Отбрасывая слагаемое $O(\Delta x^2)$ с учетом формул (5)и (6), получим рекуррентную процедуру (3).

В разложении (4) учитывается только первая производная. Рассмотрим приближение $f(x_{k+1})$ квадратичным многочленом Тейлора следующего вида:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_k)\Delta x \cdot \Delta x. \tag{7}$$

Заменим в (7) одну из разностей Δx на некоторую известную величину δ_{k+1}, тогда одним из возможных представлений приближения для $f(x_{k+1})$ является

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_k)\delta_{k+1} \cdot \Delta x$$

или

$$[f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)\delta_{k+1}]\Delta x = f(x_{k+1}) - f(x_k).$$

Применяя последовательно формулы (6) и (7), получим

$$x_{k+1} = x_k - h_{k+1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)\delta_{k+1}}. \tag{8}$$

Заменив в (7) произведение $\Delta x \cdot \Delta x$ на δ_{k+1}^2, можно получить для $f(x_{k+1})$ другое приближение

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_k)\delta_{k+1}^2.$$

Выполняя аналогичные преобразования, запишем

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h_{k+1}f(x_k) - \frac{1}{2}f''(x_k)\delta_{k+1}^2}{f'(x_k)}. \tag{9}$$

Как показано в работе [2], третья возможная форма аппроксимации является неработоспособной.

На основании формул (8) и (9) можно получить вычислительный алгоритм только в том случае, если известен или задан способ определения разности δ_{k+1}. Допустим, что

$$\delta_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} - x_k. \tag{10}$$

В разности (10) значение $\tilde{x}_{k+1}$, вообще говоря, может быть рассчитано по любому рекуррентному алгоритму. Для сохранения общности будем определять $\tilde{x}_{k+1}$ по методу Ньютона

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - h_{k+1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{11}$$

На $(k+1)$-й итерации на основе известного приближения x_k по формуле (11) вычисляется $\tilde{x}_{k+1}$, формируется по (10) разность δ_{k+1}, которая в дальнейшем подставляется в (8) или в (9) в зависимости от используемой формы алгоритма второго порядка. Итерационная процедура, как обычно, продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие достаточной точности.

2. Анализ сходимости

В [1] показано, что метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости. Оценим сходимость предлагаемых вычислительных алгоритмов при $h_{k+1} = 1$. Подставим в формулу (8) выражения (10), (11) и запишем

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \dfrac{1}{2}f''(x_k)\left[\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right]}. \tag{12}$$

Вычтем из левой и правой частей (12) значение x^* и перепишем в виде

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \left[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right]\frac{f'(x_k)}{f'(x_k) - \dfrac{1}{2}f''(x_k)\left[\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right]}.$$

Учитывая, что в соответствии с [1, с. 468]

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = (x_k - x^*) - \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}(x_k - x^*)^2, \tag{13}$$

где ξ заключено между x^* и x_k,
получим

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \left[(x_k - x^*) - \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}(x_k - x^*)^2\right]\times$$

$$\times \frac{f'(x_k)}{f'(x_k) - \dfrac{1}{2} f''(x_k)\Big[(x_k - x^*) - \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(\xi)}{f'(x_k)}(x_k - x^*)^2\Big]}.$$

Приведем к общему знаменателю и получим

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\dfrac{1}{2}\Big[f''(\xi) - f''(x_k)\Big](x_k - x^*)^2 + \dfrac{1}{4}\dfrac{f''(x_k)f''(\xi)}{f'(x_k)}(x_k - x^*)^3}{f'(x_k) - \dfrac{1}{2} f''(x_k)\Big[(x_k - x^*) - \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(\xi)}{f'(x_k)}(x_k - x^*)^2\Big]}. \qquad (14)$$

Введем обозначения

$$m_1 := \min_{y\in[a,b]} |f'(y)|;\;\; M_{21} := \max_{y\in[a,b]} \frac{|f''(y)|^2}{|f'(y)|};\;\; M_3 := \max_{y\in[a,b]} |f^{(3)}(y)|. \qquad (15)$$

Естественно, что выполняется следующее:

$$|f''(\xi) - f''(x_k)| \leqslant M_3|\xi - x_k| \leqslant M_3|x_k - x^*|, \qquad (16)$$

поэтому для (14) можно записать

$$|x_{k+1} - x^*| \leqslant \frac{\frac{M_3}{2} + \frac{M_{21}}{4}}{|f'(x_k) + O(x_k - x^*)|}|x_k - x^*|^3. \qquad (17)$$

Оценим выражение, стоящее в знаменателе. При достаточно малом $|x_k - x^*|$ соблюдается условие

$$|O(x_k - x^*)| < \frac{m_1}{2}.$$

Теперь допустим, что для знаменателя выполняется требование

$$|f'(x_k) + O(x_k - x^*)| < \frac{m_1}{2}.$$

Тогда

$$|f'(x_k) + O(x_k - x^*)| + |O(x_k - x^*)| < m_1,$$

но в силу неравенства треугольника

$$|f'(x_k) + O(x_k - x^*)| + |O(x_k - x^*)| \geqslant |f'(x_k)|,$$

поэтому

$$|f'(x_k)| < m_1,$$

что противоречит определению m_1. Следовательно, для знаменателя формулы (17) должно выполняться

$$|f'(x_k) + O(x_k - x^*)| \geqslant \frac{m_1}{2}.$$

Окончательно (17) можно записать в виде

$$|x_{k+1} - x^*| \leqslant \frac{2M_3 + M_{21}}{2m_1}|x_k - x^*|^3,$$

т.е. алгоритм второго порядка (8) обладает кубической скоростью сходимости.

Оценим сходимость вычислительной процедуры (9). Для этого подставим в (9) формулы (10), (11), вычтем из левой и правой частей x^* и после преобразований получим

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}\Big[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\Big]^2.$$

С учетом формулы (13) запишем

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}(x_k - x^*)^2 - \frac{1}{2}\frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}\Big[(x_k - x^*) - \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}(x_k - x^*)^2\Big]^2.$$

Выпишем все слагаемые до $(x_k - x^*)^3$ включительно:

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi) - f''(x_k)}{f'(x_k)}(x_k - x^*)^2 + \frac{1}{2}\frac{f''(x_k)f''(\xi)}{f'(x_k)^2}(x_k - x^*)^3 + O(x_k - x^*)^4.$$

С учетом неравенства (16), а также формул (15) в окончательном виде получим

$$|x_{k+1} - x^*| \leqslant \Big(\frac{M_3}{2m_1} + \frac{1}{2}M_{22}\Big)|x_k - x^*|^3,$$

где

$$M_{22} := \max_{y\in[a,b]} \frac{|f''(y)|^2}{|f'(y)|^2}.$$

Таким образом, алгоритм (9), как и процедура (8), обладает кубической сходимостью, то есть на порядок выше, чем у классического метода Ньютона.

3. Заключение

Получены две формы итерационных процедур численного решения нелинейных уравнений, основанных, как и метод Ньютона, на разложении функций в ряд Тейлора, но учитывающих кроме первой и вторую производную. Исследована сходимость предложенных алгоритмов и доказана их кубическая скорость сходимости, что на порядок превышает сходимость метода Ньютона. Методика линеаризации может быть распространена и на учет производных более высоких порядков.

Литература

1. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений. Том 1.* М.: Наука, 1966.
2. Когут А.Т., Малютин А.Г., Щегольский И.А. *Применение квадратичной аппроксимации в задачах параметрической идентификации и оптимизации* // Информатика и процессы управления. 1997. С.44-48.