Математические структуры и моделирование
2003, вып. 11, с. 15–20

УДК 653.3.43

РЕШЕНИЕ БОЛЬШИХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ РАСЧЕТА ГИДРАВЛИЧЕСКИХ, ТЕПЛОВЫХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

А.М. Мызников

This article describe the method to solve large nonlinear equation systems of gydraulic type. The method is a modification of the method performed in the work [1]. This modification allow to solve the tasks more quickly and to use the method in other areas, like to solve equation systems in electrical engineering.

Введение

Трубопроводные сети представляют собой сложные и дорогостоящие инженерные сооружения. Расчет трубопроводных систем является одним из важных элементов технологического проектирования, причем от качества расчетов зависит экономия средств при строительстве и эксплуатации.

В связи с тем, что широкоизвестные алгоритмы лишь частично удовлетворяют конечного пользователя и требуют предварительной специальной подготовки информации инженерами, проблема разработки более эффективных, более общих методов остается открытой.

Многие алгоритмы расчета гидравлических сетей базируются на известных аналогах, разработанных для электротехники. Одинаковые математические формулировки для гидравлических, электрических и тепловых задач позволяют использовать одни и те же алгоритмы с определенными ограничениями для разных видов физических задач. В данной статье будет рассмотрена задача установившегося течения жидкости в трубах, которая представляет собой систему нелинейных уравнений, составленную исходя из первого и второго законов Кирхгофа.

В силу того что законы Киргофа – общие для задач гидравлики и электрических задач, будем рассматривать далее первый тип задач. Особенности для электрических, тепловых и иных схожих по структуре и законам сетей будут указываться отдельно.

Для решения задачи стационарного распределения жидкости в трубах предлагается применить метод, в основу которого положен алгоритм, предложенный Р.Т.Файзуллиным и К.В.Логиновым в работе [1]. Алгоритм был предложен для

Омский государственный университет

решения задачи стационарного течения жидкости в трубах с квадратичным законом гидравлического сопротивления. Удалось модифицировать метод применительно к задачам с произвольным законом гидравлического сопротивления, а также значительно ускорить исходный метод.

1. Постановка задачи и метод решения

Задача распределения потоков в трубах сводится к решению системы уравнений вида:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = Q_1,$$

$$\ldots$$

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = Q_k,$$

$$a_{(k+1)1}|x_1|^{\beta_1 - 1}x_1 + \ldots + a_{(k+1)n}|x_n|^{\beta_n - 1}x_n = H_1,$$

$$\ldots$$

$$a_{n1}|x_1|^{\beta_1 - 1}x_1 + \ldots + a_{nn}|x_n|^{\beta_n - 1}x_n = H_{n-k},$$

где x_i – расход по i-й трубе; коэффициент a_{ij} определяется по первому или второму закону Кирхгофа. Для первого закона Кирхгофа втекающий в контрольную точку поток привносит коэффициент, равный единице; вытекающему потоку отвечает коэффициент, равный минус единице. Для второго закона Кирхгофа и для нелинейных уравнений a_{ij} – коэффициент сопротивления трубы. Далее H_i – приложенные напоры, Q_i – отбор в узле, β_j – степень в законе зависимости величины напора от значения расхода. Более подробно о построении данной системы можно прочитать в работе [3].

Запишем систему уравнений в векторном виде:

$$A(x)x = H,$$

где

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{(k+1)1}|x_1|^{\beta_1 - 1} & \ldots & a_{(k+1)n}|x_n|^{\beta_n - 1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}|x_1|^{\beta_1 - 1} & \ldots & a_{nn}|x_n|^{\beta_n - 1} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \ldots \\ Q_k \\ H_1 \\ \ldots \\ H_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Доказано, что задача имеет единственное решение в силу использования модулей в нелинейных уравнениях.

Метод, описанный в работе [1], заключается в следующем: решение задачи ищется как предел итераций вида

$$A(\alpha X_i + (\alpha - 1)X_{i-1})X_{i+1} = H.$$

Здесь A – матрица системы уравнений, нижний индекс обозначает приближенные решения, полученные на $i-1, i, i+1$ шагах. При вычислении коэффициентов матрицы A используются приближения, полученные на предыдущих шагах, $0 < \alpha < 1$. Следует также отметить, что эффективность метода обуславливается способом представления данных (хранятся только ненулевые значения, которых относительно немного) и тем, что для линейной части только один раз выполняется прямой ход метода Гаусса решения системы линейных уравнений.

При исследовании метода получили, что в случае $\alpha = 0,8$ имеем оптимальную сходимость, а в случае $\alpha = 1$, т.е. одношаговый случай, сходимости нет.

Как показывает практика, данный метод очень быстро сходится (в пределах 20 итераций, для метода Ньютона требуется как минимум 40 итераций) для большинства гидравлических задач, причем количество итераций слабо зависит от размерности задачи и от выбора начального приближения. Таким образом, мы имеем алгоритм, позволяющий решать задачу в реальном времени (т.е. времени, необходимом для принятия решений). Напомним, что алгоритм был предложен для решения задач с квадратичным законом сопротивления ($\beta = 2$).

2. Увеличение быстродействия метода

Изменим способ получения следующего приближения. Для каждой итерации вычисляем следующее приближение исходя из формул:

$$X_{i+\frac{1}{2}} = \alpha X_i + (1-\alpha) X_{i-\frac{1}{2}}$$
$$A(X_{i+\frac{1}{2}}) X_{i+1} = H,$$

где X_i, X_{i+1} – приближенные решения на i и $i+1$ шаге соответственно,$X_{i-\frac{1}{2}}, X_{i+\frac{1}{2}}$ - промежуточные решения, $0 < \alpha < 1$.

В результате численных экспериментов было установлено:

1. Данный метод позволяет решать задачи определения неизвестных стационарных значений расходов по трубам. Причем в случае постоянного закона гидравлического сопротивления (при одинаковых для всех неизвестных) и, в частности, для неквадратичнго закона метод сходится за 5-7 итераций, что в 3 раза меньше, чем у исходного метода (здесь и далее результаты приводятся для невязки правой части $< 10^{-8}$ (рис. 1).

   В случае различных законов гидравлического сопротивления (для каждого слагаемого в нелинейной части системы свой β) процесс сходится за вдвое большее количество итераций, т.е. около 14. В данном случае напомним, что для гидравлической задачи β лежит в пределах от 1 (что соответствует ламинарному течению) до 2-х.

2. Установлено, что метод сходится для степеней β вплоть до 10, но количество итераций резко возрастает. Например для 4-х – в пределах 20, а для 10 уже около 50 (рис. 2). Следует заметить, что метод последовательных приближений, модифицированный для случая неквадратичного сопротивления, вообще не желает сходиться уже при степени β, большей 2,5.

3. Для каждой степени β имеется свой наиболее оптимальный параметр α. Для β=2, например он равен 0,5. Зависимость α от β можно посмотреть на графике (рис. 3). Если для каждого слагаемого в нелинейной части системы имеем свой β, то α целесообразно выбирать либо для наиболее часто встречающегося, либо для среднего β.
4. Система уравнений является хорошо обусловленной, если хорошо обусловлена ее начальная матрица. Имеется устойчивость по правой части.
5. К сожалению, исследование метода на «аварийный режим работы», когда отключается одна или несколько труб (сопротивление α_{ij} , соответствующее данной трубе x_j, приравнивается числу много большего порядка), дало не очень перспективные результаты. При исключении труб, причем неважно, одной или нескольких, получаем резкое увеличение количества итераций, причем зависящее от разницы порядков элементов матрицы и сопротивления исключенных труб. Например, для разницы порядков в 8 требуется порядка 18-20 итераций, а для 16 – уже порядка 30-40. Причем точность начинает резко возрастать только при больших номерах итераций. А также имеем, что расход по исключенной трубе (который на самом деле равен нулю) – ноль четвертого и восьмого порядка соответственно, т.е. количество точных цифр в два раза меньше, чем разница порядков. Это вызвано тем, что число обусловленности начальной матрицы велико из-за разницы порядков коэффициентов.

3. Заключение

Полученный метод позволяет решать гидравлические задачи не только для случая квадратичного гидравлического сопротивления, но и для более общего случая (степень меняется в пределах от 1 до 2-х).

Представляется возможным использовать алгоритм для расчета электрических сетей с нелинейностями определенного вида, когда вольтамперная характеристика элемента проводимости представляет собой степенную функцию степени от 1 до 10.

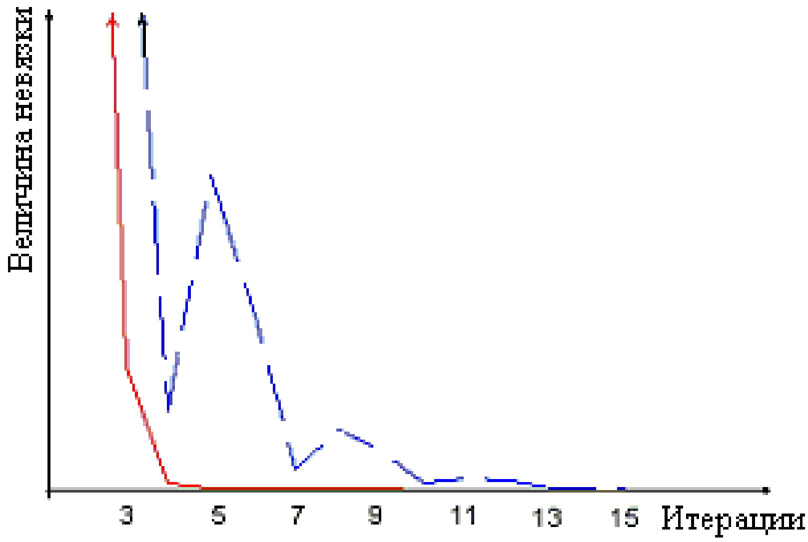

Рис. 1. Поведение невязки правой части для метода последовательных приближений(пунктир)и для модифицированного метода(сплошная линия).

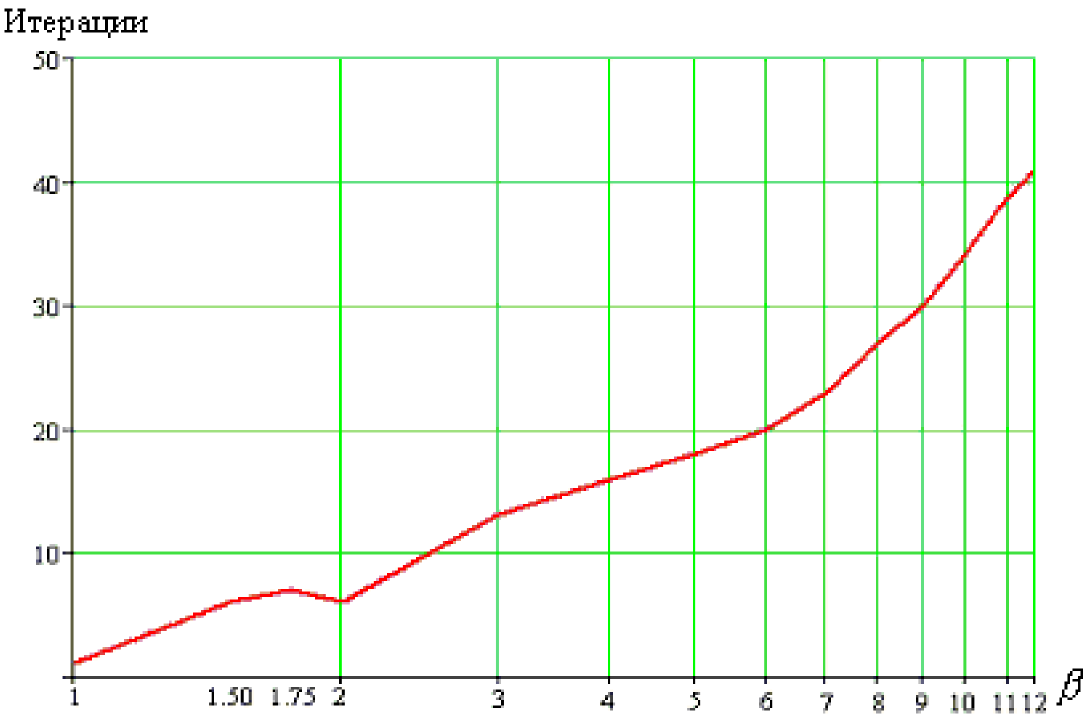

Рис. 2. График зависимости количества итерации от степени β.

Рис. 3. График зависимости коэффициента α от степени β.

Литература

1. Жихалкина Н.Ф., Логинов К.В., Семин С.Л., Файзуллин Р.Т. *Поиск оптимальных режимов работы больших гидросетей и нефтепроводов.* Омск: ОмГУ, 1999. 96 с.
2. Абрамов Н.Н., Поспелова М.М., Варапаев В.Н., Керимова Д.Ч., Сомов М.А. *Расчет водопроводных сетей.* М.: Стройиздат, 1976. 304 с.
3. Хасилев В.Я., Меренков А.П., Каганович Б.М. и др. *Методы и алгоритмы расчета тепловых сетей.* М.: Энергия, 1978. 176 с.
4. Нерретер В. *Расчет электрических цепей на персональной ЭВМ.* М.: Энергоатомиздат, 1991. 220 с.