Математические структуры и моделирование
2004, вып. 13, с. 48–52

УДК 330.4

ИНТУИЦИОНИЗМ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ АРИФМЕТИКИ

М.А. Добренко, А.К. Гуц

In this article the intuitionistic aspects of real numbers and mathematical analysis that are applied in economics are discussed. The some axioms of economical arithmetics are postulated.

Вещественные числа как они стали пониматься с времен Дедекинда – неотъемлимая часть математики, используемой при формализации экономических структур. По современным представление вещественные числа образуют линейно упорядоченное архимедово поле.

Попробуем внимательно проализировать насколько адекватно аксиомы, определяющие поле вещественных чисел, отражают ситуации, имеющие место в экономике.

1. Линейно ли упорядочены цены?

Пусть цена литра бензина А-90 в январе на бензозаправке «Лукойла» равна $r_1 = 12$ *руб*, а на бензозаправке «Сибнефти» – $r_2 = 12,3$ *руб*. Можно ли сказать, что стоимость бензина у «Сибнефти» выше? С точки зрение арифметики вещественных чисел, раз $r_1 < r_2$, то ответ положительный.

Для населения этот ответ является абсолютно правильным. Но цену литра бензина r заложены цена на добычу нефти a_1, на транспортные расходы по ее доставке на нефтеперерабатывающий завод a_2, на производство бензина a_3, на его поставку на бензозаправки a_4 и т.д. Иначе говоря, в действительности переработки, цена литра бензина – это функция $r = r(a)$, где $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. При этом число n «скрытых» параметров $a_1, ..., a_n$ и их значения могут сильно меняться в зависимости от экономической ситуации (объективный фактор) или от глубины анализа экономической ситуации (субъективный фактор).

Следовательно, мы должны сравнивать не два *числа* r_1, r_2 а две *вещественные функции* $r_1 = f_1(a), r_2 = f_2(a)$. А для функций часто нельзя однозначно сказать какая из них «больше». Как известно, множество вещественных функций не является линейно упорядоченным.

E-mail: mariadobrenko@yandex.ru, guts@univer.omsk.su
Омский государственный университет

Если мы обозначим через ℓA упомянутые выше конкретную экономическую ситуацию и глубину анализа экономической ситуации, то применительно к экономике следует иметь в виду, два числа r_1, r_2 это не просто элементы множества вещественных чисел $\mathbb{R}$:

$$r_1 \in \mathbb{R}, \quad r_2 \in \mathbb{R},$$

а *обобщенные элементы*

$$r_1 \in_{\ell A} R, \quad r_2 \in_{\ell A} R \tag{1}$$

некоторого нового множество «обобщенных вещественных числе» R, которое шире, чем классическое множество вещественных числе $\mathbb{R}$. В обозначениях (1) отражена необходимость учета экономической ситуации ℓA.

Очевидно следует помнить о реальном многообразии возможных экономических ситуаций[1] $\ell A, \ell B, \ell B, ...$, которые сказываются на конкретном виде функция f_1, f_2, представляющих цены-числа r_1, r_2.

Наша задача найти абстактную конструкцию для множества «обобщенных вещественных числе» R. Поскольку элеенты R в различных экономических ситуациях будут задаваться вещественными функциями, то R не будет удовлетворять аксиоме линейной упорядоченности. Таким образом, числа в экономике не являются линейно упорядоченными.

2. Для любого ли числа точно известен его знак?

Рассмотрим скачки цен (индексов и т.д.) на некоторых торгах. Пусть прогнозируемая на основе глубокого экономическог анализа цена товара в некоторый *будующий* момент времени t равна $f(t)$. Можно написать формулу, прогнозирующую цену в близкие к t моменты времени $t+h$

$$f(t+h) = f(t) + a \cdot h. \tag{2}$$

Законы рынка не всегда позволяют уверенно заявить:

1) будет ли значение $f(t+h)$ больше или меньше $f(t)$:

2) будет ли сам момент времени $t+h$ предшествовать t или следовать за ним.

Иначе говоря, нельзя знать какой знак имеет число h. Это означает, что мы вынуждены постулировать существование такого «обобщенного вещественного числа» $h \in R$, для которого справедлива формула

$$(h \neq 0 \ \& \ h \geq 0 \ \& \ h \leq 0). \tag{3}$$

3. Какими должна быть свойства чисел и функций в экономической математике?

Необычные свойства свойства множества «обобщенных вещественных чисел» R, описанные в §§ 1,2, позволяют нащупать аксиомы, которым должно удовлетворять R. Естественно, следут максимально сохранить свойства множества

[1] Символ ℓ – первая буква в слове locus, которое переводится как место, ситуация.

вещественных чисел $\mathbb{R}$. При этом мы желаем узаконить формулу (2), поскольку именно она привела нас к формуле (3), а также нам хотелось бы понять какие именно «обобщенные вещественные числе» обладают свойством (3).

Наше знание математической литературы, связанной с интуиционистской математикой [1,9], позволяет перечислить следующие аксиомы для «множества обобщенных вещественных чисел» R (см. [9, с.87]):

(A1) $\langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$ – коммутативное кольцо.

(A2) $\forall x \in R(\forall y \in D(x \cdot y = 0) \Rightarrow x = 0)$, где

$$D = \{x \in R : x^2 = 0\}.$$

(A3) (**Аксиома Кока-Ловера**). Для любого

$$\forall (f \in R^R)\exists! b \in R \forall d \in D(f(x + d) = f(x) + b \cdot d).$$

Далее полагаем $b = f'(x)$.

Как показано в [1], *аксиома* (A3) *несовместима с законом исключенного третьего.* Иначе говоря, мы имеем дело с интуиционистской логикой.

Как видим, аксиома (A3) в вводим в теорию производные для функция. Свойство дифференцирования такие же как в классическом анализе [1].

(A4) Бинарные отношения $<$ и $\le$ на R совместимы с кольцевой структурой, т.е. рефлексивны и транзитивны, $0<1$, и

$$\begin{array}{l}
\forall x, y \in R(x > 0 \ \&\ y > 0 \ \Rightarrow\ x \cdot y > 0 \ \&\ x + y > 0) \\
\forall x, y \in R(x \ge 0 \ \&\ y \ge 0 \ \Rightarrow\ x \cdot y \ge 0 \ \&\ x + y \ge 0) \\
\forall x \in R(x^2 > 0 \ \Rightarrow x \ge 0) \\
\forall x \in R(x^n = 0 \ \Rightarrow\ 0 \le x \le 0)
\end{array}$$

Последняя аксиома говорит, что свойством (3) обладают нильпотенты x, которые определяются как элементы, для которых $x^n = 0$ для некоторого n.

(A5) (Аксиома интеграла).

$$\forall f \in R^{[0.1]}\exists! g \in R^{[0.1]}(g(0) = 0 \ \&\ \forall x \in [0, 1]\ (g'(x) = f(x)),$$

где $[0, 1] = \{x \in R : 0 \le x \ \&\ x \le 1\}$.

Таким образом, мы сохраняем теорию первообразных и вводим определенные интегралы, используя стандартную символическую запись

$$g(x) = \int_0^1 f(t)dt.$$

(A6) $\forall f \in R^{[0,1]}((\forall x \in [0,1]\ f(x) > 0) \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx > 0).$

(A7) $\forall f \in R^{[0,1]}((\forall x \in [0,1]\ f(x) \geq 0) \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx \geq 0).$

4. Интерпретация экономической математики

Работать в системе аксиом, данной в § 3 неудобно из-за интуиционисттской логики. Людям пока более привычно рассуждать, используя классическую двузначную логика. Поэтому желательно найти интерпретацию найденной формальной «экономической ариметике», которая опиралась бы на двузначную логику.

Из-за того, что принимаемая аксиома Кока-Ловера несовместима с законом исключенного третьего, нельзя дать интерпретацию, изложенной в § 3 экономической математики в рамках теории множеств Кантора **Sets**.

Наиболее подходящими и исследованными являются так называемые хорошо адаптированные модели вида $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$, содержащие как полную подкатегорию категорию гладких многообразий **M**.

Здесь **L** – это дуальная категория для категории конечно порожденных C^∞-колец. Она называется *категорией локусов* [9]. Объектами категории **L** являются все те же конечно порожденные C^∞-кольца, а морфизмами – обращенные морфизмы категории конечно порожденных C^∞-колец. Принято во избежание путаницы объекты (локусы) категории **L** обозначать как ℓA, где A – C^∞-кольцо.

Конечно порожденное C^∞-кольцо ℓA изоморфно кольцу вида $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ (для некоторого натурально числа n и некоторого конечно порожденного идеала I). Локусы $\ell A = C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ можно использовать для интерпретация экономических ситуаций, о которых мы говорили в § 1.

Для нас важно, что при интерпретации

$$R = \ell C^\infty(\mathbb{R}).$$

Упомянутый в аксиоме (A3), объект

$$D = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(x^2).$$

Нильпотенты из D часто называют *инфинитезималами*, т.е. бесконечно малыми элементами.

Наконец, самое важное для нас то, что в интерпретации $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ *вещественное число r в ситуации ℓA*, т.е. $r \in_{\ell A} R$, где $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$, – это класс эквивалентности $f(x) mod\ I$, где $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = A$. Иначе говоря, число – это функция!

Это согласуется с тем, о чем говорилось в § 1. Заметим, что инфинитезимал $d \in_{\ell A} D$ – это класс $f(x) mod\ I$ с $f^2 \in I$.

Осталось указать, что *функция из* $f \in_{\ell A} R^R$ – это класс $F(x,a) mod\ \pi^*(I)$, где $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ и $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ проекция; $\pi^*(I)$ – идеал, порожденный $\{f \circ \pi \ : \ f \in I\}$. Поэтому представитель F функции f из R^R есть функция $F(-,a) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, зависящая гладко от параметра $a \in \mathbb{R}^n$.

Литература

1. Kock A. *Synthetic Differential Geometry.* Cambridge University Press, 1981.
2. Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis.* Springer-Verlag, 1991.