Математические структуры и моделирование
2004, вып. 13, с. 39–47

УДК 519.248:
[33+301+159.9]

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАРКОВИЦА: УПРАВЛЕНИЕ ПЕРСОНАЛОМ И ЗАПОЛНЕНИЕ РЕСУРСОВ

Е.Е. Голденок

The paper offers an attempt of eventologically formulating, solving and interpreting the classic portfolio Markowitz problem and also new inverse version of this problem and pursues an end in theory and practice. A familiarization by eventology of portfolio analysis of a set of random events and a new notion of optimal portfolio of events assists to theoretical development of eventology without doubt. Portfolio methods of solving direct and inverse eventological problems expand an area of eventological applications.

Введение

Работа, посвященная попытке *эвентологически* сформулировать, решить и интерпретировать классическую портфельную задачу Марковица а также ее новый обратный вариант, преследует двоякую цель: теоретическую и практическую. С одной стороны, освоение эвентологией портфельного анализа множества случайных событий и нового понятия оптимального портфеля событий несомненно способствует теоретическому развитию эвентологии. С другой стороны, портфельные методы решения прямых и обратных эвентологических задач расширяют область эвентологических приложений [1].

1. Эвентологическая задача Марковица

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и конечное множество случайных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ с *эвентологическим распределением (Э-распределением)* $\boldsymbol{p} = \{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$, где

$$p(X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$$

— вероятность одновременного наступления событий из $X \subseteq \mathfrak{X}$ и ненаступления событий из $X^c = \mathfrak{X} - X$, а $x^c = \Omega - x$. С каждым случайным событием $x \in \mathfrak{X}$

E-mail: golde@rambler.ru
Красноярский государственный торгово-экономический институт

взаимно однозначно связан его индикатор

$$\mathbf{1}_x(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in x, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

среднее значение которого равно вероятности события: $\mathbf{E}\mathbf{1}_x(\omega) = \mathbf{P}(x)$, а среднеквадратичное отклонение имеет вид: $\sigma^2(\mathbf{1}_x(\omega)) = \mathbf{P}(x)(1-\mathbf{P}(x))$. Из того, что и среднее значение и среднеквадратичное отклонение индикатора события определяется его вероятностью, следует характерная особенность эвентологической задачи Марковица, отличающая ее от классического варианта. Положения вырожденных портфелей случайных событий, имеющих "крайние" свойства (когда только одно событие $x \in \mathfrak{X}$ имеет единичный вес, а веса остальных равны нулю), на плоскости "среднее значение" – "среднеквадратичное отклонение" определяются только вероятностями событий:

$$\Big(\mathbf{E}\mathbf{1}_x(\omega),\ \sigma(\mathbf{1}_x(\omega))\Big) = \Big(\mathbf{P}(x),\ \sqrt{\mathbf{P}(x)(1-\mathbf{P}(x))}\Big)$$

и лежат на положительной полуокружности радиуса $1/2$ с центром в $(1/2, 0)$. Итак, множеству случайных событий $\mathfrak{X}$ взаимно однозначно соответствует случайный вектор $\{\mathbf{1}_x,\ x \in \mathfrak{X}\}$ составленный из их индикаторов. Ковариационная матрица этого случайного вектора состоит из парных ковариаций событий $x, y \in \mathfrak{X}$ с соответствующими дисперсиями на главной диагонали: $\mathsf{Kov}_{xx} = \sigma^2(\mathbf{1}_x(\omega)),\ x \in \mathfrak{X}$, так как $\mathsf{Cov}(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y) = \mathsf{Kov}_{xy} = \mathbf{P}(x \cap y) - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)$.

1.1. Постановка задачи поиска оптимального портфеля событий

Начнем с частной эвентологической постановки задачи поиска *оптимального портфеля событий*, формально копирующей классическую задачу Марковица. Затем приведем интерпретацию этой эвентологической копии портфельной задачи на примере, взятом из области управления персоналом. Эта интерпретация привлекается и в качестве иллюстрации, и как вспомогательный инструмент, облегчающий эвентологический перевод классического варианта портфельной задачи. И, наконец, сформулируем эвентологическую задачу Марковица в общем виде.

1.1.1. Эвентологическая копия задачи Марковица

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Задачу поиска *оптимального портфеля из множества событий* $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$ можно пытаться ставить формально точно так же, как это делается в классическом портфельном анализе. Иначе говоря, можно ставить задачу поиска оптимального портфеля событий из $\mathfrak{X}$, считая, что:

1) под *портфелем событий* понимается распределение

$$\boldsymbol{\mu} = \{\mu(x),\ x \in \mathfrak{X}\},$$

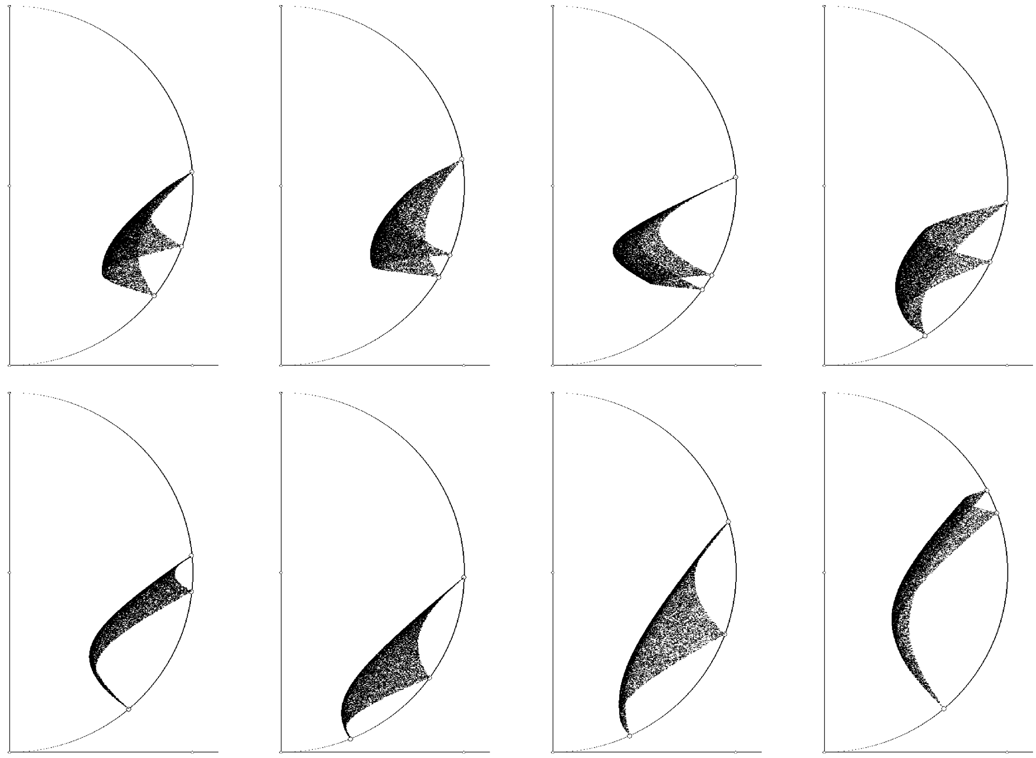

Рис. 1. Эвентологические пули Марковица портфелей из трех случайных событий, имеющих различные Э-распределения второго порядка. Вырожденные эвентологические портфели (когда единичный вес сосредоточен в одном случайном событии) на плоскости «среднее значение» (вертикальная ось) – «среднеквадратичное отклонение» (горизонтальная ось) всегда располагаются на полуокружности радиуса $1/2$ с центром в точке $(1/2, 0)$

между событиями из $\mathfrak{X}$ некоего "единичного веса"

$$1 = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x),$$

играющего роль единичного капитала из классической постановки задачи Марковица для фондового рынка,

2) *оптимальный портфель событий* взаимно однозначно определяется распределением $\boldsymbol{\mu}^* = \{\mu^*(x),\ x \in \mathfrak{X}\}$, минимизирующим дисперсию $\boldsymbol{\mu}$-взвешенной суммы индикаторов событий:

$$\mathbf{D}\left(\sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu^*(x) \mathbf{1}_x(\omega)\right) = \min_{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{D}\left(\sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{1}_x(\omega)\right)$$

при фиксированном среднем значении этой суммы:

$$\mathbf{E}\left(\sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{1}_x(\omega)\right) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{P}(x) = P^*.$$

1.1.2. Эвентологические распределения второго порядка

Заметим, что

$$\mathbf{D}\left(\sum_{x\in\mathfrak{X}}\mu(x)\mathbf{1}_x(\omega)\right)=\sum_{x\in\mathfrak{X}}\sum_{y\in\mathfrak{X}}\mu(x)\mu(y)\mathsf{Kov}_{xy},$$

где

$$\mathsf{Kov}_{xy}=\mathbf{P}(x\cap y)-\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)$$

— так называемые парные ковариации событий $x, y \in \mathfrak{X}$, которые при $x = y$ превращаются в дисперсию события $x \in \mathfrak{X}$: $\mathsf{Kov}_{xx} = \mathbf{D}_x = \mathbf{P}(x)(1-\mathbf{P}(x))$. Таким образом, в эвентологической копии задачи Марковица *Э-распределение множества случайных событий* $\mathfrak{X}$ участвует только своими моментами вплоть до второго порядка включительно. Наиболее общим примером Э-распределений, которые полностью определяются своими моментами до второго порядка, служат так называемые *Э-распределения второго порядка*, управляющие такими множествами случайных событий $\mathfrak{X}$, тройные и более пересечения которых наступают с нулевой вероятностью [3]. Введем обозначения

$$p(\emptyset)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in\mathfrak{X}}x^c\right),$$

$$p(x)=\mathbf{P}\left(x\cap\bigcap_{y\in\{x\}^c}y^c\right),\quad x\in\mathfrak{X},$$

$$p(x,y)=\mathbf{P}\left(x\cap y\cap\bigcap_{z\in\{x,y\}^c}z^c\right),\quad \{x,y\}\subseteq\mathfrak{X}$$

для вероятностей не более, чем парных пересечений случайных событий из $\mathfrak{X}$. В этих обозначениях соотношение нормировки вероятностей произвольного Э-распределения второго порядка принимает вид:

$$p(\emptyset)+\sum_{x\in\mathfrak{X}}p(x)+\sum_{\{x,y\}\subseteq\mathfrak{X}}p(x,y)=1,$$

а вероятности событий и парные ковариации равны:

$$\mathbf{P}(x)=p(x)+\sum_{y\in\{x\}^c}p(x,y),\quad x\in\mathfrak{X},$$

$$\mathsf{Kov}_{xy}=p(x,y)-\mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y),\quad \{x,y\}\subseteq\mathfrak{X}.$$

По-видимому, Э-распределениям второго порядка придется играть ту же роль в эвентологических задачах Марковица, которую давно играет в классическом варианте нормальное распределение.

1.1.3. Одна интерпретация прямой эвентологической задачи Марковица: оптимальное поощрение персонала фирмы

Руководство фирмы может быть удовлетворено или нет результатами производственной деятельности каждого сотрудника фирмы. На поощрение персонала фирмы по результатам работы выделяется единичный капитал. Перед руководством фирмы встает задача, как распределить этот единичный капитал на поощрение персонала, если каждый сотрудник характеризуется вероятностью того, что руководство фирмы удовлетворено результатами его производственной деятельности. Причем каждый раз премия выдается только тем сотрудникам, которые достигли удовлетворительных, с точки зрения руководства фирмы, результатов, а остальные сотрудники премии не получают. Иначе говоря, в качестве премий выплачивается не весь единичный капитал поощрения, а лишь его часть, соответствующая удовлетворительно работающим в настоящее время сотрудникам. Более того, руководство фирмы, вообще, не склонно постоянно выплачивать весь единичный капитал поощрения, справедливо полагая, что поощрение нужно рассматривать как награду, а наград не могут быть достойны все сразу. Однако, выплата поощрений зависит от случая: от того, как на сей раз удастся выполнить свои обязанности работникам фирмы. Поэтому доля, которую составят от единичного капитала выплачиваемые поощрения, — это случайная величина, и руководству ничего не остается делать, как зафиксировать на некоем оптимальном (с точки зрения самого руководства) уровне среднее значение этой доли. Оптимальная средняя доля выплачиваемых поощрений, с одной стороны, не может быть слишком высокой, чтобы не "развратить" персонал, с другой стороны, — слишком низкой, чтобы не перестать оказывать стимулирующее воздействие на сотрудников. Кроме того, колебания реальной суммы выплаченных поощрений вокруг оптимальной средней доли, по мнению руководства, должны быть, по возможности, минимальны из тех же соображений. В рамках этих довольно естественных ограничений руководству требуется решить следующую задачу: определить для каждого сотрудника его собственную долю в единичном капитале поощрения, на которую он может рассчитывать в случае удовлетворительной работы.

Свяжем с каждым работником фирмы по одному событию. Взятые все вместе эти события образуют конечное множество событий $\mathfrak{X}$, мощность которого равна численности персонала фирмы $N = |\mathfrak{X}|$. Так что под $\mathfrak{X}$ можно также понимать и множество всех сотрудников фирмы, хотя сотрудники здесь нас интересуют только с точки зрения удовлетворительного выполнения своих производственных обязанностей, т.е. с точки зрения наступления или не наступления соответствующих им событий из $\mathfrak{X}$. Пренебрегая этими деталями, будем понимать под $\mathfrak{X}$ и множество событий, и множество соответствующих им сотрудников.

Наступление события $x \in \mathfrak{X}$ означает, что в данный момент соответствующий сотрудник достиг, с точки зрения руководства фирмы, удовлетворительных результатов. Одновременное наступление событий, образующих подмножество $X \subseteq \mathfrak{X}$, означает, что в данный момент соответствующее подмножество сотрудников фирмы работает удовлетворительно, а оставшиеся сотрудники — не удовлетворительно. Причем, если сотруднику $x \in \mathfrak{X}$ назначена премия в размере $\mu(x)$, то доля единичного капитала, выплаченная подмножеству "удовлетворительных" сотрудников $X \subseteq \mathfrak{X}$, разумеется, равна

$$\mu(X) = \sum_{x \in X} \mu(x)$$

— одному из возможных значений случайной величины

$$\xi(\omega) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{1}_x(\omega)$$

— *доли выплаченных поощрений.* Средняя доля выплаченных поощрений равна математическому ожиданию этой случайной величины:

$$\mathbf{E}\xi(\omega) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{P}(x),$$

где $\mathbf{P}(x)$ — вероятность события $x \in \mathfrak{X}$.

Решение эвентологической задачи Марковица позволяет руководству фирмы найти оптимальное распределение единичного капитала на поощрение персонала

$$\boldsymbol{\mu}^* = \{\mu^*(x),\ x \in \mathfrak{X}\},$$

которое минимизирует дисперсию доли выплачиваемых поощрений при фиксированной средней доле P^*:

$$\mathbf{D}\xi(\omega) = \mathbf{D}\left(\sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{1}_x(\omega)\right) \to \min_{\boldsymbol{\mu}},$$

$$\mathbf{E}\xi(\omega) = \mathbf{E}\left(\sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{1}_x(\omega)\right) = P^*.$$

2. Обратная эвентологическая задача Марковица

1) Прямая эвентологическая задача Марковица, которую символически можно обозначить как

$$\boldsymbol{p} \implies \boldsymbol{\mu},$$

заключается в поиске распределения весов $\boldsymbol{\mu} = \{\mu(x),\ x \in \mathfrak{X}\}$ в портфеле (множестве) случайных событий $\mathfrak{X}$, имеющих заданное Э-распределение $\boldsymbol{p} = \{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Подробнее: требуется найти распределение весов $\boldsymbol{\mu}$ в портфеле случайных событий $\mathfrak{X}$, имеющих заданный средний вес

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{P}(x) = P^*,$$

и

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}}\sum_{y\in\mathfrak{X}}\mu(x)\mu(y)\mathsf{Kov}_{xy}\to\min_{\boldsymbol{\mu}}$$

— минимизирующих дисперсию случайного веса события из портфеля $\mathfrak{X}$.

2) Обратная эвентологическая задача Марковица, которую естественно обозначить

$$\boldsymbol{\mu} \implies \boldsymbol{p},$$

заключается [2] в поиске Э-распределения $\boldsymbol{p}$ портфеля (множества) случайных событий $\mathfrak{X}$, обеспечивающего заданные веса случайных событий $\boldsymbol{\mu}$. Подробнее: требуется найти Э-распределение $\boldsymbol{p}$ портфеля случайных событий $\mathfrak{X}$, имеющих заданный средний вес

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}}\mu(x)\mathbf{P}(x)=P^*,$$

и

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}}\sum_{y\in\mathfrak{X}}\mu(x)\mu(y)\mathsf{Kov}_{xy}\to\min_{\boldsymbol{p}}$$

— минимизирующих дисперсию случайного веса события из портфеля случайных событий $\mathfrak{X}$, управляемых искомым Э-распределением $\boldsymbol{p}$.

2.1. Одна интерпретация обратной эвентологической задачи Марковица: заполнение ресурсов услуги

Услуги являются ведущим сектором экономики большинства развитых стран. В принципе каждую услугу, всегда ограниченную соответствующим ресурсом, нельзя хранить. Например, если кинотеатр имеет 500 мест (ресурс услуги), то он не может принять вечером 900 зрителей, даже если на утреннем сеансе было 400 свободных мест.

Руководство фирмы, производящей множество услуг $\mathfrak{X}$ с ограниченными ресурсами, обычно в идеале стремится к тому, чтобы ресурс каждой услуги был заполнен целиком. Например, владелец сети кинотеатров мечтает, чтобы во всех его кинотеатрах на всех сеансах залы были заполнены до отказа. Будем считать, что фирма располагает общим единичным ресурсом, который распределен между услугами из множества $\mathfrak{X}$ в долях, образующих набор $\boldsymbol{\mu}=\{\mu(x),\ x\in\mathfrak{X}\}$, и это распределение нельзя изменить — оно задано. Для бюро проката кинофильмов, располагающей сетью кинотеатров $\mathfrak{X}$, $\mu(x)$ — доля мест кинотеатра $x\in\mathfrak{X}$ в общем количестве мест во всех кинотеатрах сети, которое не может быть изменено.

Маркетинг услуги имеет целью максимальное заполнение ее ресурса посредством привлечения потребителей услуги: отдыхающих и туристов — на курорты, в конкретные города, области и страны, зрителей — в театры и концертные залы, клиентов — в парикмахерские и косметические салоны. Подобным маркетингом занимаются бюро путешествий, авиакомпании, гостиницы, бюро проката кинофильмов и прочие фирмы, производящие услуги с ограниченным ресурсом. Можно представить себе и обратный процесс, который иногда называют *"демаркетингом"*, — воспрепятствование использованию услуги, когда излишнее ее употребление приносит больше вреда, чем пользы.

Результатом маркетинга услуги $x \in \mathfrak{X}$ является, в частности, изменение вероятности ее предоставления $\mathbf{P}(x)$. С общей эвентологической точки зрения маркетинг услуги меняет не только вероятности отдельных событий $x \in \mathfrak{X}$, т.е. вероятности предоставления той или иной услуги из портфеля услуг $\mathfrak{X}$, но меняет все Э-распределение множества случайных событий $\mathfrak{X}$, т.е. весь набор вероятностей $\boldsymbol{p} = \{p(X),\ X \subseteq \mathfrak{X}\}$. Одними из параметров этого Э-распределения являются вероятности продажи отдельной услуги $\mathbf{P}(x),\ x \in \mathfrak{X}$, остальные же параметры определяют структуру статистических зависимостей между случайными событиями $x \in \mathfrak{X}$ — продажами разных услуг.

Свяжем с продажей каждой услуги по одному событию. Взятые все вместе эти события образуют конечное множество событий $\mathfrak{X}$, мощность которого равна числу предоставляемых услуг $N = |\mathfrak{X}|$. Так что под $\mathfrak{X}$ можно также понимать и множество всех услуг, хотя услуги здесь нас интересуют только с точки зрения их продажи, т.е. с точки зрения наступления или не наступления соответствующих им событий из $\mathfrak{X}$. Пренебрегая этими деталями, будем понимать под $\mathfrak{X}$ и множество событий, и множество соответствующих им услуг.

Наступление события $x \in \mathfrak{X}$ означает, что в данный момент соответствующая услуга продана. Одновременное наступление событий, образующих подмножество $X \subseteq \mathfrak{X}$, означает, что в данный момент соответствующее подмножество услуг продано, а оставшееся подмножество услуг — не продано. При этом случайная доля заполненного ресурса услуги, разумеется, равна

$$\mu(X) = \sum_{x \in X} \mu(x)$$

— одному из возможных значений случайной величины

$$\mu(\omega) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{1}_x(\omega)$$

— *доли заполненного ресурса*. Средняя доля заполненного ресурса равна математическому ожиданию этой случайной величины:

$$\mathbf{E}\xi(\omega) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{P}(x),$$

где $\mathbf{P}(x)$ — вероятность события $x \in \mathfrak{X}$, т.е. вероятность продажи услуги $x \in \mathfrak{X}$.

Решение обратной эвентологической задачи Марковица позволяет руководству фирмы найти $\boldsymbol{p}^* = \{p^*(X),\ X \in \mathfrak{X}\}$ — оптимальное Э-распределение множества случайных событий $\mathfrak{X}$, которое минимизирует дисперсию доли заполненного ресурса

$$\mathbf{D}\xi(\omega) = \mathbf{D}\left(\sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) \mathbf{1}_x(\omega)\right) \to \min_{\boldsymbol{p}},$$

при фиксированной средней доле P^*:

$$\mathbf{E}\xi(\omega) = \mathbf{E}\left(\sum_{x\in\mathfrak{X}} \mu(x)\mathbf{1}_x(\omega)\right) = P^*.$$

Заключение

Идея постановки прямой и обратной эвентологических задач Марковица впервые предложена в [2]. Классический вариант обратной задачи Марковица заключается в отыскании таких распределений множества случайных величин (включая отыскание средних значений и ковариационной матрицы), которые обеспечивают заданное распределение весов между этими случайными величинами. Постановка и решение обратной задачи Марковица в классическом варианте наталкивается на трудности, связанные с явной неоднозначностью решения [4,5]. Обратная эвентологическая задача Марковица, которая заключается в отыскании Э-распределения множества случайных событий (включая отыскание вероятностей и матрицы парных ковариаций), обеспечивающего заданное распределение весов среди случайных событий, выгодно отличается от классической тем, что имеет более узкую область решений, что существенно облегчает поиск решения. Предлагаемая работа содержит лишь постановки и интерпретации прямой и обратной эвентологической задачи Марковица. Методы их решения не имеют принципиальных отличий от методов решения классической задачи Марковица, хотя обладают некоторыми интересными особенностями, например, связанными с тем, что для эвентологических задач не имеет смысла говорить о нормальном распределении, которому уделяется много внимания в классическом варианте. Интересные особенности эвентологических задач Марковица, которые носят не только технический характер, будут рассмотрены в следующих работах.

Литература

1. Воробьёв О.Ю., Голденок Е.Е., Куприянова Т.В., Семёнова Д.В., Фомин А.Ю. *Теория случайных событий и её применение.* Красноярск: ИВМ СО РАН, 2003, 502с.
2. Воробьёв О.Ю. *Эвентология портфельного анализа и обратная эвентологическая задача Марковица* // ФАМ Записки, Красноярск: ИВМ СО РАН. 2004. Т.9, N.11. С.1-10.
3. Воробьёв О.Ю., Голденок Е.Е. *О некоторых эвентологических распределениях* // ФАМ Записки, Красноярск: ИВМ СО РАН. 2004. Т.9, N.5. С.1-25.
4. Амелин И.Э. *Анализ активов банка. Метод обратной задачи Марковица* // Бизнес и банки. 2000. N.50, декабрь.
5. Hartley M., Bakshi G. *Markowitz Models of Portfolio Selection: The Inverse Problem* // Advances in Investment Analysis and Portfolio Management. 1998. N.7. P.55-89.