

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА С НУЛЕВЫМ ТЕНЗОРОМ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Е.В. Палешева

Spinor fields that have a property of vanishing energy-momentum tensor though non-zero current density are named ghost spinors, in a particular case of zero mass they are ghost neutrinos. In this direction some results have been received. In this article respective survey is presented.

Введение

Задача получения решений уравнений Эйнштейна является одной из важных задач общей теории относительности. Основная трудность получения таких решений связана с нахождением физических полей, порождающих заданное гравитационное поле. В качестве материи, определяющей правые части уравнений Эйнштейна, можно рассматривать свободные скалярные, векторные, спинорные поля или, например, идеальную жидкость. Введение в систему взаимодействия между различными видами материи порой еще больше усложняет задачу. В связи с этим характерный интерес представляют новые решения уравнений, связывающих гравитационное поле с материей, тем более если они обладают какими-нибудь особенными свойствами. Например, с тех пор как впервые Ван Стокумом [1] и Гёделем [2] были найдены решения уравнений Эйнштейна, допускающие гладкие замкнутые времениподобные кривые, стали появляться новые работы, затрагивающие этот раздел теории гравитации. Подобные исследования были вызваны тем, что Курт Гёдель проинтерпретировал такие кривые как Машину времени.

К еще одному классу решений, вызывающих интерес, принадлежат решения системы уравнений Эйнштейна-Дирака, для которых тензор энергии-импульса спинорного поля тождественно равен нулю, а плотность тока остается ненулевым 4-вектором. Вследствии зануления тензора энергии-импульса подобные поля не порождают гравитационное поле, т.е. спинорная материя в этом случае не является самогравитирующей: уравнения Эйнштейна для такой физической системы аналогичны вакуумным. Ввиду данной особенности достаточным оказывается рассмотрение только лишь уравнения Дирака с учетом соответствующего тензора энергии-импульса.

© 2004 Е.В. Палешева

E-mail: palesheva@univer.omsk.su

Омский государственный университет

Основной целью данной работы является представление известных нам результатов, которые были получены при исследовании как решений уравнений Эйнштейна-Дирака, так и решений только лишь уравнения Дирака, характеризующих упомянутым выше свойством.

1. Уравнения Эйнштейна и Дирака

Как известно, уравнения гравитационного поля задаются следующей системой:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \kappa T_{ik}.$$

С помощью тетрадного формализма [3–5] уравнение Дирака может быть записано в ковариантном виде. Пусть задана тетрада векторов $\lambda_{(a)}^i$. Тогда вводя матрицы $\gamma^k = \lambda_{(a)}^k \gamma^{(a)}$, где $\gamma^{(a)}$ – стандартные матрицы Дирака,¹ и определяя с их помощью величины

$$s^{mr} = \frac{1}{2}(\gamma^m \gamma^r - \gamma^r \gamma^m),$$

$$\Gamma_k = \frac{1}{4}g_{ml} \left(\frac{\partial \lambda_r^{(s)}}{\partial x^k} \lambda_{(s)}^l - \Gamma_{rk}^l \right) s^{mr},$$

можем записать оператор ковариантной производной

$$\nabla_i \psi = \partial_i \psi - \Gamma_i \psi.$$

В результате уравнение Дирака записывается в виде

$$i\hbar \gamma^i \nabla_i \psi = mc\psi.$$

При этом дираковский ток задается выражением

$$j^k = c\psi^+ \gamma^k \psi,$$

где $\psi^+ = \psi^* \gamma^{(0)}$, а тензор энергии-импульса вычисляется с помощью следующего соотношения:

$$T_{ik} = \frac{i\hbar c}{4} \left\{ \psi^* \gamma^{(0)} \gamma_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \Gamma_k \psi \right) - \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \gamma^{(0)} + \psi^* \gamma^{(0)} \Gamma_k \right) \gamma_i \psi + \right.$$

$$\left. + \psi^* \gamma^{(0)} \gamma_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \Gamma_i \psi \right) - \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^i} \gamma^{(0)} + \psi^* \gamma^{(0)} \Gamma_i \right) \gamma_k \psi \right\}.$$

¹Имеем:

$$\gamma^{(0)} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \gamma^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ -\sigma_\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Решения-духи

К одним из первых работ, связанных с нахождением решений уравнений Эйнштейна-Дирака, для которых тензор энергии-импульса тождественно равен нулю, можно отнести [6, 7]. При этом Мадоре показал, что в случае статической аксиально-симметричной метрики происходит зануление тензора энергии-импульса спинорного поля. Подобные решения были проинтерпретированы как нейтрино. Гриффитсом был рассмотрен целый класс решений уравнений Эйнштейна, отвечающих спинорному полю и связанных ограничением $T_{ik} = 0$, но для случае нулевой массы. Интерпретируя эти решения как гравитационные волны, обусловленные гравитационно-нейтринными полями, он получил классификацию пространств по типам Петрова. Для представленного класса решений возможны только пространства типа D или N. Следует отметить, что общую форму метрического тензора для нейтрино с указанными свойствами получили Коллинсон и Моррис [8]. Подобные решения уравнений Эйнштейна-Дирака, отвечающие спинорному полю нулевой массы, стали называть нейтринными духами.

Впоследствии целый ряд работ в этом направлении появляется у Дэвиса и Рэя [9–11]. Рассматривая случай статического плоско-симметричного пространства-времени [9] они получили решение отвечающее метрике Тауба [12]. При этом полученные нейтрино имеют ток, направленный вдоль оси симметрии x . В дальнейшем рассмотренный случай обобщается на плоско-симметричную метрику, зависящую от времени [10]. Полученные нейтринные духи соответствуют пространству типа D по классификации Петрова. Пространства того же типа были получены и в [11], но теперь рассматривалась статическая цилиндрически-симметричная метрика. В этом случае ток, отвечающий нейтринным духам, имел радиальное направление, а гравитационное поле соответствовало метрическому тензору, полученному Вейлем и Леви-Чивита [13, 14].

Статическое плоско-симметричное пространство-время рассматривали также Печеник и Коэн [15]. Несмотря на то, что метрический тензор был взят в таком же общем виде, как и в [9], они получили новое решение. При этом рассматривая частный случай, показали, что нейтринные духи существуют и в плоском пространстве-времени. Такой же результат (а именно существование нейтринных духов в плоском пространстве-времени) независимо получил Гуц [16], рассматривая волновое гравитационное поле.

В дальнейшем Крори, Чаудхури и Бхаттачарджи [17] рассматривают систему уравнений Эйнштейна-Дирака-Максвелла. Предполагая, что электромагнитное и спинорное поле не взаимодействуют друг с другом, они получают нейтрино с нулевым тензором энергии-импульса. При этом тензор энергии-импульса электромагнитного поля вообще говоря не зануляется. После добавления к этой системе полей заряженной материи, тензор энергии-импульса нейтринного поля перестает быть тождественно равным нулю.

Рассматривая уравнения Эйнштейна-Дирака-Клейна-Фока с невзаимодействующими скалярным и спинорным полями, Чименто и Пенса [18] получили решение, являющееся нейтринным духом (зануляется только тензор энергии-

импульса спинорного поля). Рассмотренное пространство-время типа I по Бианки соответствует вселенной Зельдовича.

Все перечисленные выше решения являются нейтринными полями. Решения уравнений Эйнштейна-Дирака с ненулевой массой и нулевым тензором энергии-импульса в плоском пространстве-времени были получены в [19], при этом было сделано предположение, что спинорные духи являются теневыми частицами Дойча [20]. В [21] получено аналогичное решение уравнения Дирака уже в пространстве-времени Минковского. Математическая модель Мультиверса [22–24], основывающаяся на синтетической дифференциальной геометрии Кока-Ловера (СДГ) [25] и предложенная Гуцом, позволяет более корректно говорить о теневых частицах. Кроме того, спинорные духи из [21] были рассмотрены Гуцом в рамках СДГ [22]. Данный результат позволяет связать полученные результаты относительно решений-духов с формальной теорией Мультиверса. Кроме этого в [21, 26] было доказано несколько теорем, с помощью которых в [21, 27, 28] уточнялась формула, выражающая интерференцию двух волн и учитывающая предположение Дойча о теневых частицах (т.е. спинорных духах). На основании этого результата была предложена экспериментальная проверка теории Мультиверса [28]. В [26] был исследован ток переноса в разложении Гордона дираковского тока для спинорных духов. Приведенные исследования спинорных духов пока не могут опровергнуть предположения о тождественности спинорных духов и теневых частиц со спином 1/2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Stockum W.J. *Gravitational field of a distribution of particles rotating about an axis of symmetry* // Roc. R. Soc. Edin. 1937. V.57. P.135-154.
2. Gödel K. *An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equation of gravitation* // Phys. Rev. mod. 1949. V.21. P.447-450.
3. Brill D.R., Wheeler J.A. *Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields* // Rev. Mod. Phys. 1957. V.29. P.465-479.
4. Гололобова А.С., Кречет В.Г., Лапчинский В.Г. *Динамика спинорной материи в ОТО* // Теория относительности и гравитация / Под ред. В.И. Родичева и др. М.: Наука. 1976. С.133-158.
5. Желнорович В.А. *Теория спиноров и ее применение*. М.: Август-Принт. 2001.
6. Madore J. *On the neutrino in general relativity* // Lett. Nuovo Cimento. 1972. V.5. P.48.
7. Griffiths J.B. *Gravitational radiation and neutrinos* // Commun. Math. Phys. 1972. V.28. P.295.
8. Collinson C.D., Morris P.B. // J. Phys. A. 1973. V.6. P.915.
9. Davis T.M., Ray J.R. *Ghost neutrinos in general relativity* // Phys. Rev. D. 1974. V.9. P.331-333.
10. Davis T.M., Ray J.R. *Ghost neutrinos in plane-symmetric spacetimes* // J. Math. Phys. 1975. V.16. P.75-79.
11. Davis T.M., Ray J.R. *Neutrinos in cylindrically-symmetric spacetimes* // J. Math. Phys. 1975. V.16. P.80-81.

12. Taub A. // *Ann. Math.* 1951. V.53. P.472.
13. Weyl H. // *Ann. Physik.* 1917. V.54. P.117.
14. Levi-Civita T. // *Rend. Acc. Lincei.* 1917. V.29. P.307.
15. Pechenick K.R., Cohen J.M. *New exact solution to the Einstein-Dirac equations* // *Phys. Rev. D.* 1979. V.19. P.1635-1640.
16. Гуц А.К. *Новое решение уравнений Эйнштейна-Дирака* // *Известия вузов. Физика.* 1979. №8. С.91-95.
17. Krori K.D., Chaudhury T., Bhattacharjee R. *Some exact solutions of Einstein-Dirac-Maxwell fields and massive neutrino* // *Phys. Rev. D.* 1982. V.25. P.1492-1498.
18. Chimento L.P., Pensa F.G. *Exact Bianchi type-(I,V) solutions of the Einstein equations with scalar and spinor fields* // *Phys. Rev. D.* 1990. V.42. P.1098-1104.
19. Палешева Е. В. *Спинорные духи, теневые электроны и Мультиверс Дойча* // *Математические структуры и моделирование* / Под ред. А.К. Гуца. Омск: ОмГУ. 2001. Вып.8. С.66-75. Los Alamos E-print gr-qc/0108017.
20. Дойч Д. *Структура реальности.* Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
21. Палешева Е. В. *Вклад спинорных духов в интерференцию квантовых частиц.* // *Математические структуры и моделирование* / Под ред. А.К. Гуца. Омск: ОмГУ. 2002. Вып.9. С.142-157. quant-ph/0207083.
22. Гуц А.К. *Теоретико-топосная модель мультиверса Дойча.* // *Математические структуры и моделирование* / Под ред. А.К. Гуца. Омск: ОмГУ. 2001. Вып.8. С.76-90. physics/0203071. gr-qc/0210072.
23. Гуц А.К. *The theory of the Deutsch multiverse.*// Abstracts of 11-th International (Russian) Conference. Theoretical and Experimental Problems of General Relativity and Gravitation. 1-7 July, Tomsk, 2002. Tomsk State Pedagogical Univ. Press, 2002. P.57.
24. Гуц А.К. *The Deutsch theory of the Multiverse and physical constants* // *Grav. and Cosm.* 2003. V.9, N.1. P.33-36.
25. Kock A. *Synthetic Differential Geometry.* Cambridge Univ. Press, 1981.
26. Палешева Е. В. *Некоторые следствия разложения Гордона* // *Математические структуры и моделирование* / Под ред. А.К. Гуца. Омск: ОмГУ. 2002. Вып.10. С.124-129.
27. Палешева Е. В. *The Guts-Deutsch Multiverse and interference of quantum particles* // Abstracts of 11-th International (Russian) Conference. Theoretical and Experimental Problems of General Relativity and Gravitation. 1-7 July, Tomsk, 2002. Tomsk State Pedagogical Univ. Press, 2002. P.91.
28. Palesheva E. V. *Interference of quantum particles and the Guts-Deutsch Multiverse* // *Grav. and Cosm.* 2003. V.9, N.1. P.63-65.