*Математические
структуры и моделирование*
2004, вып. 13, с. 119–125

УДК 539.12:530.145

ПОЛНОТА АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ОПЕРАТОРАМИ

В.А. Тюменцев

In the four dimensional space de Sittera free signature all deciding on field Yano and Yano-Killing are found. According work Shapovalov A.V. on this fields are built spinor operators of symmetry of equation Dirac in this space, in this sense is understood fullness of algebra, since all linear independent spinors operators are found. All subalgebras consist of the Killings and spinors symmetry operators, which satisfy a theorem on noncommutative integrating. These subalgebras are divided in subalgebras with functional relations between operators – such it is impossible to use for integrating and without them – these subalgebras are used for an ing a procedure of integrating. Also brought greater number found functional relations between symmetry operators in the class of square-law type.

Введение

В статье [1] была приведена алгебра операторов симметрии уравнения Дирака в пространстве де Ситтера произвольной сигнатуры. Для построения спинорных операторов симметрии были найдены одно решение уравнения на поля Яно и четыре решения уравнения на поле Яно-Киллинга.

В данной статье приводятся следующие(обобщающие) результаты: найдены полное число решений уравнений на поля Яно и Яно-Киллинга в пространстве де Ситтера произвольной сигнатуры, им соответствует полное число линейно независимых спинорных операторов симметрии; построена алгебра киллинговых операторов и спинорных, данная алгебра является квадратичной. Также найдены некоммутативные соотношения между операторами симметрии – т.е. такие функциональные соотношения между операторами, которые не являются коммутаторами. Эти некоммутативные соотношения занимают особую роль, т.к. они определяют интегрируемость уравнения Дирака, именно их наличие говорит о неполноте решения и поэтому очень важно их обнаружение в алгебре операторов симметриии.

E-mail: f71tumencev@phys.omsu.omskreg.ru
Омский государственный университет

1. Векторное поле Яно

Уравнение на векторное поле Яно в римановом пространстве имеет вид :

$$f_{i;j} \;=\; \frac{1}{4} g_{ij} f^k_{;k}, \tag{1}$$

где f_k – вектор Яно. Решение уравнения (1) ищем в виде

$$f_i \;=\; t_i(x^1, x^2, x^3, x^4)/\Theta^2.$$

На функции $t_i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ получаются дифференциальные уравнения, всего их решений – пять векторов Яно. В работе [1] приведено одно решение. В данной работе найдены еще четыре. Они приведены ниже (верхний индекс в скобке нумерует векторы Яно, нижний индекс – компоненты вектора):

$$\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{l}
f_1^{(1)} = (-4 + K\,\varepsilon_1\,{x^1}^2 - K\,\varepsilon_2\,{x^2}^2 - \\
\qquad K\,\varepsilon_4\,{x^4}^2 - K\,\varepsilon_3\,{x^3}^2)/\Theta^2, \\
f_2^{(1)} = 2\,K\,x^1\,\varepsilon_2\,x^2/\Theta^2, \\
f_3^{(1)} = 2\,K\,x^1\,\varepsilon_3\,x^3/\Theta^2, \\
f_4^{(1)} = 2\,K\,x^1\,\varepsilon_4\,x^4/\Theta^2
\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}
f_1^{(2)} = 2\,K\,\varepsilon_1\,x^4\,x^1/\Theta^2, \\
f_2^{(2)} = 2\,K\,x^2\,x^4\,\varepsilon_2/\Theta^2, \\
f_3^{(2)} = 2\,K\,\varepsilon_3\,x^4\,x^3/\Theta^2, \\
f_4^{(2)} = (-4 - K\,\varepsilon_1\,{x^1}^2 - K\,\varepsilon_2\,{x^2}^2 + \\
\qquad K\,\varepsilon_4\,{x^4}^2 - K\,\varepsilon_3\,{x^3}^2)/\Theta^2,
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
f_1^{(3)} = 2\,K\,\varepsilon_1\,x^2\,x^1/\Theta^2, \\
f_2^{(3)} = (-4 - K\,\varepsilon_1\,{x^1}^2 + K\,\varepsilon_2\,{x^2}^2 - \\
\qquad K\,\varepsilon_3\,{x^3}^2 - K\,\varepsilon_4\,{x^4}^2)/\Theta^2 \\
f_3^{(3)} = 2\,K\,\varepsilon_3\,x^2\,x^3/\Theta^2, \\
f_4^{(3)} = 2\,K\,x^4\,x^2\,\varepsilon_4/\Theta^2,
\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}
f_1^{(4)} = 2\,K\,x^3\,\varepsilon_1\,x^1/\Theta^2, \\
f_2^{(4)} = 2\,K\,x^2\,x^3\,\varepsilon_2/\Theta^2, \\
f_3^{(4)} = (-4 - K\,\varepsilon_1\,{x^1}^2 - K\,\varepsilon_2\,{x^2}^2 + \\
\qquad K\,\varepsilon_3\,{x^3}^2 - K\,\varepsilon_4\,{x^4}^2)/\Theta^2, \\
f_4^{(4)} = 2\,K\,x^4\,x^3\,\varepsilon_4/\Theta^2,
\end{array}\right.
\end{array} \tag{2}$$

Анализ полученных дифференциальных уравнений показывает, что больше решений нет, т.е. нет других векторных полей Яно. Также все пять полей Яно можно представить в форме записи (общее решение):

$$f_i = \alpha f_i^{(0)} + \beta_j f_i^{(j)} = \left(K a_{ijk} x^j x^k + \alpha \delta_{ij} x^j + \beta_i\right)/\Theta^2,$$

где в данном выражении есть пять произвольных констант $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ - $const$, $a_{ijk} = a_{ijk}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, $a_{ijk} = a_{ikj}$, коэффициенты этой матрицы легко найти, сравнив общий вид с найденными решениями.

2. Векторное поле Яно-Киллинга

Поле Яно-Киллинга в римановом пространстве задается условиями

$$f_{ij} + f_{ji} = 0, f_{ij;k} = e_{ijkl} \cdot g^l \tag{3}$$

где g^l – некоторый вектор; $e_{ijkl} = \sqrt{|\det(g_{ij})|} \cdot \varepsilon_{ijkl}$, здесь ε_{ijkl} – абсолютно антисимметричный тензор. Решение уравнения (3) ищем в виде

$$f_{ij} \;=\; t_{ij}(x^1, x^2, x^3, x^4)/\Theta^3.$$

На функции $t_{ij}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ получаются дифференциальные уравнения, и решая данную систему уравнений, получим все тензоры Яно-Киллинга – десять тензоров. В работе [1] приведено четыре решения решения уравнения (3) в пространстве де Ситтера произвольной сигнатуры. В данной работе найдены еще шесть. Они приведены ниже (верхний индекс в скобке нумерует тензоры Яно-Киллинга, нижние индексы – компоненты тензора):

$$\left\{\begin{array}{l} f^{(1)}_{12} = -2\,K\,x^3\,\varepsilon_1\,x^1/\Theta^3, \\ f^{(1)}_{13} = 2\,K\,\varepsilon_1\,x^2\,x^1/\Theta^3, \\ f^{(1)}_{14} = 0, \\ f^{(1)}_{23} = (4 + K\,\varepsilon_3\,x^{3^2} - K\,\varepsilon_1\,x^{1^2} + \\ \qquad K\,\varepsilon_2\,x^{2^2} - K\,\varepsilon_4\,x^{4^2})/\Theta^3, \\ f^{(1)}_{24} = 2\,K\,x^4\,x^3\,\varepsilon_4/\Theta^3, \\ f^{(1)}_{34} = -2\,K\,x^4\,x^2\,\varepsilon_4/\Theta^3, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} f^{(2)}_{12} = 2\,K\,x^2\,x^4\,\varepsilon_2/\Theta^3, \\ f^{(2)}_{13} = 2\,K\,\varepsilon_3\,x^4\,x^3/\Theta^3, \\ f^{(2)}_{14} = (4 - K\,\varepsilon_3\,x^{3^2} + K\,\varepsilon_4\,x^{4^2} - \\ \qquad K\,\varepsilon_2\,x^{2^2} + K\,\varepsilon_1\,x^{1^2})/\Theta^3, \\ f^{(2)}_{23} = 0, \\ f^{(2)}_{24} = 2\,K\,x^1\,\varepsilon_2\,x^2/\Theta^3, \\ f^{(2)}_{34} = 2\,K\,x^1\,\varepsilon_3\,x^3/\Theta^3, \end{array}\right. \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f^{(3)}_{12} = 2\,K\,x^2\,x^3\,\varepsilon_2/\Theta^3, \\ f^{(3)}_{13} = (4 + K\,\varepsilon_3\,x^{3^2} - K\,\varepsilon_4\,x^{4^2} - \\ \qquad K\,\varepsilon_2\,x^{2^2} + K\,\varepsilon_1\,x^{1^2})/\Theta^3, \\ f^{(3)}_{14} = 2\,K\,x^4\,x^3\,\varepsilon_4/\Theta^3, \\ f^{(3)}_{23} = 2\,K\,x^1\,\varepsilon_2\,x^2/\Theta^3, \\ f^{(3)}_{24} = 0, \\ f^{(3)}_{34} = -2\,K\,x^1\,\varepsilon_4\,x^4/\Theta^3, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} f^{(4)}_{12} = (4 - K\,\varepsilon_3\,x^{3^2} + K\,\varepsilon_2\,x^{2^2} + \\ \qquad K\,\varepsilon_1\,x^{1^2} - K\,\varepsilon_4\,x^{4^2})/\Theta^3, \\ f^{(4)}_{13} = 2\,K\,\varepsilon_3\,x^2\,x^3/\Theta^3, \\ f^{(4)}_{14} = 2\,K\,x^4\,x^2\,\varepsilon_4/\Theta^3, \\ f^{(4)}_{23} = -2\,K\,x^1\,\varepsilon_3\,x^3/\Theta^3, \\ f^{(4)}_{24} = -2\,K\,x^1\,\varepsilon_4\,x^4/\Theta^3, \\ f^{(4)}_{34} = 0, \end{array}\right. \tag{5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f^{(5)}_{12} = -2\,K\,\varepsilon_1\,x^4\,x^1/\Theta^3, \\ f^{(5)}_{13} = 0 \\ f^{(5)}_{14} = 2\,K\,\varepsilon_1\,x^2\,x^1/\Theta^3, \\ f^{(5)}_{23} = 2\,K\,\varepsilon_3\,x^4\,x^3/\Theta^3, \\ f^{(5)}_{24} = (4 - K\,\varepsilon_3\,x^{3^2} - K\,\varepsilon_1\,x^{1^2} + \\ \qquad K\,\varepsilon_4\,x^{4^2} + K\,\varepsilon_2\,x^{2^2})/\Theta^3, \\ f^{(5)}_{34} = 2\,K\,\varepsilon_3\,x^2\,x^3/\Theta^3, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} f^{(6)}_{12} = 0, \\ f^{(6)}_{13} = 2\,K\,\varepsilon_1\,x^4\,x^1/\Theta^3, \\ f^{(6)}_{14} = -2\,K\,x^3\,\varepsilon_1\,x^1/\Theta^3, \\ f^{(6)}_{23} = 2\,K\,x^2\,x^4\,\varepsilon_2/\Theta^3, \\ f^{(6)}_{24} = -2\,K\,x^2\,x^3\,\varepsilon_2/\Theta^3, \\ f^{(6)}_{34} = (-4 - K\,\varepsilon_3\,x^{3^2} + K\,\varepsilon_1\,x^{1^2} - \\ \qquad K\,\varepsilon_4\,x^{4^2} + K\,\varepsilon_2\,x^{2^2})/\Theta^3, \end{array}\right. \tag{6}$$

Анализ полученных дифференциальных уравнений показывает, что больше решений нет, т.е. нет других тензорных полей Яно-Киллинга. Также все 10 тензорных полей Яно-Киллинга можно представить в форме записи (общее решение):

$$f_{ij} = \left(K a_{ijkl} x^k x^l + \varepsilon_{ijkl} a^k x^l + \beta_{ij}\right)/\Theta^3,$$

где в выражении есть десять произвольных констант a^k, β_{ij} - $const$, $a_{ijkl} = a_{ijkl}(a^k, \beta_{ij})$ $a_{ijkl} = a_{ijlk}, a_{ijkl} + a_{jikl} = 0, \beta_{ij} + \beta_{ji} = 0$, коэффициенты матрицы a_{ijkl} легко найти, сравнив общий вид с найденными решениями.

3. Алгебра операторов симметрии и некоммутативные соотношения

Теперь по найденным полям строятся спинорные симметрии (одна симметрия Яно и четыре Яно-Киллинга приведены в статье [2], здесь приведены другие из новых найденных симметрий): по полям (2) строятся операторы симметрии Яно $N_1, .., N_4$ и по полям (4),(5) операторы симметрии Яно-Киллинга $M_1, .., M_6$, нумерация решений совпадает с нумерацией соответствующих симметрий. Тетрада для построения симметрий в пространстве де Ситтера выбрана как в статье [2]: $e^i_{(a)} = \sqrt{\frac{\eta_{ii}}{\Theta}}\delta^i_a$. В виду грамоздкости этих операторов их явный вид в статье не приводится. В отличие от спинорных операторов из статьи [2] эти операторы зависят от кривизны K пространства де Ситтерра. Сохранены другие обозначения для операторов симметрии из статьи [1]: $L_1, ..., L_4$ – симметрии Яно-Киллинга, J_0 – симметрии Яно, $Y_1, ..., Y_6$ – Киллинговы симметрии; $U_1, ..., U_4$ – это также Киллинговы симметрии, отличные от симметрий из статьи [1].

Таким образом, мы имеем двадцать пять операторов симметрии уравнения Дирака в пространстве де Ситтера произвольной сигнатуры ε_i: пять симметрий Яно, десять симметрий Яно-Киллинга, десять симметрий Киллинга. Поля Киллинга есть во многих монографиях и хорошо изучены во многих пространствах, их решения в пространстве де Ситтера можно взять из [5], и ссответсвенно по ним строятся симметрии Киллинга [3].

Далее будет несколько определений для основных объектов исследования: алгебра операторов симметрии и некоммутативные соотношения.

Определение 1. Пусть между любыми двумя операторами определена операция коммутирования: $[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i$, Тогда коммутатор квадратичного типа определим как выражение:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l \geq k}{}' \alpha^{kl}_{ij} X_k X_l + \sum_{p=1}^{n} C^p_{ij} X_p, \tag{7}$$

а алгебру операторов $\Lambda = \{X_1, ..., X_n\}$, состоящую из таких коммутаторов. назовем квадратичной. ■

Определение 2. Некоммутативным соотношением квадратичного типа между операторами $X_i, i = 1, .., n$ называется функциональное соотношение типа:

$$0 \cdot [X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l \geq k} \alpha^{kl}_{ij} X_k X_l + \sum_{p=1}^{n} C^p_{ij} X_p. \tag{8}$$

■

Пример некоммутативного соотношения в рамках определения 2. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4^2 + X_2X_6 + X_{10} = 0$ (нет $-X_6X_2$), т.е. в отличие от коммутатора в некоммутативном соотношении нет перестановок 2-х элементов.

Алгебра операторов симметрии уравнения Дирака в пространстве де Ситтера произвольной сигнатуры очень большая, поэтому ниже будут приведены наиболее важные результаты следующие в рамках следующих задач: 1) перечислить некоммутативные соотношения согласно определению 2. между операторами симметрии; 2) найти все подалгебры Ли (Киллинги + спинорные операторы симметрии, чисто Киллинговы подалгебры не рассматриваются), удовлетворяющие условию теоремы о некоммутативном интегрировании и поделить их на подалгебры без некоммутативных соотношений между операторами (эти подалгебры используются для проведения прцедуры некоммутативного интегрирования) и на содержащие некоммутативные соотношениями между операторами симметрии (эти подалгебры нельзя использовать для проведения прцедуры некоммутативного интегрирования из-за неполноты решения).

Вся алгебра операторов симметрии
$\Lambda = \{Y_1, ..., U_1, ..., U_4, L_1, ..., L_4, M_1, ..., M_6, J_0, N_1, ..., N_4\}$
является квадратичной в смысле определения 1 на стр. 122.

Алгебра Λ — найдены такие функциональные соотношения между операторами, причем некоторые сгруппированы как системы:

$$\begin{cases} 3\,M_1 + 2\,\varepsilon_1\,Y_1\,M_3 - 2\,\varepsilon_1\,Y_2\,M_4 - 2\,U_1\,L_1 = 0 \\ 3\,M_2 - 2\,\varepsilon_2\,Y_1\,M_5 + 2\,\varepsilon_2\,Y_5\,M_4 - 2\,U_3\,L_2 = 0 \\ 3\,M_3 - 2\,\varepsilon_2\,Y_1\,M_1 + 2\,\varepsilon_2\,Y_4\,M_4 + 2\,U_3\,L_1 = 0 \\ 3\,M_4 + 2\,\varepsilon_3\,Y_2\,M_1 - 2\,\varepsilon_3\,Y_4\,M_3 - 2\,U_4\,L_1 = 0 \\ 3\,M_5 + 2\,\varepsilon_3\,Y_6\,M_1 - 2\,\varepsilon_3\,Y_4\,M_6 + 2\,U_4\,L_4 = 0 \\ 3\,M_6 - 2\,\varepsilon_1\,Y_2\,M_2 - 2\,\varepsilon_1\,Y_3\,M_3 - 2\,U_1\,L_3 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} -3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_4\,K\,L_2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,U_2\,M_4 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_4\,U_3\,M_2 + 2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_4\,U_1\,M_5 = 0 \\ -3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,K\,L_1 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 U_4\,M_4 + 2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,U_1\,M_1 - 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_3\,U_3\,M_3 = 0 \\ -3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,K\,L_3 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_3\,U_2\,M_3 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_4\,U_4\,M_2 + 2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,U_1\,M_6 = 0 \\ -3\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,K\,L_4 + 2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,U_3\,M_6 + 2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,U_2\,M_1 - 2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_4\,U_4\,M_5 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} 6\,\varepsilon_3\,\varepsilon_2\,(-\,L_4 + Y_1\,L_3\,\varepsilon_1)\,\varepsilon_4\,K + M_2\,N_2 + 6\,\varepsilon_4\,\varepsilon_3\,U_9\,M_6 - M_3\,N_4 + 2\,M_4\,N_3 = 0, \\ 6\,(-\,L_2 + Y_6\,L_1\,\varepsilon_3)\,\varepsilon_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_4\,K + 6\,\varepsilon_2\,\varepsilon_1\,U_8\,M_4 + 2\,M_6\,N_2 + M_3\,N_1 + M_1\,N_3 = 0, \\ -6\,\varepsilon_3\,\varepsilon_2\,\varepsilon_1\,(\varepsilon_4\,Y_6\,L_2 + \,L_1)\,K + M_2\,N_1 + 2\,M_6\,N_4 + 6\,\varepsilon_2\,\varepsilon_1\,U_1 0\,M_4 - M_5\,N_3 = 0, \\ -6\,\varepsilon_3\,(\,L_3 + Y_5\,L_1\,\varepsilon_2)\,\varepsilon_1\,\varepsilon_4\,K + M_1\,N_4 - 2\,M_5\,N_2 - M_4\,N_1 + 6\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,U_8\,M_3 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} L_3 - 2\,\varepsilon_2\,Y_1\,L_4 + 2\,\varepsilon_2\,Y_4\,L_2 - 2\,\varepsilon_2\,Y_5\,L_1 = 0 \\ L_1 - 2\,\varepsilon_4\,Y_6\,L_2 + 2\,\varepsilon_4\,Y_5\,L_3 - 2\,\varepsilon_4\,Y_3\,L_4 = 0 \\ L_2 + 2\,\varepsilon_3\,Y_6\,L_1 - 2\,\varepsilon_3\,Y_4\,L_3 + 2\,\varepsilon_3\,Y_2\,L_4 = 0 \\ L_4 + 2\,\varepsilon_1\,Y_1\,L_3 - 2\,\varepsilon_1\,Y_2\,L_2 + 2\,\varepsilon_1\,Y_3\,L_1 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1\,{L_1}^2 - \,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,{Y_1}^2 - \varepsilon_1\,\varepsilon_3\,{Y_2}^2 - \varepsilon_2\,\varepsilon_3\,{Y_4}^2 - 1/4 = 0, \\ \varepsilon_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_4\,{L_2}^2 - \varepsilon_2\,\varepsilon_1\,{Y_1}^2 - \varepsilon_1\,\varepsilon_4\,{Y_3}^2 - \varepsilon_2\,\varepsilon_4\,{Y_5}^2 - 1/4 = 0 \\ \varepsilon_4\,\varepsilon_1\,\varepsilon_3\,{L_3}^2 - \varepsilon_1\,\varepsilon_3\,{Y_2}^2 - \,\varepsilon_4\,\varepsilon_1\,{Y_3}^2 - \varepsilon_4\,\varepsilon_3\,{Y_6}^2 - 1/4 = 0, \\ \varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,{L_4}^2 - \varepsilon_2\,\varepsilon_3\,{Y_4}^2 - \varepsilon_2\,\varepsilon_4\,{Y_5}^2 - \varepsilon_3\,\varepsilon_4\,{Y_6}^2 - 1/4 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$J_0{}^2/(\varepsilon_4\,\varepsilon_1\,\varepsilon_3\,\varepsilon_2) + \big(4\,Y_1{}^2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_1 + 4\,Y_2{}^2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1 + 4\,Y_3{}^2\,\varepsilon_4\,\varepsilon_1 + \\ +4\,Y_4{}^2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_2 + 4\,Y_5{}^2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_4 + 4\,Y_6{}^2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\big) + 3/2 = 0 \tag{14}$$

$$2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,K\,J_0 - \varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,U_1\,N_1 - \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,U_2\,N_2 - \\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_4\,U_4\,N_4 - \varepsilon_1\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,U_3\,N_3 = 0 \tag{15}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_4{}^2\,\varepsilon_2{}^2\,M_5{}^2 + \varepsilon_4{}^2\,\varepsilon_2{}^2 K\,Y_5{}^2 + \varepsilon_2\,U_8{}^2 + \varepsilon_4\,U_9{}^2 + \varepsilon_2\,\varepsilon_4\,K/4 = 0, \\ \varepsilon_3{}^2\,\varepsilon_2{}^2\,M_1{}^2 + \varepsilon_3{}^2\,\varepsilon_2{}^2\,K\,Y_4{}^2 + \varepsilon_3\,U_9{}^2 + \varepsilon_3\,U_{10}{}^2 + \varepsilon_3\,\varepsilon_2\,K/4 = 0, \\ \varepsilon_3{}^2\,\varepsilon_4{}^2\,M_6{}^2 + \varepsilon_3{}^2\,\varepsilon_4{}^2\,K\,Y_6{}^2 + \varepsilon_3\,U_8{}^2 + \varepsilon_4\,U_{10}{}^2 + \varepsilon_3\,\varepsilon_4\,K/4 = 0, \\ \varepsilon_3{}^2\,\varepsilon_1{}^2\,M_3{}^2 + \varepsilon_3{}^2\,\varepsilon_1{}^2\,K\,Y_2{}^2 + \varepsilon_1\,U_7{}^2 + \varepsilon_3\,U_{10}{}^2 + \varepsilon_3\,\varepsilon_1\,K/4 = 0, \\ \varepsilon_4{}^2\,\varepsilon_1{}^2\,M_2{}^2 + \varepsilon_4{}^2\,\varepsilon_1{}^2\,K\,Y_3{}^2 + \varepsilon_4\,U_7{}^2 + \varepsilon_1\,U_8{}^2 + \varepsilon_4\,\varepsilon_1\,K/4 = 0, \\ \varepsilon_2{}^2\,\varepsilon_1{}^2\,M_4{}^2 + \varepsilon_2{}^2\,\varepsilon_1{}^2\,K\,Y_1{}^2 + \varepsilon_2\,U_7{}^2 + \varepsilon_1 U_9{}^2 + \varepsilon_2\,\varepsilon_1\,K/4 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

где K – кривизна пространства де Ситтера. В алгебре Λ выделим две квадратичные подалгебры:$\Lambda^{(1)} = \{Y_1, ..., Y_6, L_1, ..., L_4, J_0\}$ — с такими функциогальными соотношениями (12), (13), (14), $\Lambda^{(2)} = \{Y_1, ..., Y_6, U_1, ..., U_4, J_0, N_1, ..., N_4\}$ — (14), (15). Соотношения (9), (10), (11) принадлежат всей алгебре

4-х мерные подалгебры $\Lambda^{(a)} = \{Y_1, U_1, U_3, M_4\}, \Lambda^{(b)} = \{Y_2, U_1, U_4, M_3\}$, $\Lambda^{(c)} = \{Y_3, U_1, U_2, M_2\}, \Lambda^{(d)} = \{Y_4, U_3, U_4, M_1\}, \Lambda^{(e)} = \{Y_5, U_2, U_3, M_5\}$, $\Lambda^{(f)} = \{Y_6, U_2, U_4, M_6\}$ с соотношениями между элементами подалгебр (16). Эти подалгебры удовлетворяют условию теоремы о некоммутативном интегрировании, но из-за наличия соотношений типа (16) их нельзя применять для проведения процедуры некоммутативного интегрирования, т.к. полученное решение будет являться лишь частным решением. Т.к. в рассматриваемых алгебрах есть соотношения (16) то для средуцированного решения будет нарушаться условие полноты.

4-х мерные подалгебры $\Lambda^{(\alpha_1)} = \{Y_1, U_1, U_3, N_2\}, \Lambda^{(\alpha_2)} = \{Y_1, U_1, U_3, N_4\}$, $\Lambda^{(\beta_1)} = \{Y_2, U_1, U_4, N_2\}, \Lambda^{(\beta_2)} = \{Y_2, U_1, U_4, N_3\}, \Lambda^{(\gamma_1)} = \{Y_3, U_1, U_2, N_3\}$, $\Lambda^{(\gamma_2)} = \{Y_3, U_1, U_2, N_4\}, \Lambda^{(\psi_1)} = \{Y_4, U_3, U_4, N_1\}, \Lambda^{(\psi_2)} = \{Y_4, U_3, U_4, N_2\}$, $\Lambda^{(\rho_1)} = \{Y_5, U_2, U_3, N_1\}, \Lambda^{(\rho_2)} = \{Y_5, U_2, U_3, N_4\}, \Lambda^{(\phi_1)} = \{Y_6, U_2, U_4, N_1\}$, $\Lambda^{(\phi_2)} = \{Y_6, U_2, U_4, N_3\}$ в себе не содержат соотношений. Они также удовлетворяют условию теоремы о некоммутативном интегрировании и их можно использовать для проведения редукции.

4. Выводы.

Основные результаты работы: 1) найдены все решения на уравнения Яно и Яно-Киллинга, т.е. в предыдущих работах автора были найдены одно решение Яно и четыре Яно-Киллинга, а в этой работе приводятся новые: еще четыре решения Яно и шесть решений Яно-Киллинга, они и приведены в данной; 2) по полям Яно и Яно-Киллинга построены спинорные симметрии, и в данной работе приведены все найденые функциональные соотношения в классе некоммутативных, согласно определению 2. на стр. 122, между операторами симметрии; 3) перечислены все подалгебры Ли, состоящие из Киллинговых и спинорных операторов симметрии, которые удовлетворяют теореме о некоммутативном интегрировании; эти подалгебры поделены на подалгебры без некоммутативных соотношений и с ними. Наличие некоммутативных соотношений необходимо исследовать в подалгебре, т.к. их обнаружение приводит к тому, что редуцированное с помощью такой подалгебры решение уравнение Дирака не обладает полнотой, общностью. В последующих работах автор будет проводить исследование интегрируемости уравнения Дирака в пространстве де Ситтера для подалгебр удовлетворяющих условию теоремы о некоммутативном интегрировании и дальнейшее изучение структуры алгебры оператров симмтерии

Литература

1. Клишевич В.В., Тюменцев В.А. *Векторное поле Яно и тензорное поле Яно-Киллинга в плоском пространстве и пространстве де-Ситтера* // Вестник Омского университета. 2000. N.3. С.20-21.
2. Клишевич В.В., Тюменцев В.А. *Об алгебре симметрии уравнения Дирака в плоском пространстве и пространстве де Ситтера* // Известия вузов. Физика. 2001. N.8. С.52-58.
3. Шаповалов В.Н. *Симметрия уравнения Дирака-Фока* // Известия вузов. Физика. 1975. N.6. С.57-63.
4. Шаповалов В.Н., Экле Г.Г. *Алгебраические свойства уравнения Дирака.* Элиста: Калмыцкий университет, 1972.
5. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* М.: Наука, 1983.
6. Биррел Н., Девис П. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени.* М.: Мир, 1984.

м