Математические структуры и моделирование
2004, вып. 14, с. 53–65

УДК 536.763/764

С.В. Белим

ВЛИЯНИЕ КОНКУРЕНЦИИ МЕЖДУ ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕМ И БЛИЗКОДЕЙСТВИЕМ НА КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СЖИМАЕМЫХ СИСТЕМ

Как хорошо известно, критические свойства систем задаются малым количеством параметров. Таких как размерность, симметрия параметра порядка и скорость убывания взаимодействия с расстоянием. Особый интерес представляют системы, в которых кроме обычного близкодействия присутствуют эффекты дальнодействия. В классической изингоподобной системе взаимодействие между флуктуациями убывает экспоненциально с расстоянием по закону $\exp(-r/r_0)$, вследствие чего рассматривается взаимодействие только между ближайшими соседями и данные системы можно охарактеризовать как близкодействующие. При убывании взаимодействия с расстоянием r по закону r^{-D-a}, где D – размерность пространства, уже нельзя ограничиваться взаимодействием между ближайшими соседями и возникают эффекты дальнодействия.

В общем случае при наличии как близкодействия, так и дальнодействия Фурье-образ разложения взаимодействия между критическими флуктуациями $v(q)$ по волновому числу $|q|$ имеет вид:

$$v(|q|) = v_0 + j_2|q|^2 + j_a|q|^a + w(|q|), \tag{1}$$

где $w(q)/q^{max(a,2)} \to 0$ при $q \to 0$.

Гамильтониан неупорядоченной изингоподобной системы в критической области с учетом упругих деформаций может быть записан в виде:

$$H_0 = \frac{1}{2}\int d^Dq(\tau_0 + j_aq^a + j_2q^2)S_qS_{-q} + \frac{1}{2}\int d^Dq\Delta\tau_qS_qS_{-q} + \tag{2}$$
$$u_0\int d^Dq_1d^Dq_2d^Dq_3S_{q1}S_{q2}S_{q3}S_{-q1-q2-q3} + a_3\int d^Dq_1d^Dq_2y_{q1}S_{q2}S_{-q1-q2}$$
$$+\frac{a_3^{(0)}}{\Omega}y_0\int d^DqS_qS_{-q} + \frac{1}{2}a_1\int d^Dqy_qy_{-q} + \frac{1}{2}\frac{a_1^{(0)}}{\Omega}y_0^2 + \int d^Dqh_qy_q + \frac{h_0}{\Omega}y_0,$$

© **2004 С.В. Белим**
E-mail: belim@univer.omsk.su
Омский государственный университет
Работа поддержана грантом РФФИ N 04-02-16002

где S_q — флуктуации параметра порядка, u_0 — положительная константа, $\tau_0 \sim |T - T_c|/T_c$, T_c – температура фазового перехода, a – параметр дальнодействия, j_a – параметр, характеризующий относительное влияние эффектов дальнодействия, j_2 – параметр, характеризующий относительное влияние эффектов близкодействия, $\Delta\tau_q$ – случайное поле примесей типа случайной температуры, a_1, a_2 - упругие постоянные кристалла, a_3 – параметр квадратичной стрикции. Взаимодействие примесей с нефлуктуирующим параметром порядка $y(x) = \sum_{\alpha=1}^{3} u_{\alpha\alpha}(x)$, где $u_{\alpha\beta}$ – тензор деформаций, задается величиной h_q – случайным полем, термодинамически сопряженным $u_{\alpha\alpha}(x)$. В (2) проведено интегрирование по слагаемым, зависящим от нефлуктуирующих переменных, не взаимодействующих с параметром порядка S_q, а также выделены слагаемые y_0, описывающие однородные деформации. Как показано в работе [1], такое разделение необходимо, так как неоднородные деформации y_q отвечают за обмен акустическими фононами и приводят к дополнительным эффектам дальнодействия, которые отсутствуют при однородных деформациях.

Как показано в работе [2], в рамках ε-разложения ($\varepsilon = 2a - D$) для значений $a < 2$ при ренормгрупповом преобразовании с масштабным параметром b слагаемое $j_a q^a$ преобразуется в $j_a q'^a$ с $q' = qb$. Коэффициент при q^2 убывает как b^{a-2}, а коэффициент при S^4 изменяется пропорционально b^{2a-D}. Таким образом, эффекты дальнодействия приводят к изменению критической размерности, и гауссова фиксированная точка доминирует при $D > 2a$, так как слагаемое, пропорциональное S^4, становиться несущественным при предельном переходе $b \to \infty$. Слагаемое $j_2 q^2$ несущественно при $a < 2$. Отсюда следует, что в области значений $a \leq D/2$ в системе наблюдается гауссово критическое поведение. При $D/2 < a < 2$ в системе наблюдается негауссово критическое поведение, зависящее от параметра дальнодействия a.

В обратном случае $a \geq 2$ при ренормгрупповом преобразовании с масштабным параметром b слагаемое $j_2 q^2$ преобразуется в $j_2 q'^2$ с $q' = qb$. Коэффициент при q^a убывает как b^{2-a}, а коэффициент при S^4 изменяется пропорционально b^{4-D}. То есть критическая размерность, как и для систем с отсутствием дальнодействия равна, 4. Слагаемое $j_a q^a$ несущественно при $a \geq 2$.

Для однородных несжимаемых систем с эффектами дальнодействия получены как некоторые аналитические [2–4], так и численные результаты [5–7]. В работе [2] получены критические индексы для общего случая систем с n-компонентным параметром порядка при использовании ренормгруппового подхода в рамках ε-разложения. Исследование непосредственно в трехмерном пространстве в двухпетлевом приближении [8] подтвердило предсказание ε-разложения для однородных систем с дальнодействием.

Как показано в работах [9, 10], взаимодействие флуктуаций параметра порядка с упругими деформациями может приводить как к смене режима критического поведения, так и к появлению на фазовой диаграмме трикритических точек и критических точек четвертого порядка. Введение в систему замороженных точечных примесей приводит не только к изменению режима критического поведения, но и к исчезновению мультикритических точек [11]. Исследование влияния замороженных дефектов структуры на спиновые системы с дальнодействием, проведенное в работе [12], выявило существование интервала значений параметра дальнодействия, при котором происходит смена рода фазового перехода.

В данной работе проводится описание критического поведения неупорядоченных сжимаемых систем с учетом эффектов дальнодействия непосредственно в трехмерном пространстве при различных значениях параметра дальнодействия a.

При малой концентрации примесей распределение случайных полей $\Delta\tau_q, h_q, h_0$ можно считать гауссовым и задать функцией:

$$P[\Delta\tau, h, h_0] = A\exp[-\frac{1}{8b_1}\int \Delta\tau_q^2 d^Dq - \frac{1}{8b_2}\int h_q^2 d^Dq - \frac{1}{8b_3}\int h_0 d^Dq -$$
$$-\frac{1}{4b_4}\int \Delta\tau_q h_q d^Dq - \frac{1}{4b_5}\int \Delta\tau_q h_0 d^Dq], \quad (3)$$

где A – нормировочная константа, а b_i – положительные константы, пропорциональные концентрации замороженных дефектов структуры.

Применяя репличную процедуру для усреднения по случайным полям, задаваемым замороженными дефектами структуры, получим эффективный гамильтониан системы:

$$H_R = \frac{1}{2}\int d^Dq(\tau_0 + j_a q^a + j_2 q^2)\sum_{a=1}^{m} S_q^a S_{-q}^a - \quad (4)$$
$$-\frac{\delta_0}{2}\sum_{a,b=1}^{m}\int d^Dq_1 d^Dq_2 d^Dq_3 S_{q1}^a S_{q2}^a S_{q3}^b S_{-q1-q2-q3}^b +$$
$$+ u_0\sum_{a=1}^{m}\int d^Dq_1 d^Dq_2 d^Dq_3 S_{q1}^a S_{q2}^a S_{q3}^a S_{-q1-q2-q3}^a$$
$$+g_0\sum_{a=1}^{m}\int d^Dq_1 d^Dq_2 y_{q1}^a S_{q2}^a S_{-q1-q2}^a +$$
$$+\frac{g_0^{(0)}}{\Omega}\sum_{a=1}^{m} y_0^a\int d^Dq S_q^a S_{-q}^a + \frac{1}{2}\lambda\int d^Dq y_q y_{-q} + \frac{1}{2}\frac{\lambda_0}{\Omega}y_0^2.$$

Здесь введены положительные константы δ_0, g_0, $g_0^{(0)}$, λ, λ_0, выражаемые через константы a_i, b_i. Свойства исходной системы могут быть получены в пределе числа реплик (образов) $m \to 0$.

Определим эффективный гамильтониан системы, зависящий только от сильно флуктуирующего параметра порядка S, следующим образом:

$$\exp\{-H[S]\} = B\int \exp\{-H_R[S, y]\}\prod dy_q. \quad (5)$$

Если эксперимент осуществляется при постоянном объеме, то y_0 является константой, интегрирование в (5) проводится только по неоднородным деформациям, а однородные деформации вклада в эффективный гамильтониан не вносят.

При постоянном давлении в гамильтониан добавляется слагаемое $P\Omega$, объем представляется в терминах компонент тензора деформации в виде

$$\Omega = \Omega_0[1 + \sum_{\alpha=1} u_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha\neq\beta} u_{\alpha\alpha}u_{\beta\beta} + O(u^3)], \tag{6}$$

и интегрирование в (5) осуществляется также и по однородным деформациям. Как отмечено в [13], учет в (6) квадратичных слагаемых может оказаться важным в случае высоких давлений и кристаллов с большими стрикционными эффектами. В результате:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int d^Dq(\tau_0 + j_a q^a + j_2 q^2)\sum_{a=1}^{m} S_q^a S_{-q}^a + \\ &+ v_0 \sum_{a=1}^{m}\int d^Dq_1 d^Dq_2 d^Dq_3 S_{q1}^a S_{q2}^a S_{q3}^a S_{-q1-q2-q3}^a - \\ &- \frac{\delta}{2}\sum_{a,b=1}^{m}\int d^Dq_1 d^Dq_2 d^Dq_3 S_{q1}^a S_{q2}^a S_{q3}^b S_{-q1-q2-q3}^b + \\ &+ \frac{1}{2\Omega}(z_0 - w_0)\sum_{a=1}^{m}\int d^Dq_1 d^Dq_2 S_{q1}^a S_{-q1}^a S_{q2}^a S_{-q2}^a, \\ & z_0 = g_0^2/\lambda, \quad w_0 = g_0^{(0)2}/\lambda_0, \quad v_0 = u_0 - \frac{z_0}{2}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Возникающий в гамильтониане эффективный параметр взаимодействия $v_0 = u_0 - z_0/2$ за счет влияния стрикционных эффектов, определяемых параметром g_0, может принимать не только положительные, но и отрицательные значения. В результате данный гамильтониан описывает фазовые переходы как первого, так и второго рода. При $v_0 = 0$ в системе реализуется трикритическое поведение. В свою очередь, эффективное взаимодействие в (7), определяемое разностью параметров $z_0 - w_0$, также может приводить к смене рода фазового перехода. Из данного вида эффективного гамильтониана следует возможность осуществления критической точки более высокого порядка, в которой пересекаются трикритические кривые, при одновременном выполнении условий $v_0 = 0$, $z_0 = w_0$ [14]. Следует отметить, что при трикритическом условии $z_0 = w_0$ гамильтониан модели (7) изоморфен гамильтониану неупорядоченной модели Изинга с эффектами дальнодействия.

Поведение системы в критической и трикритической области определяется значениями эффективных зарядов в неподвижной точке ренормгруппового преобразования. Данное преобразование имеет различный вид в зависимости от величины параметра дальнодействия a. Для случая $a \geq 2$ ренормгрупповая процедура имеет вид:

$$\begin{aligned} & y_q^{(0)} = Z_1 y_q, \quad y_0^{(0)} = Z_0 y_0, \quad S_q^{(0)} = Z^{1/2} S_q, \quad \tau_0 = b^2 \tau Z_\tau, \\ & u_0 = b^{4-D} u Z_u, \quad \delta_0 = b^{4-D}\delta Z_\delta, \quad g_0 = b^{2-D/2} g Z_g, \\ & g_0^{(0)} = b^{2-D/2} g^{(0)} Z_g^{(0)}, \quad j_0^{(1)} = b^{2-a} j^{(1)} Z_{j1}, \quad j_0^{(1)} = j_a/j_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Масштабный параметр b вводится для обезразмеривания величин. Как легко видеть, ренормгрупповые преобразования для эффективных зарядов u, δ, g, $g^{(0)}$ имеют такой же вид, как и для систем с отсутствием дальнодействия. Те же значения будут иметь и фиксированные точки ренормгруппового преобразования.

Для случая $a < 2$ ренормгрупповая процедура определяется соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&y_q^{(0)} = Z_1 y_q, \quad y_0^{(0)} = Z_0 y_0, \quad S_q^{(0)} = Z^{1/2} S_q, \quad \tau_0 = b^a \tau Z_\tau, \\
&u_0 = b^{2a-D} u Z_u, \quad \delta_0 = b^{2a-D} \delta Z_\delta, \quad g_0 = b^{a-D/2} g Z_g, \\
&g_0^{(0)} = b^{a-D/2} g^{(0)} Z_g^{(0)}, \quad j_0 = b^{a-2} j Z_j, \quad j_0 = j_2/j_a.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Эффективные заряды λ и λ_0 характеризуют только нефлуктуирующий параметр порядка y и поэтому не меняются при ренормгрупповом преобразовании:

$$
\lambda_R = \lambda, \quad \lambda_{0R} = \lambda_0. \tag{10}
$$

На основе техники фейнмановских диаграмм были построены двухточечные вершинные функции $\Gamma_\tau^{(2)}$, $\Gamma_\lambda^{(2)}$, $\Gamma_{\lambda 0}^{(2)}$, четырехточечные вершинные функции $\Gamma_u^{(4)}$, $\Gamma_\delta^{(4)}$, а также двухточечные вершинные функции со вставкой $\Gamma_g^{(2,1)}$, $\Gamma_{g0}^{(2,1)}$, $\Gamma_t^{(2,1)}$ с пропагатором $G(q) = 1/(\tau + |q|^a)$.

Z-факторы определяются из требования регулярности перенормированных вершинных функций, выраженном в условиях нормировки:
для случая $a \geq 2$

$$
\begin{aligned}
&Z \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k)|_{k^2=0} = 1, Z^2 {\Gamma_u}^{(4)}|_{k^2=0} = b^{2a-D} u, \quad Z^2 {\Gamma_\delta}^{(4)}|_{k^2=0} = b^{4-D} \delta, \\
&Z_1 Z {\Gamma_g}^{(2,1)}|_{k^2=0} = b^{2-D/2} g, \quad Z_0 Z {\Gamma_{g0}}^{(2,1)}|_{k^2=0} = b^{2-D/2} g^{(0)}, \\
&\quad Z_1 {\Gamma_\lambda}^{(2)}|_{k^2=0} = b^{-D} \lambda, \quad Z_0 {\Gamma_{\lambda 0}}^{(2)}|_{k^2=0} = b^{-D} \lambda_0, \\
&\quad Z {\Gamma_t}^{(2,1)}|_{k^a=0} = b^{2-D/2} t, \quad Z \Gamma_j 1^{(2,1)}|_{k^2=0} = b^{2-a} j;
\end{aligned} \tag{11}
$$

для случая $a < 2$

$$
\begin{aligned}
&Z \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k)|_{k^2=0} = 1, Z^2 {\Gamma_u}^{(4)}|_{k^2=0} = b^{2a-D} u, \quad Z^2 {\Gamma_\delta}^{(4)}|_{k^2=0} = b^{2a-D} \delta, \\
&Z_1 Z {\Gamma_g}^{(2,1)}|_{k^2=0} = b^{a-D/2} g, \quad Z_0 Z {\Gamma_{g0}}^{(2,1)}|_{k^2=0} = b^{a-D/2} g^{(0)}, \\
&\quad Z_1 {\Gamma_\lambda}^{(2)}|_{k^2=0} = b^{-D} \lambda, \quad Z_0 {\Gamma_{\lambda 0}}^{(2)}|_{k^2=0} = b^{-D} \lambda_0, \\
&\quad Z {\Gamma_t}^{(2,1)}|_{k^a=0} = b^{a-D/2} t, \quad Z {\Gamma_j}^{(2,1)}|_{k^2=0} = b^{a-2} j.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Ренормгрупповая процедура была осуществлена в рамках двухпетлевого приближения. Следующим шагом в теоретико-полевом подходе является определение скейлинговых β- и γ-функций, задающих дифференциальное уравнение ренормгруппы для вершинных функций:

$$
\begin{aligned}
&[b\frac{\partial}{\partial b} + \beta_u \frac{\partial}{\partial u} + \beta_\delta \frac{\partial}{\partial \delta} + \beta_j \frac{\partial}{\partial j} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_{g0} \frac{\partial}{\partial g^{(0)}} - \gamma_\varphi \frac{n}{2} b \frac{\partial \ln Z_\varphi}{\partial b} - \\
&-\gamma_\tau \tau \frac{\partial}{\partial \tau}] \cdot \Gamma^{(m)}(q; \tau, u, \delta, g, g^{(0)}, b) = 0.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Введем новые эффективные вершины взаимодействия:

$$v_1 = v\,J_0, \qquad v_2 = \delta\,J_0 \quad v_3 = z\,J_0, \qquad v_4 = w\,J_0. \tag{14}$$

В результате для случая $a \geq 2$ β- и γ-функции для эффективных вершин v_1, v_2, v_3, v_4 имеют такой же вид, как и для близкодействующих систем [11]. Для вершины $j^{(1)}$ получаем:

$$\begin{aligned}
&\beta_{j1} = -(2-a)j^{(1)}\Big[1 - 24v_1 + 8v_2 - 4v_3 + 2v_4 + \\
&+576\left(2\widetilde{J}_1\Big|_{a=2} - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G}\Big|_{a=2}\right)v_1^2 - 120\left(2\widetilde{J}_1\Big|_{a=2} - 1 - \frac{8}{5}\widetilde{G}\Big|_{a=2}\right)v_1v_2 + \\
&+96\left(2\widetilde{J}_1\Big|_{a=2} - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G}\Big|_{a=2}\right)v_2^2\Big].
\end{aligned} \tag{15}$$

Для случая $a < 2$ были получены выражения:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -(2a-D)v_1\Big[1 - 36v_1 + 24v_2 + 1728\Big(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{9}\widetilde{G}\Big)v_1^2 - \\
&- 2304(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{1}{6}\widetilde{G})v_1v_2 + 672(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G})v_2^2\Big], \\
\beta_2 &= -(2a-D)v_2\Big[1 - 24v_1 + 8v_2 + 576(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G})v_1^2 - \\
&- 1152(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{1}{3}\widetilde{G})v_1v_2 + 352(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{1}{22}\widetilde{G})v_2^2\Big], \\
\beta_3 &= -(2a-D)v_3\Big[1 - 24v_1 + 16v_2 - 2v_3 + 576(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G})v_1^2 - \\
&- 120(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{8}{5}\widetilde{G})v_1v_2 + 96(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G})v_2^2\Big], \\
\beta_4 &= -(2a-D)v_4\Big[1 - 24v_1 + 8v_2 - 4v_3 + 2v_4 + 576(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G})v_1^2 - \\
&- 120(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{8}{5}\widetilde{G})v_1v_2 + 96(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G})v_2^2\Big], \\
\beta_j &= -(a-2)j\Big[1 - 24v_1 + 8v_2 - 4v_3 + 2v_4 + 576(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G})v_1^2 - \qquad (16) \\
&- 120(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{8}{5}\widetilde{G})v_1v_2 + 96(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G})v_2^2\Big], \\
\gamma_t &= (2a-D)\Big[-12v_1 + 4v_2 - 2v_3 + 2v_4 + 288\Big(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{1}{3}\widetilde{G}\Big)v_1^2 - \\
&- 192(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G})v_1v_2 + 32(2\widetilde{J}_1 - 1 - \frac{1}{2}\widetilde{G})v_2^2\Big],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_\varphi &= (2a-D)64\widetilde{G}(3v_1^2-3v_1v_2+v_2^2).\\
J_1 &= \int \frac{d^Dqd^Dp}{(1+|q|^a)^2(1+|p|^a)(1+|q^2+p^2+2pq|^{a/2})},\\
J_0 &= \int \frac{d^Dq}{(1+|q|^a)^2},\\
G &= -\frac{\partial}{\partial|k|^a}\int \frac{d^Dqd^Dp}{(1+|q^2+k^2+2kq|^a)(1+|p|^a)(1+|q^2+p^2+2pq|^{a/2})}\Big|_{k=0},\\
\widetilde{J}_1 &= \frac{J_1}{J_0^2}, \quad \widetilde{G}=\frac{G}{J_0^2}.
\end{aligned}
$$

При значениях $a \le D/2$ интегралы J_0, J_1, G становятся расходящимися. Для получения конечных выражений вводился параметр обрезания Λ и рассматривался предел отношений J_1/J_0^2, G/J_0^2 при $\Lambda\to\infty$. Значения интегралов находились численно, после чего строилась последовательность значений J_1/J_0^2 и G/J_0^2 при различных значениях Λ и аппроксимировалась на бесконечность.

С целью извлечения из полученных выражений нужной физической информации был применен обобщенный на четырехпараметрический случай метод Паде-Бореля. При этом прямое и обратное преобразования Бореля имеют вид

$$
\begin{aligned}
&f(v_1,v_2,v_3,v_4)=\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} c_{i_1,i_2,i_3,i_4} v_1^{i_1}v_2^{i_2}v_3^{i_3}v_4^{i_4}=\int_0^\infty e^{-t}F(v_1t,v_2t,v_3t,v_4t)dt,\\
&F(v_1,v_2,v_3,v_4)=\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4}\frac{c_{i_1,i_2,i_3,i_4}}{(i_1+i_2+i_3+i_4)!}v_1^{i_1}v_2^{i_2}v_3^{i_3}v_4^{i_4}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Для аналитического продолжения борелевского образа функции вводится ряд по вспомогательной переменной θ

$$
\tilde{F}(v_1,v_2,v_3,v_4,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4}\frac{c_{i_1,\dots,i_4}}{k!}v_1^{i_1}v_2^{i_2}v_3^{i_3}v_4^{i_4}\delta_{i_1+i_2+i_3+i_4,k}\ , \tag{18}
$$

к которому применяется аппроксимация Паде [L/M] в точке $\theta=1$. В двухпетлевом приближении для вычисления β-функций были использованы аппроксиманты [2/1].

Режим критического поведения полностью определяется устойчивыми неподвижными точками ренормгруппового преобразования, которые могут быть найдены из условия равенства нулю β-функций:

$$
\beta_i(v_1^*,v_2^*,v_3^*,v_4^*,j^*)=0 \quad (i=1,2,3,4,j). \tag{19}
$$

Требование устойчивости фиксированной точки сводится к условию положительности собственных значений b_i матрицы

$$
B_{i,j}=\frac{\partial\beta_i(v_1^*,v_2^*,v_3^*,v_4^*,j^*)}{\partial v_j}. \tag{20}
$$

Для случая $a\ge 2$ устойчивые фиксированные точки совпадают с соответствующими точками близкодействующих систем [11], так как для всех этих фиксированных точек эффективный заряд $j^{(1)*} = 0$. Нулевое значение эффективного заряда, характеризующего относительное влияние эффектов дальнодействия, свидетельствует о доминирующей роли близкодействия в этих системах и несущественности вклада дальнодействия.

Устойчивые фиксированные точки ренормгруппового преобразования, собственные значения матрицы устойчивости в фиксированной точке и критические индексы для значений параметра $1,5 < a \leq 1,9$ приведены в таблице 1. Для значений параметра $0 < a < 1,5$ существует только гауссова фиксированная точка $v^* = 0$, являющаяся устойчивой. Для значения параметра дальнодействия $a = 1,5$ определить значения эффективных зарядов в фиксированной точке невозможно, так как β-функция тождественно равна нуль при $D = 3$. Однако для случая $a = 1,5$ определение фиксированной точки и не требуется в силу того, что $\gamma_t = 0$ и $\gamma_\varphi = 0$ тождественно и соответствующие индексы совпадают со среднеполевыми. Данный результат согласуется с предсказаниями ε-разложения [2–4].

Анализ фиксированных точек и собственных значений матрицы устойчивости показывает, что для значений параметра $a < 2$ близкодействие становится несущественным для всех типов систем, определяющую роль играют эффекты дальнодействия. Данный вывод следует из нулевого значения параметра $j^* = 0$, определяющего относительное влияние эффектов близкодействия в устойчивой фиксированной точке, и положительного значения параметра $b_5 > 0$, определяющего устойчивость системы относительно параметра j.

Для неупорядоченных «жестких» систем (фиксированные точки 1,6; 2,6; 3,6; 4,6) устойчивые фиксированные точки в физической области ($v_1^*, v_2^* > 0$) существуют лишь при значениях параметра дальнодействия $a \geq 1,8$. Как показывают вычисления для всех значений $1,6 \leq a < 1,8$, устойчивые точки трехмерных примесных систем характеризуются отрицательным значением вершины v_1^*. Присутствие в физической области только неустойчивых фиксированных точек свидетельствует о смене рода фазового перехода со второго на первый [15]. Данные фиксированные точки неустойчивы относительно упругих деформаций.

Для неупорядоченных сжимаемых систем при $1,8 \leq a < 2$ реализуется свой режим критического поведения (фиксированные точки 3,7; 4,7). Фиксированные точки 3,8 и 4,8 задают трикритическое поведение первого типа ($v_3^* = v_4^*$). Трикритическое поведение второго типа ($v_1^* = 0$) не реализуется в силу отсутствия устойчивых фиксированных точек в физической области значения эффективных зарядов. И, как следствие, на фазовой диаграмме отсутствуют критические точки четвертого порядка.

Индекс ν, характеризующий рост радиуса корреляции в окрестности критической точки ($R_c \sim |T - T_c|^{-\nu}$), находится на основе соотношения

$$\nu = 0,5\,(1 + \gamma_t(v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*))^{-1}. \tag{21}$$

Индекс Фишера η, описывающий поведение корреляционной функции в окрестности критической точки в пространстве волновых векторов ($G \sim k^{2+\eta}$), опре-

Таблица 1. Значения фиксированных точек и собственных значений матрицы устойчивости однородных систем.

N	v_1^*	v_2^*	v_3^*	v_4^*	j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$a = 1,6$										
1,1	0,01597	0	0	0	0	0,32	-0,48	-0,62	-0,62	0,87
1,2	0,01597	0	0,30968	0	0	0,87	-0,48	0,62	0,62	0,16
1,3	0,01597	0	0,30968	0,30968	0	0,87	-0,48	0,62	-0,62	0,32
1,4	0	0	0,5	0	0	-1	-1	1	1	0,4
1,5	0	0	0,5	0,5	0	-1	-1	1	-1	0,4
1,6	-0,22762	0,59481	0	0	0	45,30	32,57	- 0,12	- 0,12	0,08
$a = 1,7$										
2,1	0,02049	0	0	0	0	0,23	-0,34	-0,53	-0,53	0,70
2,2	0,02049	0	0,26650	0	0	0,70	-0,34	0,53	0,53	0,12
2,3	0,02049	0	0,26650	0,26650	0	0,70	-0,34	0,53	-0,53	0,23
2,4	0	0	0,5	0	0	-1	-1	1	1	0,3
2,5	0	0	0,5	0,5	0	-1	-1	1	-1	0,3
2,6	-0,04523	0,27489	0	0	0	13,24	3,92	- 0,17	- 0,17	0,08
$a = 1,8$										
3.1	0,02323	0	0	0	0	0,15	-0,22	-0,49	-0,49	0,63
3.2	0,02323	0	0,24540	0	0	0,63	-0,22	0,49	0,49	0,08
3.3	0,02323	0	0,24540	0,24540	0	0,63	-0,22	0,49	-0,49	0,15
3.4	0	0	0,5	0	0	-1	-1	1	1	0,2
3.5	0	0	0,5	0,5	0	-1	-1	1	-1	0,2
3.6	0,06419	0,04688	0	0	0	$0,63^*$	$0,63^*$	- 0,12	- 0,12	0,08
3.7	0,06419	0,04688	0,06610	0	0	$0,63^*$	$0,63^*$	0,12	0,12	0,09
3.8	0,06419	0,04688	0,06610	0,06610	0	$0,63^*$	$0,63^*$	0,12	- 0,12	0,08
$a = 1,9$										
4,1	0,04207	0	0	0	0	0,06	-0,18	-0,18	-0,18	0,68
4,2	0,04435	0	0,09519	0	0	0,68	-0,18	0,19	0,18	0,04
4,3	0,04435	0	0,09519	0,09519	0	0,68	-0,18	0,19	-0,19	0,06
4,4	0	0	0,5	0	0	-1	-1	1	1	0,1
4,5	0	0	0,5	0,5	0	-1	-1	1	-1	0,1
4,6	0,06656	0,04082	0	0	0	$0,56^*$	$0,56^*$	- 0,12	- 0,12	0,04
4,7	0,06656	0,04082	0,06572	0	0	$0,56^*$	$0,56^*$	0,12	0,12	0,05
4,8	0,06656	0,04082	0,06572	0,06572	0	$0,56^*$	$0,56^*$	0,12	- 0,12	0,04

деляется на основе скейлинговой функции γ_φ:

$$\eta = \gamma_\varphi(v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*). \tag{22}$$

Значения остальных критических индексов может быть определено исходя из скейлинговых соотношений.

Значения критических индексов для фиксированных точек из табл.1, лежащих в физической области значений, приведены в табл.2.

Динамическое поведение системы в релаксационном режиме вблизи критической температуры может быть описано кинетическим уравнением для параметра порядка типа уравнения Ланжевена:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\lambda_0 \frac{\delta H}{\delta S} + \eta + \lambda_0 \xi, \tag{23}$$

где λ_0 – кинетический коэффициент, $\eta(x,t)$ – гауссова случайная сила, характеризующая влияние теплового резервуара и задаваемая функцией распределения

$$P_\eta = A_\eta \exp\left[-(4\lambda_0)^{-1} \int d^d x \, dt \, \eta^2(x,t) \right] \tag{24}$$

с нормировочной константой A_η, $\xi(t)$ – внешнее поле, термодинамически сопряженное параметру порядка. Временная корреляционная функция $G(x,t)$ параметра порядка определяется путем решения уравнения (23) с $H[S,\Delta\tau]$, задаваемым (2) относительно $S[\eta,\xi,\Delta\tau]$, с последующим усреднением по гауссовской случайной силе η с помощью P_η, по случайному потенциалу поля примесей $\Delta\tau(x)$ с помощью $P[\Delta\tau, h, h_0]$ и выделением линейной по $\xi(0)$ части решения, т.е.

$$G(x,t) = \frac{\delta}{\delta\xi(0)} [\langle S(x,t) \rangle]_{imp}|_{\xi=0}, \tag{25}$$

где

$$[\langle S(x,t)\rangle]_{imp} = B^{-1} \int D\{\eta\} \prod d\Delta\tau_q S(x,t) P_\eta P_\Delta \tau, \tag{26}$$

$$B = \int D\{\eta\} \prod d\Delta\tau_q P_\eta P_\Delta \tau. \tag{27}$$

Вместо корреляционной функции удобнее рассматривать ее вершинную часть $\Gamma^{(2)}(k,\omega)$, которая была получена в двухпетлевом приближении с использованием формализма фейнмановских диаграмм.

Для однородных «жестких» систем (фиксированные точки 1,1; 2,1; 3,1; 4,1) режим критического поведения существенно зависит от параметра дальнодействия. При этом с уменьшением скорости спадания взаимодействия между флуктуациями с расстоянием (уменьшением параметра a) наблюдается стремление критического поведения к гауссовому. Критическое поведение становится гауссовым при значении параметра дальнодействия $a = 1,5$. Из отрицательного значения собственных значений матрицы устойчивости b_2, b_3, b_4 следует, что критическое поведение однородных «жестких» систем неустойчиво как относительно введения в систему замороженных примесей, так и относительно упругих деформаций.

Для однородных сжимаемых систем качественно картина критических явлений выглядит одинаково при любых значениях параметра дальнодействия $1,5 < a < 2$. Устойчивой оказывается фиксированная точка при постоянной деформации (фиксированные точки 1,2; 2,2; 3,2; 4,2). Фиксированные точки 1,3;

Таблица 2. Критические индексы.

N	ν	α	η	γ	z
$a = 1,6$					
1,1	0,69736	-0,09208	0,40394	1,11303	2,00018
1,2	0,88948	-0,66844	0,40394	1,41966	2,00018
1,3	0,69736	-0,09208	0,40394	1,11303	2,00018
1,4	1,25	-1,75	0,4	2	2
1,5	0.625	0,125	0,4	1	2
$a = 1,7$					
2,1	0,66745	-0,00235	0,30486	1,13142	2,00078
2,2	0,83065	-0,49195	0,30486	1,40807	2,00078
2,3	0,66745	-0,00235	0,30486	1,13142	2,00078
2,4	1,17647	-1,52941	0,3	2	2
2,5	0,58823	0,23531	0,3	1	2
$a = 1,8$					
3,1	0,63634	0,09098	0,20746	1,14116	2,00153
3,2	0,78291	-0,34873	0,20746	1,40399	2,00153
3,3	0,63634	0,09098	0,20746	1,14116	2,00153
3,4	1,11111	-1,33333	0,2	2	2
3,5	0,55556	0,33333	0,2	1	2
3,6	0,73279	-0,19837	0,25098	1,28540	2,11225
3,7	0,75776	-0,27328	0,25098	1,32919	2,11225
3,8	0,73279	-0,19837	0,25098	1,28540	2,11225
$a = 1,9$					
4,1	0,65268	0,04196	0,11342	1,23179	2,00663
4,2	0,75143	-0,25429	0,11342	1,41814	2,00663
4,3	0,65268	0,04196	0,11342	1,23179	2,00663
4,4	1,05263	-1,15789	0,1	2	2
4,5	0,52632	0,42104	0,1	1	2
4,6	0,70679	-0,12037	0,13441	1,31979	2,12385
4,7	0,72133	-0,72133	0,13441	1,34695	2,12385
4,8	0,70679	-0,12037	0,13441	1,31979	2,12385

2,3; 3,3; 4,3 описывают первый тип трикритического поведения сжимаемых систем, наблюдаемый при постоянном давлении. Фиксированные точки 1,4; 2,4; 3,4; 4,4 являются трикритическими для систем, исследуемых при постоянном объеме. Точки 1,5; 2,5; 3,5; 4,5 являются критическими точками четвертого порядка, в них пересекаются две трикритические линии. Данные фиксированные точки неустойчивы относительно замороженных дефектов структуры.

Релаксационное поведение системы определяется динамической скейлинговой функцией $\gamma_\lambda(v_1, v_2, v_3, v_4)$, которая позволяет определить динамический критический индекс z, характеризующий критическое замедление процессов релаксации,

$$z = 2 + \gamma_\lambda(v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*), \tag{28}$$

$$\gamma_\lambda = (2a - D)\Big[-4D_1' - 532(D_2' - \frac{4}{9}\widetilde{G})v_1^2 + \tag{29}$$

$$+288(D_3' + \frac{1}{3}D_1' - \frac{1}{3}\widetilde{G})v_1 v_2 - 16(D_4' + D_5' + 4D_1' - \widetilde{G})v_2^2\Big],$$

$$D_1' = \frac{1}{J_0}\frac{\partial D_1}{\partial(-i\omega/\lambda)}|_{k=0,\omega=0}.$$

$$D_1 = \int \frac{d^D q}{1 + |q|^a - i\omega/\lambda}.$$

$$D_i' = \frac{1}{J_0^2}\frac{\partial D_i}{\partial(-i\omega/\lambda)}|_{k=0,\omega=0} \quad (i = 2, .., 5).$$

$$D_2 = \frac{3}{4}\int \frac{d^D q d^D p}{(1 + |q|^a)(1 + |p|^a)(3 + |q|^a + |p|^a + |p + q|^a - i\omega/\lambda)}.$$

$$D_3 = \frac{3}{4}\int \frac{d^D q d^D p}{2(1 + |q|^a - i\omega/\lambda)(1 + |p|^a)(2 + |q|^a + |p + q|^a)}.$$

$$D_4 = \int \frac{d^D q d^D p}{(1 + |q|^a - i\omega/\lambda)(1 + |p|^a - i\omega/\lambda)(1 + |p + q|^a - i\omega/\lambda)}.$$

$$D_5 = \int d^D q d^D p\Big[\frac{1}{(1 + |q|^a - i\omega/\lambda)^2(1 + |p + q|^a - i\omega/\lambda)} -$$

$$-\frac{1}{(1 + |q|^a - i\omega/\lambda)^2(1 + |p|^a - i\omega/\lambda)}\Big].$$

Для асимптотического ряда разложения $\gamma_\lambda(v_1, v_2, v_3, v_4)$ по степеням v_1^*, v_2^*, v_3^* и v_4^* при $D = 3$ был применен метод суммирования Паде-Бореля. Значения динамического критического индекса, как и статические индексы, приведены в табл.2.

Таким образом, расчеты, проведенные непосредственно в трехмерном пространстве, показали, что эффекты дальнодействия несущественны при значениях параметра дальнодействия $a \geq 2$. Для однородных сжимаемых и «жестких» систем в интервале значений $1,5 < a < 2$ наблюдается негауссово критическое поведение, существенно зависящее от значения параметра дальнодействия a. Для неупорядоченных сжимаемых и «жестких» систем в интервале значений $1,8 \leq a < 2$ так же, как и для однородных систем, наблюдается негауссово критическое поведение, существенно зависящее от значения параметра дальнодействия a. В интервале значений $1,5 < a < 1,8$ для примесных систем происходит срыв на фазовый переход первого рода. При значениях $a < 1,5$ для всех рассматриваемых систем наблюдается среднеполевой характер критического поведения, характеризующийся гауссовыми критическими индексами.

Литература

1. Ларкин А.И., Пикин С.А. // ЖЭТФ. 1969. Т.56. С.1664.
2. Fisher M. E., Ma S.-k., Nickel B. G. *Critical exponents for long-range intraction* // Phys. Rev. Lett. 1972. V.29. P.917.
3. Honkonen J.// J. Phys. A. 1990. V.23. P.825
4. Luijten, E. *Mebingfeld Criticality in One Dimension with Inverse Square-Law Potentials* // Phys. Rev. Lett. 2001. V.86. P.5305.
5. Bayong E., Diep H.T. *Effect of long-range interaction on the critical behavior of the continuous Ising model* // Phys. Rev. B. 1999. V.9. P.11920
6. Luijten E. *Test of renormalization predictions for universal finite-size scaling functions* // Phys. Rev. E. 1999. V.60. P.7558.
7. Luijten E., Bloöte H. W. J. *Classical critical behavior of spin models with long-range interactions* // Phys. Rev. B. 1997. V.56. P.8945.
8. Белим С.В. *Влияние эффектов дальнодействия на критическое поведение трехмерных систем* // Письма в ЖЭТФ. 2003. В.2. N.77. С.118-120.
9. Laptev V.M., Skryabin Yu.N. *Critical behavior of random spin models with a coupling to a nonfluctuating parameter* //Phys. Stat. Sol.B. 1979. V.91. P.K143-K147.
10. Skryabin Y.N., Shchanov A.V. *Tricritical behavior of random systems with a coupling to a nonfluctuating parameter* //Phys. Lett.A. 1997. V.234, N.1. P.147.
11. Белим С.В., Прудников В.В. *Трикритическое поведение сжимаемых систем с замороженными дефектами структуры* // ФТТ. 2001. Т.43, Вып.7. С.1299.
12. Белим С.В. *Влияние эффектов дальнодействия на критическое поведение неупорядоченных трехмерных систем* //Письма в ЖЭТФ. 2003. N.77. С.509-512.
13. De Maura M.A., Lubensky T.C., Imry Y., Aharony A. // Phys. Rev.B. 1976. V.13, N.4. P.2177.
14. Imry Y. *Tricritical Points in Compressible Magnetic Systems* //Phys. Rev. Lett.B. 1974. V.33. P.1304.
15. Изюмов Ю.А., Сыромятников В.Н. *Фазовые переходы и симметрия кристаллов.* М.:Наука,1984.