Математические
структуры и моделирование
2004, вып. 14, с. 6–12

УДК 519.214.5

А.Г. Гринь

МИНИМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ТЕОРЕМАХ О ПРИТЯЖЕНИИ К УСТОЙЧИВЫМ ЗАКОНАМ

В статье [1] введено минимальное в некотором смысле условие слабой зависимости для стационарных последовательностей, обеспечивающее выполнение центральной предельной теоремы. В [2] аналогичные минимальные условия слабой зависимости получены для предельных теорем о сходимости к устойчивым распределениям, причем масштабная нормировка в этих теоремах такая же, что и в предельных теоремах для сумм независимых одинаково распределенных величин. В настоящей работе результаты из [2] распространены на предельные теоремы о сходимости к устойчивым распределениям порядка $0 < \alpha < 2$, в которых масштабная нормировка осуществляется произвольными, правильно меняющимися последовательностями порядка $1/\alpha$.

Пусть $\{\xi_n\}$ – стационарная в узком смысле последовательность и пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_n$. Как и в [1], будем писать $\xi \overset{d}{=} \eta$, $\xi_n \overset{d}{\to} \eta$ и $\xi_n \overset{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см.,например, [3, § 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ к нулю при $n \to \infty$ [3, с. 393]. Обозначим через $\mathcal{N}(0,1)$ случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1, а через $St(\alpha)$ - случайную величину, имеющую устойчивое распределение с показателем α.

Если при некотором выборе нормирующих констант A_n и $B_n \to \infty$

$$B_n^{-1} S_n - A_n \overset{d}{\to} St(\alpha), \quad n \to \infty, \quad 0 < \alpha \le 2,$$

то будем говорить, что для последовательности $\{\xi_n\}$ справедлива предельная теорема о сходимости к устойчивому закону с показателем α.

Следуя [4], назовем $\{b_n, n = 1, 2, ...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ, если $b_{[x]}$, $x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ, где $[x]$ - целая часть x.

E-mail: grin@math.omsu.omskreg.ru
Омский государственный университет
Работа поддержана грантом РФФИ 03–01–00045

Заметим, что предельные теоремы о сходимости к устойчивым законам могут иметь место при сколь угодно зависимых слагаемых, например, если $\xi_n = St(\alpha)$, $n = 1, 2, ...$, в этом случае можно положить $B_n = n$. Вместе с тем в предельных теоремах для последовательностей с сильным перемешиванием, равномерно сильным перемешиванием, полной регулярностью устойчивое предельное распределение с показателем α может иметь место лишь в случае, когда масштабная нормировка осуществляется правильно меняющимися последовательностями порядка $1/\alpha$ (см.,например, [5, теорема 18.1.1]) При $\alpha \neq 1$ предположение о том, что $\{B_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\alpha$, в дальнейшем понадобится нам для того, чтобы «отсеивать» последовательности, не обладающие слабой зависимостью, подобные тем, о которых говорилось выше.

Будем говорить, что распределение величины ξ_1 принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем α, если

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\} = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} h(x), \quad \mathbf{P}\{\xi_1 < -x\} = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} h(x), \tag{1}$$

$x > 0$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$, $0 < \alpha < 2$, а $h(x)$ – медленно меняющаяся функция.

Пусть $h(x)$ – медленно меняющаяся функция из соотношений (1), а последовательность $\{b_n(\alpha)\}$ такова, что $nb_n^{-\alpha}(\alpha)h(b_n(\alpha)) \to 1$, $n \to \infty$. Такая последовательность существует, является правильно меняющейся порядка $1/\alpha$, и константами вида $b_n(\alpha)$ осуществляется масштабная нормировка в предельных теоремах о сходимости к устойчивым распределениям с показателем α для последовательностей независимых одинаково распределенных величин [6, с. 649].

Через $St(\alpha, c_1, c_2)$ обозначим случайную величину, характеристическая функция которой равна (см. [5, теорема 2.2.2])

$$f_\alpha(t) = \exp\left\{it\gamma - c|t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha)\right)\right\},$$

где $\beta = \dfrac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$ и

$$\gamma = 0, \quad c = (c_1 + c_2)\Gamma(1 - \alpha), \quad \omega(t, \alpha) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\alpha, \text{ при } \alpha \neq 1,$$

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{\sin u}{u^2} - \frac{1}{u(1 + u^2)}\right) du, \ c = (c_1 + c_2)\frac{\pi}{2}, \ \omega(t, \alpha) = \frac{2}{\pi} \ln|t| \ \text{ при } \alpha = 1.$$

Далее, пусть $\{B_n\}$ – правильно меняющаяся последовательность порядка $1/\alpha$, а $g(x)$ – медленно меняющаяся функция такая, что $B_n^\alpha \sim ng(B_n)$. Положим

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \alpha < 1 \\ (c_1 - c_2)n \int\limits_1^{B_n} \dfrac{g(x)}{x} dx & \text{при } \alpha = 1 \\ n\mathbf{E}\xi_1 & \text{при } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Через $\xi_1^\sharp, ..., \xi_n^\sharp$ обозначим *независимые* случайные величины такие, что $\xi_k^\sharp \stackrel{d}{=} \xi_k,\ k = 1, 2, ..., n$.

Как и в [1], символ $n + m \to \infty$ в каком-либо соотношении будет означать, что указанное соотношение выполняется при $n \to \infty$ и при любой последовательности натуральных чисел $m = m(n)$.

Теорема 1. *Пусть $\{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ – стационарная последовательность, у которой распределение величины ξ_1 удовлетворяет условиям (1) и пусть $\{B_n\}$ - правильно меняющаяся последовательность порядка $1/\alpha$.*

Для того чтобы $B_n^{-1}(S_n - A_n) \xrightarrow{d} St(\alpha, c_1, c_2),\ n \to \infty,\ 0 < \alpha < 2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие утверждения

а)

$$\frac{S_{n+m}}{B_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{S_n^\sharp}{B_{n+m}} + \frac{S_m^\sharp}{B_{n+m}}, \quad n + m \to \infty, \qquad (\mathrm{R}_\alpha)$$

б) при любом $x > 0$ и при любой достаточно медленно растущей последовательности $k = k(n) \to \infty,\ n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\pm(S_n - A_n) > xB_{nk}\} \sim n'\mathbf{P}\{\pm\xi_n > xB_{nk}\},\ n \to \infty, \qquad (\mathrm{R}),$$

где $n' = n'(n) \sim B_n^\alpha / h(B_n),\ n \to \infty$. ∎

Замечание 1. Теорему 1 можно интерпретировать так: условия (R_α) и (R) являются минимальными условиями слабой зависимости, при которых выполняются предельные теоремы о сходимости к устойчивым распределениям с показателями $0 < \alpha < 2$ и в которых масштабная нормировка осуществляется правильно меняющимися последовательностями порядка $1/\alpha$.

Лемма 1. *Последовательность $\{B_n^\alpha\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а B_n – правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\alpha$), $0 < \alpha \le 2$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$B_{n+m}^\alpha \sim B_n^\alpha + B_m^\alpha, \quad n + m \to \infty.$$

∎

Доказательство, по существу, повторяет доказательство леммы 1 в [1].

Лемма 2. *Пусть $\{B_n\}$ - правильно меняющаяся последовательность порядка $1/\alpha$ и пусть $m = m(n)$ такова, что*

$$B_n^\alpha B_{n+m}^{-\alpha} \to a, \quad 0 < a < 1.$$

Тогда

а) существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+m} - A_n - A_m}{B_{n+m}} = A$$

и

$$f_\alpha(a^{\frac{1}{\alpha}}t)f_\alpha((1-a)^{\frac{1}{\alpha}}t) = f_\alpha(t)\exp\{itA\}; \qquad (2)$$

б) при любом натуральном k существует

$$A(k) = \lim_{n\to\infty}\frac{A_{nk}-kA_n}{B_{nk}} = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } \alpha \neq 1, \\ (c_1-c_2)\ln k, & \text{\textit{если} } \alpha = 1, \end{cases}$$

и

$$f_\alpha^k\left(k^{-\frac{1}{\alpha}}t\right) = f_\alpha(t)\exp\left\{itA(k)\right\}. \qquad (3)$$

Доказательство. Утверждение а). Нетрудно проверить, что соотношение (2) имеет место при

$$A = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ (c_1-c_2)\left(a\ln a + (1-a)\ln(1-a)\right), & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

и что

$$\frac{A_{n+m}-A_n-A_m}{B_{n+m}} = 0 \ \text{ при } \ \alpha \neq 1.$$

Пусть $\alpha = 1$.

Медленно меняющаяся функция $g(x)$ при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет соотношению

$$\sup_{\varepsilon x\le t\le x}\left|\frac{g(t)}{g(x)} - 1\right| \to 0, \quad x\to\infty, \qquad (4)$$

[4, теорема 1.1]. Из (4) следует

$$n\int_{B_n}^{B_{n+m}}\frac{g(x)}{x}\,dx \sim ng(B_n)\ln\frac{B_{n+m}}{B_n} \sim -B_n\ln a,$$

$$m\int_{B_m}^{B_{n+m}}\frac{g(x)}{x}\,dx \sim -B_m\ln(1-a), \ n\to\infty.$$

Отсюда

$$\frac{A_{n+m}-A_n-A_m}{B_{n+m}} = \frac{(c_1-c_2)}{B_{n+m}}\left(n\int_{B_n}^{B_{n+m}}\frac{g(x)}{x}\,dx + m\int_{B_m}^{B_{n+m}}\frac{g(x)}{x}\,dx\right) \sim$$

$$\sim -(c_1-c_2)(a\ln a + (1-a)\ln(1-a)), \quad n\to\infty.$$

Утверждение б). Нетрудно проверить, что соотношение (3) имеет место при

$$A = \begin{cases} 0 & \text{если } \alpha \neq 1, \\ (c_1-c_2)\ln k & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

и что

$$\frac{A_{nk}-kA_n}{B_{nk}} = 0 \ \text{ при } \ \alpha \neq 1.$$

Пусть $\alpha = 1$. Так как $\{B_n\}$ - правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то $B_{nk} \sim kB_n$, $n\to\infty$, так что

$$\frac{A_{nk}-kA_n}{B_{nk}} = \frac{c_1-c_2}{B_{nk}}nk\int_{B_n}^{B_{nk}}\frac{g(x)}{x}\,dx \sim \frac{c_1-c_2}{B_{nk}}nkg(B_{nk})\ln\frac{B_{nk}}{B_n} \sim (c_1-c_2)\ln k.$$

Лемма доказана. ■

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.

Необходимость. Обозначим $\widetilde{S}_n = S_n - A_n$. По условию при любом $t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E}\exp\left\{itB_n^{-1}\widetilde{S}_n\right\} \to \ \exp\{itSt(\alpha, c_1, c_2)\} = f_\alpha(t), \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $m = m(n)$. Обозначим

$$\Delta(n) = \left|\mathbf{E}\exp\left\{\frac{itS_{n+m}}{B_{n+m}}\right\} - \mathbf{E}\exp\left\{\frac{itS_n}{B_{n+m}}\right\}\mathbf{E}\exp\left\{\frac{itS_m}{B_{n+m}}\right\}\right|.$$

Выполнение соотношения $\Delta(n) \to 0,\ n \to \infty$ при любом $t \in \mathbf{R}$ равносильно условию R_α.

Поскольку B_n^α – правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1

$$B_{n+m}^\alpha \sim B_n^\alpha + B_m^\alpha,\ n \to \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \le a \le 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что

$$B_{n_2+m_2}^{-\alpha} B_{n_2}^\alpha \to a, \quad B_{n_2+m_2}^{-\alpha} B_{m_2}^\alpha \to 1 - a, \quad n \to \infty, \tag{6}$$

где $m_2 = m(n_2)$. Пусть сначала $0 < a < 1$. В силу леммы 2 существует предел

$$A = \lim_{n\to\infty} B_{n_2+m_2}^{-1}\left(A_{n_2+m_2} - A_{n_2} - A_{m_2}\right)$$

и

$$f_\alpha(t) = f_\alpha(a^{\frac{1}{\alpha}}t) f_\alpha((1-a)^{\frac{1}{\alpha}}t)\exp\{-itA\}. \tag{7}$$

В силу (5), (6) и (7)

$$\Delta(n_2) = \left|\mathbf{E}\exp\left\{\frac{it\widetilde{S}_{n_2+m_2}}{B_{n_2+m_2}}\right\} - \mathbf{E}\exp\left\{\frac{it\widetilde{S}_{n_2}}{B_{n_2+m_2}}\right\}\mathbf{E}\exp\left\{\frac{it\widetilde{S}_{m_2}}{B_{n_2+m_2}}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{it\frac{A_{n_2} + A_{m_2} - A_{n_2+m_2}}{B_{n_2+m_2}}\right\}\right| \to \left|f_\alpha(t) - f_\alpha(c^{\frac{1}{\alpha}}t) f_\alpha((1-c)^{\frac{1}{\alpha}}t)\exp\{-itA\}\right| = 0.$$

Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Это означает, что $\Delta(n) \to 0,\ n \to \infty$. Если же $c = 0$ $(c = 1)$, то при $n \to \infty$

$$B_{n_2+m_2}^{-1}\widetilde{S}_{n_2} \to 0 \quad (B_{n_2+m_2}^{-1}\widetilde{S}_{m_2} \to 0)$$

по вероятности, а из (7) легко выводится, что $A = 0$, так что снова $\Delta(n_2) \to 0,\ n \to \infty$, и, следовательно, $\Delta(n) \to 0,\ n \to \infty$. Мы показали, что выполнено условие (R_α). Из условия (R_α) следует, что если последовательность $k = k(n)$ растет достаточно медленно, то

$$B_{nk}^{-1} S_{nk} \overset{d}{\sim} \sum_{j=1}^{k} X_{j,n}, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

где $X_{j,n}, j = 1, ..., k$ – *независимые* случайные величины такие, что $X_{j,n} \overset{d}{=} B_{nk}^{-1} S_n,\ j = 1, ..., k$. По предположению

$$\sum_{j=1}^{k} \left(X_{j,n} - \frac{A_{nk}}{k} \right) \overset{d}{\sim} B_{nk}^{-1} \widetilde{S}_{nk} \xrightarrow{d} St(\alpha, c_1, c_2), \quad \mathbf{n} \to \infty.$$

В силу теоремы 1.7.3 из [5] при любом $x > 0$

$$k\mathbf{P} \left\{ S_n - \frac{A_{nk}}{k} > xB_{nk} \right\} \to \frac{c_1}{x^\alpha},$$

$$k\mathbf{P} \left\{ S_n - \frac{A_{nk}}{k} < -xB_{nk} \right\} \to \frac{c_2}{x^\alpha},\ n \to \infty. \qquad (9)$$

Если $k = k(n) \to \infty$ растет достаточно медленно, то в силу утверждения б) леммы 2

$$B_{nk}^{-1} \left(\frac{A_{nk}}{k} - A_n \right) = O \left(\frac{\ln k}{k} \right) = o(1),\ n \to \infty, \qquad (10)$$

и из (9) и (10) следует теперь

$$k\mathbf{P} \left\{ \widetilde{S}_n > xB_{nk} \right\} \to \frac{c_1}{x^\alpha}, \quad k\mathbf{P} \left\{ \widetilde{S}_n < -xB_{nk} \right\} \to \frac{c_2}{x^\alpha},\ n \to \infty. \qquad (11)$$

Далее, пусть $n' = n'(n) \sim B_n^\alpha / h(B_n)$. Так как $(b_{n'}(\alpha))^\alpha / h(b_{n'}(\alpha)) \sim n',\ n \to \infty$, то $B_n \sim b_{n'}(\alpha),\ n \to \infty$ [4, с.27]. $\{B_n^\alpha\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1, так что $(nk)' \sim B_{nk}^\alpha / h(B_{nk}) \sim kB_n^\alpha / h(B_n)$. С помощью этого соотношения, определения $b_n(\alpha)$ и (1) выводим

$$n'k\mathbf{P} \left\{ \xi_1 > xB_{nk} \right\} \sim (nk)'\mathbf{P} \left\{ \xi_1 > xb_{(nk)'}(\alpha) \right\} \sim \frac{c_1}{x^\alpha},$$

$$n'k\mathbf{P} \left\{ \xi_1 < -xB_{nk} \right\} \sim (nk)'\mathbf{P} \left\{ \xi_1 < -xb_{(nk)'}(\alpha) \right\} \sim \frac{c_2}{x^\alpha}, \qquad (12)$$

что вместе с (11) дает нам условие (R).

Достаточность.

Пусть выполнены условия (R_α) и (R). Так же, как в доказательстве необходимости, из условия (R_α) выводим (8). Так как $X_{j,n} - B_{nk}^{-1} A_n \overset{d}{=} B_{nk}^{-1} \widetilde{S}_n,\ j = 1, ..., k$, то в силу [5, теорема 1.7.3] с учетом утверждения б) леммы 2 получаем, что для того, чтобы

$$B_{nk}^{-1} \widetilde{S}_{nk} \overset{d}{\sim} \sum_{j=1}^{k} \left(X_{j,n} - B_{nk}^{-1} A_n \right) - A(k) \xrightarrow{d} St(\alpha, c_1, c_2), \quad n \to \infty, \qquad (13)$$

достаточно, чтобы выполнялись соотношения (11) и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} k \int\limits_{|x| < \varepsilon} x^2 \, d\mathbf{P} \left\{ \widetilde{S}_n \le xB_{nk} \right\} = 0. \qquad (14)$$

Соотношения (11) следуют из (12) и условия (R), и в силу (11)

$$k \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 \, d\mathbf{P}\left\{\widetilde{S}_n \le xB_{nk}\right\} = O\left(\varepsilon^{2-\alpha}\right) = o_\varepsilon(1),$$

и, следовательно, имеет место (14). Пусть $nk < m < n(k+1)$. Последовательность $\{B_n\}$ является правильно меняющейся с положительным показателем, поэтому без ограничения общности ее можно считать неубывающей [4, с. 26], так что

$$\sup_{nk \le m \le n(k+1)} \left| \frac{B_m}{B_{nk}} - 1 \right| \le \left| \frac{B_{n(k+1)}}{B_{nk}} - 1 \right| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{15}$$

и в силу условия (R) и (15)

$$\mathbf{P}\left\{ \left| \sum_{j=nk+1}^{m} \xi_j - A_{m-nk} \right| > \varepsilon B_{nk} \right\} \le \mathbf{P}\left\{ \left| \widetilde{S}_{m-nk} \right| > \varepsilon B_{(m-nk)k} \right\} \sim$$

$$\sim (m-nk)\mathbf{P}\left\{ |\xi_1| > \varepsilon B_{(m-nk)k} \right\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

то есть

$$B_{nk}^{-1} \left(\sum_{j=nk+1}^{m} \xi_j - A_{m-nk} \right) \to 0 \tag{16}$$

по вероятности. Аналогично тому, как выводится утверждение a) леммы 2 при $c = 0$, нетрудно получить

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_m - A_{nk} - A_{m-nk}}{B_{nk}} = 0.$$

Вместе с (13), (15) и (16) это соотношение дает нам $B_m^{-1}\widetilde{S}_m \xrightarrow{d} St(\alpha, c_1, c_2), \quad m \to \infty$. Теорема 2 доказана. ■

Литература

1. Гринь А.Г. *О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей* // Теория вероятн. и ее примен. 2002. Т.47, N. 3. С. 554-558.
2. Гринь А.Г. *О минимальных условиях слабой зависимости в предельных теоремах для стационарных последовательностей* // Теория вероят.и ее примен. (в печати).
3. Лоэв М. *Теория вероятностей.* М.: ИЛ, 1962.
4. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* М.: Наука, 1985.
5. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. *Независимые и стационарно связанные величины.* М.: Наука, 1965.
6. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т.2. М.: Мир, 1984.