Математические структуры и моделирование
2004, вып. 14, с. 66–72

УДК 539.17

О.Н. Вязанкин, М.Ю. Ерехинский

МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВНУТРИЯДЕРНЫХ ПЕРЕХОДОВ В МОДЕЛИ ПРЕДРАВНОВЕСНОГО РАСПАДА ЯДЕР

В модели предравновесного распада ядра (МПР) в традиционной формулировке [1–3] для описания эволюции системы во времени необходимо задать вероятности разрешенных внутриядерных переходов. Состояние системы характеризуется числом элементарных возбуждений (частиц и дырок).

Традиционно для определения вероятностей внутриядерных переходов из состояния с N элементарными возбуждениями в состояние с N' возбуждениями используется соотношение вида [2, 4]:

$$\lambda_{NN'}(E) = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{NN'}|^2 \rho_{N'}(E)\,, \quad (N' = N + \Delta N)\,. \tag{1}$$

Здесь предполагается, что внутриядерные переходы происходят за счет оператора остаточного двухчастичного взаимодействия $\hat{V}$ ($\Delta N = 0,\ \pm 2$); $\rho_{N'}(E)$ — плотность конечных состояний, которую можно определить согласно формуле Эриксона [5]. Поскольку вычисление величины $|V_{NN'}|^2$ достаточно трудная задача, обычно в МПР ее заменяют на феноменологическую зависимость вида [3]:

$$|V_{NN'}|^2 \simeq |M|^2 = \frac{190\,\text{МэВ}^3}{EA^3}\,. \tag{2}$$

В данной работе на основе формализма случайных матриц [6] предпринята попытка микроскопического определения квадрата матричного элемента $|V_{NN'}|^2$ в приближении разреженного газа элементарных возбуждений.

1. Микроскопический подход

Рассмотрим квантовую систему с N элементарными возбуждениями, находящуюся в состоянии, описываемом набором квантовых чисел ν. Волновая функция $|\, N\,\nu\rangle$ системы при этом удовлетворяет очевидному условию ортонормированности

$$\langle N'\nu' \mid N\nu\rangle = \delta_{NN'}\delta_{\nu\nu'}\,.$$

Омский государственный университет

Оценим далее размерность конфигурационного пространства с N элементарными возбуждениями в системе.

При средних энергиях возбуждения (порядка энергии Ферми) независимые конфигурации частиц могут быть образованы одночастичными конфигурациями $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N$ вблизи поверхности Ферми. Размерность каждого подпространства одночастичных конфигураций

$$d_1 = 4 \sum_{l=0}^{L} (2l+1) = 4(L+1)^2 \,, \tag{3}$$

где $L \sim A^{1/3}$ — максимально возможный угловой момент одночастичного состояния; A — массовое число. Множитель 4 учитывает вырождение по спин-изоспиновым квантовым числам. Тогда системе с N элементарными возбуждениями соответствует конфигурационное пространство размерности [6]

$$d_N = C_{d_1}^N \approx \frac{d_1^N}{N!} \,. \tag{4}$$

Последнее равенство справедливо при $d_1 \gg N$ (приближение разреженного газа).

Аппарат теории случайных матриц [6–8] позволяет свести все вычисления с многочастичными величинами к вычислениям с двухчастичными величинами. В системе с N элементарными возбуждениями во время каждого акта взаимодействия можно выделить две подсистемы: первая, состоящая из k возбуждений, «актеров», непосредственных участников взаимодействия, и вторая с $(N-k)$ возбуждениями, «зрителями», которые в данный момент не взаимодействуют. В традиционном подходе МПР-переходы осуществляются за счет двухчастичного остаточного взаимодействия, следовательно, $k = 2$. Процессы перехода в такой системе непосредственно касаются только двух частиц и описываются двухчастичными величинами.

Внутриядерным переходам отвечает только остаточное взаимодействие, т.е. часть взаимодействия v, не включающая среднее поле ядра. В соответствии с теорией случайных матриц спектральным усреднением взаимодействия можно получить среднее поле ядра. Тогда

$$\hat{V} = \hat{v} - \overline{v} \,,$$

где спектральное среднее в случае двухчастичного взаимодействия $\hat{v}$ определяется как

$$\overline{v} \equiv \frac{1}{d_2} \mathrm{Tr} \hat{v} \,, \tag{5}$$

а d_2 определяется формулой (4). Искомое спектральное среднее квадрата матричного элемента оператора перехода

$$\overline{|V_{22}|^2} \equiv \frac{1}{d_2^2} \sum_{\nu\,\nu'} \langle 2\,\nu' \mid \hat{V} \mid 2\,\nu \rangle^2 = \frac{1}{d_2} (\overline{v^2} - \overline{v}^2) \,. \tag{6}$$

Для описания эволюции многочастичной системы нам достаточно двухчастичной волновой функции подсистемы «актеров»:

$$|\,2\,\nu\rangle = |\,2\,\nu_1\,\nu_2\rangle\,.$$

Для краткости «2» будем в дальнейшем опускать.

Во взаимодействии участвует пара независимых элементарных возбуждений, описываемых одночастичными волновыми функциями. Антисимметризацией двухчастичной волновой функции можно пренебречь в силу приближения разреженного газа. В результате двухчастичная волновая функция подсистемы «актеров» факторизуется:

$$|\,\nu_1\,\nu_2\rangle = |\,n_1\,l_1\,m_1\rangle\;|\,n_2\,l_2\,m_2\rangle\,, \tag{7}$$

$$|\,n\,l\,m\rangle = \frac{1}{r}u_{nl}(r)Y_{lm}(\vec{n})\,, \tag{8}$$

где n, l, m — главное, орбитальное и магнитное квантовые числа соответствующих частичных и дырочных состояний. Здесь использовано предположение об отсутствии спина и изоспина у элементарных возбуждений. Заметим также, что, рассматривая переходы вблизи границы Ферми, мы ограничиваемся лишь одночастичными состояниями, лежащими в последней оболочке.

Спин-изоспиновая инвариантность частичных и дырочных состояний может быть легко учтена в дальнейших расчетах. Для этого удобно ввести величины

$$\widetilde{d_1} = \sum_{l=0}^{L}(2l+1) = (L+1)^2\,, \quad \widetilde{d_N} = \frac{\widetilde{d_1}^{\,N}}{N!}\,, \tag{9}$$

отличающиеся от определений (3), (4) множителями $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4^N}$ соответственно. При этом формулы (5), (6) переписываются в виде

$$\overline{v} = \frac{1}{\widetilde{d_2}}\,\mathrm{Tr}\hat{v}\,, \tag{10}$$

$$\overline{|V_{22}|^2} = \frac{1}{\widetilde{d_2}}\,(\overline{v^2} - \overline{v}^2)\,. \tag{11}$$

В отличие от (5) и (6) здесь $\mathrm{Tr}\hat{v}$ и $\mathrm{Tr}\hat{v}^2$ уже не включают суммирование по спиновому и изоспиновому квантовым числам в силу сделанного предположения (7) относительно базиса $|\,\nu_1\,\nu_2\rangle$.

Для нахождения спектральных средних

$$\overline{v} = \frac{1}{\widetilde{d_2}}\frac{1}{2}\sum_{\nu_1}^{\widetilde{d_1}}\sum_{\nu_2}^{\widetilde{d_1}}\langle\nu_1\,\nu_2\,|\,\hat{v}\,|\,\nu_1\,\nu_2\rangle\,, \tag{12}$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{\widetilde{d_2}}\frac{1}{4}\sum_{\nu_1'}^{\widetilde{d_1}}\sum_{\nu_2'}^{\widetilde{d_1}}\sum_{\nu_1}^{\widetilde{d_1}}\sum_{\nu_2}^{\widetilde{d_1}}\left|\langle\nu_1'\,\nu_2'\,|\,\hat{v}\,|\,\nu_1\,\nu_2\rangle\right|^2 \tag{13}$$

необходимо вычислить двухчастичные матричные элементы с волновой функцией вида (7).

2. Вычисление $\overline{|V_{22}|^2}$

С целью разделения угловых и радиальных переменных представим двухчастичное взаимодействие $\hat{v}$ в виде:

$$\hat{v}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 4\pi \sum_{\lambda} v_{\lambda}(r_1, r_2) \sum_{\mu} Y^*_{\lambda\mu}(\vec{n}_1) Y_{\lambda\mu}(\vec{n}_2)\,. \tag{14}$$

Тогда, используя технику отделения угловых переменных, легко получить окончательное выражение для матричного элемента, входящего в выражения (12) и (13):

$$\begin{aligned}\langle \nu_1' \, \nu_2' \mid \hat{v} \mid \nu_1 \, \nu_2 \rangle = (-1)^{m_1'+m_2'} [(2l_1'+1)(2l_2'+1)(2l_1+1)(2l_2+1)]^{1/2} \times \\ \times \sum_{\lambda} f_{\lambda} (2\lambda+1) \begin{pmatrix} l_1' & l_1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2' & l_2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ \times \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \begin{pmatrix} l_1' & l_1 & \lambda \\ -m_1' & m_1 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2' & l_2 & \lambda \\ -m_2' & m_2 & \mu \end{pmatrix}\,,\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$f_{\lambda} = \int dr_1 \, dr_2 \, u_{l_1}(r_1) u_{l_1'}(r_1) v_{\lambda}(r_1, r_2) u_{l_2}(r_2) u_{l_2'}(r_2)\,. \tag{16}$$

С использованием обозначений (8) на основе формул (12) и (15) для $\overline{v}$ получим:

$$\begin{aligned}\overline{v} = \frac{1}{2\widetilde{d}_2} \sum_{l_1 \, l_2}^{L} \sum_{m_1 \, m_2} (-1)^{m_1+m_2} (2l_1+1)(2l_2+1) \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda} (2\lambda+1) \times \\ \times \begin{pmatrix} l_1 & l_1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & l_2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_1 & \lambda \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 & l_2 & \lambda \\ -m_2 & m_2 & 0 \end{pmatrix}\,.\end{aligned} \tag{17}$$

Использование свойств $3j$-символов и суммирование по магнитным квантовым числам окончательно дает:

$$\overline{v} = f_0\,.$$

Перейдем далее к вычислению $\overline{v^2}$ (13). Подставляя (15) в (13), с использованием обозначений (8) после суммирования по проекциям угловых моментов с учетом свойства ортогональности $3j$-символов легко получить:

$$\begin{aligned}\overline{v^2} = \frac{1}{4\widetilde{d}_2} \sum_{l_1' \, l_2' \, l_1 \, l_2}^{L} (2l_1'+1)(2l_2'+1)(2l_1+1)(2l_2+1) \times \\ \times \sum_{\lambda} (2\lambda+1) f_{\lambda}^2 \begin{pmatrix} l_1' & l_1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} l_2' & l_2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Заметим, что слагаемое с $\lambda = 0$ в (18) дает точное значение, равное $\frac{1}{2}f_0^2 = \frac{1}{2}\overline{v}^2$. В оставшемся выражении можно выделить повторяющиеся двойные суммы:

$$\overline{v^2} = \frac{\overline{v}^2}{2} + \frac{1}{4\widetilde{d}_2}\sum_{\lambda=1}(2\lambda+1)f_\lambda^2 \sum_{l'_1\, l_1}^{L}(2l'_1+1)(2l_1+1)\begin{pmatrix} l'_1 & l_1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \times$$
$$\times \sum_{l'_2\, l_2}^{L}(2l'_2+1)(2l_2+1)\begin{pmatrix} l'_2 & l_2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 . \quad (19)$$

Последнее выражение можно записать в виде:

$$\overline{v^2} = \frac{\overline{v}^2}{2} + \frac{1}{4\widetilde{d}_2}\sum_{\lambda=1}(2\lambda+1)f_\lambda^2 \mathcal{F}_{L\,\lambda}\,,$$

где

$$\mathcal{F}_{L\,\lambda} = \left[\sum_{l'_1\, l_1}^{L}(2l'_1+1)(2l_1+1)\begin{pmatrix} l'_1 & l_1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\right]^2 .$$

Для упрощения аналитических вычислений выберем двухчастичное взаимодействие $v_\lambda(r_1, r_2)$ в виде «поверхностного» взаимодействия [9]

$$v_\lambda(r_1, r_2) = -\frac{F_0}{A}[u_{n\,l}(R)]^{-4}\delta(r_1 - r_2)\delta(r_1 - R)\,, \quad (20)$$

не зависящим от λ. В этом случае интеграл (16) не зависит от одночастичного базиса и легко вычисляется. В результате можно получить

$$\overline{v} = f_0 = -\frac{F_0}{A}\,. \quad (21)$$

Используя тот факт, что $f_\lambda = f_0$, для $\overline{v^2}$ имеем

$$\overline{v^2} = \frac{\overline{v}^2}{2} + \frac{\overline{v}^2}{4\widetilde{d}_2}\sum_{\lambda=1}(2\lambda+1)\mathcal{F}_{L\,\lambda} = \overline{v}^2\left(\frac{1}{2} + G_L\right)\,,$$

где

$$G_L = \frac{1}{2(L+1)^4}\sum_{\lambda=1}(2\lambda+1)\mathcal{F}_{L\,\lambda}\,. \quad (22)$$

Последнее выражение не может быть вычислено аналитически. Однако хорошая оценка для него дается аппроксимирующим выражением

$$G_L = \alpha L^\beta + \gamma L^\varepsilon\,,$$

полученным в результате численного суммирования в (22), с параметрами аппроксимации $\alpha = 0,21$, $\beta = 2,0$, $\gamma = 0,39$, $\varepsilon = 1,2$. Приближенно можно получить чуть более простое выражение:

$$G_L = \frac{1}{4}L(L+2)\,, \quad (23)$$

дающее расхождение с вышеприведенной аппроксимацией в области интересующих нас значений L не более 10%. Для расчетных оценок удобно воспользоваться приближенным соотношением (23). Однако стоит отметить, что подобные простые приближения при вычислении $\overline{v^2}$ возможны только в силу специфичности выбора взаимодействия элементарных возбуждений $\hat{v}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, задаваемого соотношениями (14) и (20). В результате получим

$$\overline{v^2} = \overline{v}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} L(L+2) \right) .$$

В соответствии с формулой (11) спектральное среднее квадрата матричного элемента оператора перехода запишется в виде:

$$\overline{|V_{22}|^2} \; = \; \frac{1}{\frac{1}{2}(L+1)^4} \overline{v}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} L(L+2) - 1 \right) \; = \; \left(\frac{F_0}{A} \right)^2 \frac{\left[\frac{1}{2} L(L+2) - 1 \right]}{(L+1)^4} , \quad (24)$$

где использовано соотношение (21).

3. Обсуждение результатов

Максимальное значение углового момента в ядре можно оценить выражением [10]

$$L \simeq \frac{1}{2} k_F R \, , \qquad (25)$$

где $k_F = 1,2$ фм$^{-1}$, $R = 1,25 \; A^{1/3}$ фм. Тогда приближенно получаем зависимость от массового числа

$$\overline{|V_{22}|^2} \sim A^{-8/3} \, .$$

Для сравнения из феноменологического выражения (2) для квадрата матричного элемента

$$|M|^2 \sim A^{-3} \, .$$

Важным отличием $\overline{|V_{22}|^2}$ от $|M|^2$ является независимость от энергии возбуждения ядра, поскольку усреднение производится по одночастичным состояниям невозбужденного ядра. Однако наше микроскопическое рассмотрение имеет ограничение по энергии, накладываемое приближением разреженного газа. Сравнивать величины квадратов матричных элементов можно лишь для энергий $E \lesssim E_F$.

Оценим величину $\overline{|V_{22}|^2}$ для изобарных ядер с $A = 100$. Как указывается в [11], параметр $F_0 = 25$ МэВ для «поверхностного» взаимодействия элементарных возбуждений. Согласно (25) $L \approx 3$. В результате приходим к оценке $\overline{|V_{22}|^2} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$ МэВ^2. Для сравнения феноменологическая оценка квадрата матричного элемента по формуле (2) при различных энергиях возбуждения приведена в табл. 1. Из сопоставления расчетного значения $\overline{|V_{22}|^2}$ с феноменологической оценкой (2) видно, что с ростом энергии возбуждения отличие составляет 2–3 порядка. В этой связи следует обратить внимание на приближения, сделанные при вычислении $\overline{|V_{22}|^2}$.

Таблица 1. Энергии возбуждения E и соответствующие им значения квадрата матричного элемента $|M|^2$ для ядер с $A = 100$.

E, МэВ	1	20	40	80	100
$\|M\|^2$, МэВ^2	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$9,5 \cdot 10^{-6}$	$4,7 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$

Во-первых, в приближении разреженного газа не учтен принцип Паули, влияние которого должно приводить к уменьшению спектрального среднего. Во-вторых, необходимо рассмотреть другие варианты параметризации двухчастичного ядерного взаимодействия, имеющиеся в литературе. В частности, использовать объемное взаимодействие вместо поверхностного. Наконец, исследовать влияние выбора различных одночастичных базисов на величину $\overline{|V_{22}|^2}$. Все это может составить предмет дальнейшего исследования.

Литература

1. Griffin J.J. // Phys. Rev. Lett. 1966. V.17. P.478.
2. Blann M., Cline C. // Nucl. Phys. 1971. V.A172. P.255.
3. Toneev V.D., Seidel K., Seeliger D. et al. // Sov. J. Part. Nucl. 1976. V.7. P.192.
4. Гудима К.К., Осоков Г.А., Тонеев В.Д. // ЯФ. 1975. Т.21. С.260.
5. Ericson T. // Adv. Phys. 1960. V.9. P.425.
6. Brody T.A. et al. *Random matrix physics: spectrum and strength fluctuations.* // Rev. Mod. Phys. 1981. V. 53. P.385-479.
7. Wong S.S.M. *Nuclear Statistical Spectroscopy.* Oxford University Press, 1986.
8. Kalka H. *Propagation of k-body forces from k- to N-particle space.* // Phys. Lett. B. 1993. V. 302. P.370.
9. Ring P., Shuck P. *The Nuclear Many-Body Problem.* New York: Springer-Verlag, 1980. P.179.
10. Bohr A., Mottelson B.R. *Nuclear Structure.* // Reading Benjamin. 1975. V.1.
11. Glaudemans P.W.M., Brussard P.J. *Shell-Model Applications in Nuclear Spectroscopy.* Amsterdam: North Holland, 1977.