Математические структуры и моделирование
2005, вып. 15, с. 66–73

УДК 539.12:530.145

О КВАТЕРНИОННОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

А.И. Бреев, В.В. Клишевич

Мы рассматриваем кватернионные формы уравнения Дирака и их связи с уравнением Гельмгольца. Дается доказательство формулы Коши.

Одно из направлений, связанное с разными обобщениями уравнения Дирака, основывается на различном представлении оператора Дирака как в плоском, так и в искривленном пространстве. В работе [1] предложена формулировка теории уравнения Дирака в случае, когда волновая функция рассматривается как полный набор антисимметричных тензорных полей по отношению к группе общекоординатных преобразований. В работе [2] дана матричная формулировка этого формализма, приспособленная для исследований соответствующей квантовой теории. Интересным аспектом построенной конструкции является факт «точного» извлечения квадратного корня из оператора Клейна-Гордона. Иначе говоря, квадрат оператора Дирака тождественно совпадает с оператором Клейна-Гордона как в плоском, так и в искривленном пространстве. В классической теории уравнения Дирака на римановом многообразии это свойство не наблюдается [3].

В данной статье мы изучаем одно специальное представление, которое было введено в работе Кравченко [4]. Мы работаем с уравнением Дирака в кватернионной форме. Фактически рассмотренное представление есть аналог уравнения Дирака в трехмерном евклидовом пространстве. Основной интерес к данной конструкции связан с различными приложениями в математической физике, в частности с уравнением Гельмгольца, и в кватернионном анализе, который рассматривается как некоторое обобщение комплексного анализа.

Краткое содержание нашей статьи: в разделе 1 приведены сведения о кватернионах, в разделе 2 — уравнение Гельмгольца и рассмотрены условия излучения Зоммерфельда, которые обычно используют для выделения физически значимых решений. Аналог этих условий используется в разделе 3 для введенной кватернионной формы уравнения Дирака. Раздел 3 основной. Здесь мы определяем правую и левую кватернионные формы оператора Дирака, представляем эти формы в виде скалярной и векторной части, а также находим фундаментальные решения. В заключительной 4-й части дано доказательство кватернионной интегральной формулы Коши, которая есть аналог известной формулы комплексного анализа.

Омский государственный университет.
E-mail: `breev_ai@list.ru, klishe@univer.omsk.su`

1. Кватернионы

Кватернион a может быть представлен в виде линейной комбинации своих компонент ($\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ для действительных кватернионов и $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$ для комплексных кватернионов) и элементов ортонормированного базиса i_k следующим образом:

$$a = \sum_{k=0}^{3} a_k i_k,$$

где $i_0 = 1$ и $\{i_k \mid k = 1, 2, 3\}$ – кватернионные мнимые единицы, обладающие свойствами: $i_k^2 = -1$, $k = 1, 2, 3$ и

$$i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3, \quad i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1, \quad i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2.$$

В некоторых случаях кватернион a рассматривают в виде суммы скалярной $\mathrm{Sc}(a) = a_0$ и векторной части

$$\mathrm{Vec}(a) = \vec{a} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3.$$

Используя это представление, мы можем определить результат умножения двух произвольных кватернионов a и b в форме

$$a \cdot b = a_0 b_0 - \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + a_0 \vec{b} + \vec{a} b_0 + \left[\vec{a} \times \vec{b} \right], \tag{1}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное умножение, $[\cdot \times \cdot]$ – векторное.

Кватернион, сопряженный кватерниону $a = a_0 + \vec{a}$, определяется как

$$\overline{a} = a_0 - \vec{a}.$$

Из (1) легко получить, что

$$a \cdot \overline{a} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |a|^2. \tag{2}$$

Сопряженные кватернионы обладают свойством

$$\overline{a \cdot b} = \overline{b} \cdot \overline{a}.$$

Отметим, что

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Из (2) следует, что каждый ненулевой действительный кватернион a обратим и обратный кватернион дается формулой $a^{-1} = \overline{a}/|a|^2$.

Модуль в (2) может быть введен как

$$|a| = \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}$$

или в виде

$$|a|^2 = |\operatorname{Re} a|^2 + |\operatorname{Im} a|^2.$$

Здесь $|a_k|^2 = a_k a_k^*$ и «*» означает комплексное сопряжение.

2. Уравнение Гельмгольца

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \nu^2 u = -f(x). \tag{3}$$

В [5] показано, что

$$\theta_{\pm\nu}(x) = -\frac{e^{\pm i\nu|x|}}{4\pi\,|x|}$$

есть фундаментальное решение оператора Гельмгольца:

$$(\Delta + \nu^2)\theta_{\pm\nu} = \delta. \tag{4}$$

Чтобы выделить класс единственности решения для уравнения Гельмгольца в неограниченных областях, являющихся внешностью ограниченных областей, нужно накладывать дополнительные ограничения на поведение решений на бесконечности. Одними из таких ограничений являются условия излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} \mp i\nu u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \to \infty\,, \tag{5}$$

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{6}$$

Знак минус в формуле (5) соответствует расходящимся волнам, а знак плюс — сходящимся.

Решение уравнения Гельмгольца (3), удовлетворяющее условиям излучения (5) и (6), можно рассматривать как амплитуду установившегося колебания, полученную с помощью предельного перехода из неустановившихся колебаний, вызванных периодическим внешним возмущением с частотой ν и амплитудой $f(x)$.

3. Кватернионная форма оператора Дирака

Пусть заданная функция f принимает значения в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ и дифференцируема в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Следуя статье [4], определим оператор Moisil-Theodoresco

$$D_l f = \sum_{k=1}^{3} i_k \partial_k f, \tag{7}$$

где

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Определение 1. Оператор (7) называется (левой) кватернионной формой трехмерного оператора Дирака.

Получим представление оператора (7) в виде векторной и скалярной части

$$\begin{aligned}
D_l = \sum_{k=1}^{3} i_k \partial_k f =& i_1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} i_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} i_3 \right) + \\
&+ i_2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} i_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} i_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} i_3 \right) + \\
&+ i_3 \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} i_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} i_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} i_3 \right) = \\
&= - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} i_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} i_3 \right) + \\
&+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) i_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) i_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) i_3 = \\
&= \left(-\mathrm{div} \vec{f}, \mathrm{grad}\, f_0 + \mathrm{rot} \vec{f} \right), \qquad (8)
\end{aligned}$$

где $\vec{f}$ и f_0 — векторная и скалярная часть кватернионной функции f соответственно. Аналогично определяется правый оператор Moisil-Theodoresco:

$$D_r f = \sum_{k=1}^{3} (\partial_k f) i_k. \qquad (9)$$

Определение 2. Оператор (9) называется (правой) кватернионной формой трехмерного оператора Дирака.

Поступая так же, как в (8), получим

$$D_r f = \left(-\mathrm{div} \vec{f}, \mathrm{grad}\, f_0 - \mathrm{rot} \vec{f} \right).$$

Далее мы будем работать только с D_l и для этой формы оператора Дирака будем использовать символ D. Заметим, что

$$\begin{aligned}
D_l^2 f = D_r^2 f =& i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(i_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(i_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(i_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) + \\
&+ i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(i_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(i_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(i_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) + \\
&+ i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(i_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(i_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(i_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = \\
&= - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right) = -\Delta f.
\end{aligned}$$

Введем оператор

$$D_{\pm\nu} = D \pm \nu I,$$

где ν – комплексное число. С помощью этого оператора можно представить оператор Гельмгольца в форме

$$\Delta + \nu^2 = -(D + \nu)(D - \nu) = -D_\nu D_{-\nu}. \qquad (10)$$

Лемма 1. *Фундаментальное решение оператора $D_{\pm\nu}$ имеет вид*

$$\mathcal{K}_{\pm\nu} = -(D \mp \nu)\theta_\nu. \tag{11}$$

Доказательство. Из формулы (10) следует, что

$$(\Delta + \nu^2)\theta_\nu = -D_\nu D_{-\nu}\theta_\nu = \delta.$$

Функция $-(D-\nu)\theta_\nu$ является фундаментальным решением оператора D_ν:

$$\mathcal{K}_\nu = -(D-\nu)\theta_\nu. \tag{12}$$

Заменим ν на $-\nu$ и, учитывая формулу (4), получим

$$-(D-\nu)(D+\nu)\theta_{-\nu} = -(D-\nu)(D+\nu)\theta_\nu = D_{-\nu}(-(D+\nu)\theta_\nu) = \delta.$$

То есть функция $-(D+\nu)\theta_\nu$ является фундаментальным решением оператора $D_{-\nu}$. Учитывая (12), получим (11). ■

Найдем представление $\mathcal{K}_\nu$ в виде скалярной и векторной части. В силу формул (11), (8), а также того, что θ_ν является скаляром, получим:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{\pm\nu} =& -(D \mp \nu)\theta_\nu = -D\theta_\nu \pm \nu\theta_\nu = \\ =&\mathrm{div}(\theta_\nu) - \mathrm{grad}(\theta_\nu) - \mathrm{rot}(\theta_\nu) \pm \nu\theta_\nu = (\pm\nu\theta_\nu, -\mathrm{grad}(\theta_\nu)).\end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$D_r\mathcal{K}_{\pm\nu} = D\mathcal{K}_{\pm\nu} \tag{14}$$

(так как D_r отличается от D только знаком перед ротором, а из предыдущей формулы видно, что ротор $\mathcal{K}_{\pm\nu}$ равен нулю).

Отдельно вычислим градиент

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(\theta_\nu) =& \sum_{k=1}^{3}(\partial_k\theta_\nu)i_k = -\sum_{k=1}^{3}\frac{i\nu x_k - \frac{x_k}{|x|}}{4\pi|x|^2}i_k e^{i\nu|x|} = \\ =& -\frac{e^{i\nu|x|}}{4\pi|x|}\left(i\nu\frac{\vec{x}}{|x|} - \frac{\vec{x}}{|x|^2}\right) = -\theta_\nu\left(\frac{\vec{x}}{|x|^2} - i\nu\frac{\vec{x}}{|x|}\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, учитывая (13), получаем выражение для $\mathcal{K}_{\pm\nu}$ в явном виде:

$$\mathcal{K}_{\pm\nu} = \left(\pm\nu + \frac{\vec{x}}{|x|^2} - i\nu\frac{\vec{x}}{|x|}\right)\theta_\nu.$$

Приведем без доказательства важную теорему, которая будет использована в дальнейшем.

Теорема 1. (Кватернионная формула Стокса) *Рассмотрим область Ω, лежащую в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть f и g есть кватернионные функции (из $\mathbb{H}(\mathbb{C})$), дифференцируемые в этой области и непрерывные на ее границе. Тогда*

$$\int_\Omega ((D_r f(y))g(y) + f(y)(Dg(y)))\,dy = \int_\Gamma f(y)\vec{n}(y)g(y)d\Gamma_y, \tag{16}$$

где $\vec{n}(y)$ — внешняя нормаль к поверхности Γ : $\vec{n}(y) = \sum_{k=1}^{3} i_k n_k(y)$.

4. Кватернионная интегральная формула Коши

Представим интегральный оператор

$$K_\nu[f](x) = -\int_\Gamma \mathcal{K}_\nu(x-y)\vec{n}(y)f(y)d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \tag{17}$$

который может быть рассмотрен как аналог интегрального оператора Коши вследствие теоремы, приведенной ниже.

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$\mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y}) = -\mathcal{K}_\nu(\vec{y}-\vec{x}) + 2\nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}). \tag{18}$$

Доказательство. Используя (13) и (15), получим:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y}) &= -D\theta_\nu(\vec{x}-\vec{y}) + \nu\theta_\nu(\vec{x}-\vec{y}) = \\
&= -\operatorname{grad}\theta_\nu(\vec{x}-\vec{y}) + \nu\theta_\nu(\vec{x}-\vec{y}) = \\
&= \left(\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|x-y|^2} - i\nu\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|x-y|}\right)\theta_\nu(\vec{x}-\vec{y}) + \nu\theta_\nu(\vec{x}-\vec{y}) = \\
&= -\left(\frac{\vec{y}-\vec{x}}{|y-x|^2} - i\nu\frac{\vec{y}-\vec{x}}{|y-x|}\right)\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}) + \nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}) = \\
&= -\left(\left(\frac{\vec{y}-\vec{x}}{|y-x|^2} - i\nu\frac{\vec{y}-\vec{x}}{|y-x|}\right)\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}) + \nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x})\right) + \\
&+ 2\nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}) = -\mathcal{K}_\nu(\vec{y}-\vec{x}) + 2\nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}).
\end{aligned}$$

■

Теорема 2. (Кватернионная интегральная формула Коши). *Пусть функция $f \in \mathbb{H}((C))$ дифференцируема в области Ω из $\mathbb{R}^3$ и непрерывна на ее границе. Тогда если $f \in \ker D_\nu(\Omega)$, то*

$$f(x) = K_\nu[f](x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Доказательство. Применим к (17) кватернионную формулу Стокса (16):

$$\begin{aligned}
K_\nu[f](x) &= -\int_\Gamma \mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})\vec{n}(\vec{y})f(\vec{y})d\Gamma_y = \\
&= -\int_\Omega \left(\{D_r\mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})\}f(\vec{y}) + \mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})\{Df(\vec{y})\}\right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Воспользовавшись формулами (19), (14), леммой 2 и учитывая, что $D_\nu f = 0$,

преобразуем (19):

$$
\begin{aligned}
K_\nu[f](x) &= -\int_\Omega (\{D\mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})\}f(\vec{y}) + \mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})\{Df(\vec{y})\})\,dy = \\
&= -\int_\Omega (\{D_\nu\mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y}) - \nu\mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})\}f(\vec{y}) + \\
&\qquad + \mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})\{D_\nu f(\vec{y}) - \nu f(\vec{y})\})\,dy = \\
&= -\int_\Omega (\{D_\nu(-\mathcal{K}_\nu(\vec{y}-\vec{x}) + 2\nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x})) - \\
&\qquad - \nu\mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})\}\,f(\vec{y}) - \nu\mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})f(\vec{y}))\,dy = \\
&= -\int_\Omega (\{-\delta(\vec{y}-\vec{x}) + 2\nu D_\nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x})\}f(\vec{y}) - \\
&\qquad -2\nu\mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})f(\vec{y}))\,dy = \\
&= f(\vec{x}) - 2\nu\int_\Omega \{D_\nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x})\}f(\vec{y})dy + 2\nu\int_\Omega \mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})f(\vec{y})dy.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Вычислим первый интеграл последнего выражения:

$$
\int_\Omega \{D_\nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x})\}f(\vec{y})dy = \int_\Omega \{D\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}) + \nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x})\}f(\vec{y})dy. \tag{21}
$$

Воспользовавшись формулами (11) и (19), вычислим $D\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x})$:

$$
\begin{aligned}
D\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}) &= -\mathcal{K}_\nu(\vec{y}-\vec{x}) + \nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}) = \\
&= \mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y}) - 2\nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}) + \nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}) = \\
&= \mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y}) - \nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x}).
\end{aligned}
$$

Подставляя последнее выражение в интеграл (21), получим:

$$
\int_\Omega \{D_\nu\theta_\nu(\vec{y}-\vec{x})\}f(\vec{y})dy = \int_\Omega \mathcal{K}_\nu(\vec{x}-\vec{y})f(\vec{y})dy.
$$

Теперь подставим этот интеграл в формулу (20) и получим

$$
K_\nu[f](x) = f(x).
$$

Что и требовалось доказать. ■

5. Заключение

В статье рассмотрено кватернионное представление уравнения Дирака, которое связано с уравнением Гельмгольца. Как известно, уравнение Гельмгольца есть трехмерный аналог стационарного уравнения Шредингера для свободной нерелятивисткой частицы. В этом контексте можно придать физический смысл доказанной кватернионной формуле Коши, которая является естественным обобщением интегральной формулы Коши из комплексного анализа. Физически значимые решения (убывающие на бесконечности) выделяются при помощи условий излучения Зоммерфельда и удовлетворяют задаче на собственные значения в интегральной форме.

Литература

1. Benn I.M., Tucker R.W. Weyl scaling and conformal properties of the Kahler equation // Phys.Lett. B. 1983. V.132. N.4. P.325
2. Ционенко Д.А. Уравнение Дирака-Кэлера в неевклидовом пространстве-времени. // Вести нац.акад.наук Белоруссии. 2003, N.1. C.81.
3. Klishevich V.V. On the existense of the second Dirac operator // Class. Quantum Grav. V.17. P.305
   Klishevich V.V. Group conjugations of Dirac operators as an invariant of the Riemannian manifold // Class. Quantum Grav. V.19. P.4287.
4. Kravchenko V.V. and Castillo R.P. An analogue of the Sommerfeld radiation condition for the Dirac operator. // Math. Meth. Appl. Sci. 2002. V.25. P.1383.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1984.