Математические структуры и моделирование
2005, вып. 15, с. 18–24

УДК 519.95

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ГЛАДКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПО ВХОДНОЙ И ВЫХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Д.Н. Василенко, Е.В. Головачев, С.Н. Чуканов

Рассматриваются вопросы линеаризации гладких нелинейных систем управления с использованием входной/выходной информации с целью последующего приведения к нормальной форме и классификации.

Для классификации гладких нелинейных систем управления их необходимо привести к нормальной форме. Из линейной алгебры известно, что если пара $(A,\, C)$ линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu; \quad y = x$$

наблюдаема, то можно найти такие матрицу T и вектор k, что

$$T(A+kC)T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что и определяет нормальную форму наблюдаемой линейной системы [1–3].

Если пара $(A,\, b)$ управляемая, то существует такие матрица T и вектор k,

$$T(A+bk)T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad Tk = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

что и определяет нормальную форму управляемой линейной системы.

Рассмотрим задачи линеаризации гладких нелинейных систем управления с использованием входной или выходной (IO - input/output) информации с целью последующего приведения к нормальной форме и классификации.

Омский филиал Института математики СО РАН.
E-mail: `negue@avte.omsk.info`

1. Линеаризация систем по выходной информации (output linearization)

Пусть система описывается соотношениями:

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = f(x); \quad y = h(x); \quad x \in R^n; \\ f(\cdot) \in R^n; \quad y \in R, \quad h(\cdot) \in R.\end{gathered} \tag{1}$$

Поставим задачу нахождения для (1) такого линеаризующего преобразования $z = F(x)$ или $x = T(z) = F^{-1}(z)$, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} f(F^{-1}(z)) - Az = a(Cz);$$

$$h(F^{-1}(z)) = Cz.$$

Потребуем выполнения следующих условий при преобразовании $x = T(z)$:

(1) $\dim(span\{dh, dL_f h, ..., dL_f^{n-1}h\}) = n$;

(2) найдется векторное такое поле τ, что:

$$L_\tau h = ... = L_\tau L_f^{n-2} h = 0; \; L_\tau L_f^{n-1} h = 1.$$

Локально последнее условие в координатах векторов x и z можно записать в форме:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial [L_f h]}{\partial x} \\ \dfrac{\partial [L_f^2 h]}{\partial x} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial [L_f^{n-1} h]}{\partial x} \end{bmatrix} \times \frac{\partial T}{\partial z} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial z} \\ \dfrac{\partial [L_f h]}{\partial z} \\ \dfrac{\partial [L_f^2 h]}{\partial z} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial [L_f^{n-1} h]}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Первый столбец соотношения (2) представляет PDE для τ

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial [L_f^h]}{\partial x}, \frac{\partial [L_f^2 h]}{\partial x}, ..., \frac{\partial [L_f^{n-1} h]}{\partial x}\right]^T \cdot \tau = [0, 0, .., 0, 1]^T$$

Отображение $x = T(z)$ связано с векторным полем τ соотношением

$$\frac{\partial T}{\partial z} = (\tau, -ad_f \tau, ..., (-1)^{n-1} ad_f^{n-1} \tau) T(z) = T^* \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}\right),$$

$$f(x) = T^* \left(a_1(z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_1 + a_2(z_n)) \frac{\partial}{\partial z_2} + ... + (z_{n-1} + a_n(z_n)) \frac{\partial}{\partial z_n}\right) T^{-1}(x),$$

где

$$\tau(x) = T^* \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right) T^{-1}(x);$$

$$ad_f^k \tau(x) = (-1)^k T^* \left(\frac{\partial}{\partial z_{k+1}} \right) T^{-1}(x);$$

$$\forall k : 0 \le k \le n-1;$$

для вектора $\tau = [\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n]$:

$$\frac{\partial x}{\partial z_i} = \tau_i(x(z)).$$

Продифференцируем выход:

$$y = h(x) = z_n;$$

$$\frac{dy}{dt} = L_f h(x) = z_{n-1} - a_n(z_n);$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = L_f^2 h(x) = z_{n-2} - a_{n-1}(z_n) - L_f a_n(z_n);$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = L_f^n h(x) = -L_f^0 a_1 - L_f^1 a_2 - ... - L_f^{n-1} a_n. \tag{3}$$

Из соотношений (3) получим требуемое преобразование:

$$z_n = h(x) = F_n(x);$$

$$z_{n-1} = L_f h(x) + a_n(h(x)) = F_{n-1}(x);$$

$$z_{n-2} = L_f^2 h(x) + a_{n-1}(h(x)) + L_f a_n(h(x)) = F_{n-2}(x);$$

$$...$$

$$z_{n-i} = L_f^i h(x) + a_{n-i+1}(h(x)) + L_f^{i-1} a_{n-i+2}(h(x)) + ... + L_j^{i-1} a_n(h(x)) = F_{n-i}(x);$$

$$...$$

$$z_1 = L_f^{n-1} h(x) + a_2(h(x)) + L_f a_3(h(x)) + ... + L_f^{n-2} a_n(h(x)) = F_1(x);$$

и

$$\frac{dz_1}{dt} = -a_1(z_n);$$

$$\frac{dz_2}{dt} = z_3 - a_2(z_n);$$

$$\frac{dz_{n-1}}{dt} = z_{n-2} - a_{n-1}(z_n);$$

$$\frac{dz_n}{dt} = z_{n-1} - a_n(z_n);$$

$$\begin{aligned} &L_f^n h(x) + a_1(h(x)) + L_f a_2(h(x)) + ... + L_f^{n-1} a_n(h(x)) = \\ &= L_f^n z_n + a_1(z_n) + L_f a_2(z_n) + ... + L_f^{n-1} a_n(z_n) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Соотношение (4) ограничивает выбор функций выхода $a_1(h(x)), ..., a_n(h(x))$. Например, в случае n=2 и $a_2(h(x)) \equiv 0$ это соотношение примет форму:

$$f_1\left(\frac{\partial\left[f_1\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)+f_2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)\right]}{\partial x_1}\right)+f_2\left(\frac{\partial\left[f_1\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)+f_2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)\right]}{\partial x_2}\right)+a_1(h(x))=0.$$

Величина

$$\delta(h(x)) = \left(L_f^n h(x) + L_f^{n-1} a_n(h(x)) + ... + L_f^1 a_2(h(x)) + L_f^0 a_1(h(x))\right)^2$$

может служить мерой «неинтегрируемости» системы (1); при $\delta(h(x)) = 0$ система является интегрируемой. Минимизация величины

$$\int_M \delta(h(x))dx \to \min$$

может быть использована при выборе преобразований $z = F(x)$ или

$$x = T(z) = F^{-1}(z)$$

в области M.

2. Линеаризация систем формированием управления (input linearization)

Рассмотрим систему:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u; \quad x \in R^n; \quad f(\cdot) \in R^n; \quad g(\cdot) \in R^n, u \in R. \tag{5}$$

Поставим задачу нахождения для системы (5) такого управления

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

и преобразования координат

$$z = F(x), \quad z \in R^n, \quad F(\cdot) \in R^n,$$

что

$$F_*(f + g\alpha) \cdot F^{-1}(z) = Az,$$
$$F_*(g\beta)_i \cdot F^{-1}(z) = b_i,$$
$$A \in R^{n\times n}, \qquad b_i \in R.$$

Тогда исходная система (5) может быть переписана, как

$$\frac{dx}{dt} = f + g\alpha + (g\beta)u$$

и преобразованная (линейная):

$$\frac{dz}{dt} = Az + bv.$$

Если система (5) линеаризуемая, то преобразование $z = F(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x}\, g(x) = L_g z_i(x) = 0; \qquad 1 \le i \le n-1;$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial x}\, g(x) = L_g z_n(x) = \beta^{-1}(x);$$

$$L_f z_i(x) = z_{i+1}(x); \qquad 1 \le i \le n-1;$$

$$L_f z_n(x) = -\alpha(x)\beta^{-1}(x).$$

Если $\varphi(x) = z_1(x)$, то

$$z_{i+1}(x) = L_f^i \varphi(x)$$

и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет соотношениям:

$$L_g\varphi(x) = L_g L_f \varphi(x) = ... = L_g L_f^{n-2}\varphi(x) = 0;$$

$$L_g L_f^{n-1}\varphi(x) \neq 0.$$

В случае, если $g = g_1$, проблема линеаризации в пространстве состояний разрешима, если

$$\dim(span\{g, ad_f g, ..., ad_f^{n-1} g\}) = n$$

и распределение

$$\{g, ad_f g, ..., ad_f^{n-2} g\}$$

инволютивно. В этом случае требуемые α, β и $z = F(x)$ определяются как

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n \varphi(x)}{L_g L_f^{n-1}\varphi(x)};$$

$$\beta(x)v = (L_g L_f^{n-1}\varphi(x))^{-1};$$

$$z_i(x) = L_f^{i-1}\varphi(x);$$

$$z(x) = (\varphi(x), L_f\varphi(x), ..., L_f^{n-1}\varphi(x)).$$

Например, в случае $n = 2:$

$$L_g\varphi(x) = g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = 0;$$

$$L_g L_f \varphi(x) = g\left(\frac{\partial\left(f_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + f_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)}{\partial x_1}\right) \neq 0.$$

3. Линеаризация систем с множеством входов и выходов (MIMO - Multi Input/Multi Output)

Рассмотрим отображение

$$F: \ x \to col(\xi_1(x), ..., \xi_m(x)),$$

где

$$\xi_i(x) = [\varphi_i(x), L_f\varphi_i(x), ..., L_f^{k_i-1}\varphi_i(x)]^T;$$

вектор относительных степеней $k = (k_1, ..., k_m)$ определяется из выполнения соотношений

$$< L_f^{\alpha}\varphi_i(x), g(i) > \neq 0; \quad 0 \leq \alpha \leq k_i - 2; \quad 1 \leq i \leq m; \quad < L_f^{k_i-1}\varphi_i(x), g_i > \neq 0;$$

$$A = \|a_{ij}(x)\| = \left\| < L_f^{k_i-1}\varphi_i(x), g_j > \right\|$$

для MIMO системы:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i u_i \, ;$$

$$y_i = \varphi_i(x).$$

Выберем α, β из уравнений:

$$A(x)\alpha(x) = -[L_f^{k_1}\varphi_1(x), ..., L_f^{k_m}\varphi_m(x)]^T;$$

$$A(x)\beta(x) = I.$$

Каждая i-ая подсистема описывается системой, представленной в нормальной форме:

$$\frac{d\xi_i}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_i,$$

где $\xi_i \in R^{k_i}$.

4. Заключение

В дальнейших работах авторы предполагают построить численные методы решения PDE для линеаризации гладкой нелинейной системы управления с использованием входной или выходной информации.

Литература

1. Fujimoto K., Sugie T. Freedom in coordinate transformation for exact linearization and its application to transient behavior improvement // Automatica. 2001. № 37. P.137-144.
2. Isidori A., Krener A., Giorgi C., Monaco S. Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach // IEEE Transactions on Automatic control. 1981. № 26. P.331-345.
3. Sugie T., Fujimoto K. Controller design for an inverted pendulum based on approximate linearization // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1998. № 8(7). P.585-597.