

## АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В.В. Коробицын, Ю.В. Фролова

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений  $\dot{X}(t) = F(X)$  с разрывной правой частью предлагается алгоритм для нахождения численного решения. Вводится понятие динамической системы с клетчатой структурой. Доказывается теорема об аппроксимации решения системы схемой склеивания решений на границе между клетками. Описывается программа МЕР2, обеспечивающая исследования динамических систем такого класса. Приводятся примеры динамических систем и их фазовые портреты, построенные с помощью программы.

Проект МЕР2 (Modelling Evolution Processes 2) направлен на разработку программного обеспечения для анализа динамических систем. Модели процессов различной природы описываются динамическими системами:

- перенос биомассы в цепи питания организмов (растительность – травоядные – хищники);
- изменение экономических индексов в различных ситуациях;
- поведение индивидов в социальной среде.

Эти модели, как правило, описываются системами дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Такое описание обусловлено изменением поведения элементов системы в возникающих ситуациях. Например, если количество травоядных уменьшается, то хищники становятся вегетарианцами и поедают растительность наравне с травоядными.

### 1. Динамическая система с клетчатой структурой

Будем рассматривать динамические системы вида

$$\dot{X}(t) = F(t, X) \quad (1)$$

с разрывной правой частью  $F$ . Решение таких систем не может быть представлено в классическом понимании как дифференцируемая кривая  $X(t)$ , скорость которой равна заданному векторному полю  $F$ . Иногда является естественным принять некоторое  $X(t)$  как решение системы (1), пренебрегая тем, что  $\dot{X}(t) \neq F(X(t))$ , например скользящий режим в [1].

Пусть  $\Omega'$  — некоторая открытая область в  $R^n$  и  $F(X), X \in \Omega'$  разрывное векторное поле в  $\Omega'$ . Обозначим через  $C_F$  и  $D_F$  подмножества точек  $\Omega'$ , где  $F$  является непрерывной и разрывной соответственно. Поскольку нас не интересует поведение траектории динамической системы вблизи границы области, то мы будем рассматривать систему (1) в некоторой подобласти  $\Omega \subset \Omega'$ , замыкание  $\bar{\Omega}$  которой является компактом и находится внутри  $\Omega'$ .

Если динамическая система составлена из конечного числа «хороших» систем, то есть множество  $D_F$  состоит из конечного числа кусочно-гладких гиперповерхностей, тогда будем говорить о динамической системе с клетчатой структурой.

**Определение 1.** Множество  $C$  будем называть клеткой динамической системы  $\dot{X}(t) = F(X)$ , если  $C$  является линейно-связным подмножеством множества  $C_F$ .

Для всех кусочно-гладких систем множество  $C_F$  может быть представлено как объединение конечного числа клеток  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$C_F = \bigcup_{i=1}^n C_i.$$

**Определение 2.** Динамическая система  $\dot{X} = F(t, X)$  имеет клетчатую структуру  $\mathcal{C}_s$ , если объединение замыканий клеток  $\bar{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  совпадает с замыканием области определения  $\bar{\Omega}$  функции  $F(t, X)$ :

$$\mathcal{C}_s : \bigcup_{i=1}^n \bar{C}_i = \bar{\Omega}.$$

Отметим, что для динамической системы с клетчатой структурой подмножество  $D_F$  точек, где функция  $F(t, X)$  разрывна, составлена из точек замыкания всех клеток:

$$D_F = \bigcup_{i=1}^n \bar{C}_i \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i.$$

## 2. Алгоритм численного решения динамических систем с клетчатой структурой

Поиск численного решения динамической системы с клетчатой структурой состоит из двух этапов. Во-первых, для любой клетки  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  численное решение может быть найдено классическими методами, например методом Рунге-Кутта 4(5). Во-вторых, решение должно быть склеено на множестве  $D_F$ , где динамическая система не имеет гладкого решения.

Численная схема метода Рунге-Кутта 4(5) имеет вид [2]

$$\begin{aligned} K_1 &= F(t, X(t)), \\ K_2 &= F(t + h/2, X(t) + K_1 h/2), \\ K_3 &= F(t + h/2, X(t) + K_2 h/2), \\ K_4 &= F(t + h, X(t) + K_3 h), \\ X(t + h) &= X(t) + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)h/6. \end{aligned}$$

Здесь  $X(t)$  — известное значение функции в момент времени  $t$ ,  $X(t + h)$  — неизвестное значение в момент  $t + h$ ,  $h$  — шаг интегрирования. Этот метод имеет четвертый порядок точности, является устойчивым и сходящимся.

Используя оценку Ричардсона, относительная погрешность численного решения определяется формулой

$$d = \frac{\|X_h - X_{2h}\|}{\|X_h\|} \cdot \frac{1}{2^{k-1} - 1},$$

здесь  $X_h$  и  $X_{2h}$  — значения решения, найденные двумя шагами длины  $h$  и одним шагом длины  $2h$ . Параметр  $k$  — порядок метода ( $k = 5$ ). Для нахождения оптимального значения шага интегрирования воспользуемся оценкой

$$s = 0.9 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Эта оценка гарантирует приближение относительной погрешности к заданному значению точности  $\varepsilon$ . Но шаг интегрирования не может меняться слишком быстро, поэтому его изменение ограничивается минимальным и максимальным значениями изменений

$$s_1 = \max(\min(s, s_{min}), s_{max}),$$

здесь  $s_{min} = 0.1$  и  $s_{max} = 5.0$  — экспериментальные значения параметров. Тогда новое значение шага интегрирования вычисляется по формуле

$$h_{new} = h \cdot s_1.$$

Этот алгоритм позволяет управлять погрешностью численного решения в пределах области непрерывности  $C_i$  функции  $F(t, X)$ , но когда кривая решения пересекает границу между клетками, тогда этот алгоритм не может обеспечить приемлемое решение.

Пусть найденное решение  $X(t)$  лежит в клетке  $C_i$ , а значение в некоторый последующий момент времени  $X^*(t + h) = X(t) + h \cdot F(t, X(t))$  принадлежит другой клетке  $C_j$ ,  $j \neq i$ . Полученное решение  $X^*(t + h)$  показывает, что решение приблизилось к границе клетки. Мы предлагаем алгоритм склеивания решения на границе между клетками.

**Алгоритм** (поиск решения на границе между клетками).

**Шаг 1.** (Идти к границе.) Найдем шаг интегрирования  $h_1$  такой, что точка  $X_1 = X(t_1)$ ,  $t_1 = t + h_1$  находится в клетке  $C_i$  и расстояние до точки решения на границе  $X_b \in D_F$  меньше, чем  $\varepsilon \cdot \|X_1\|$ :

$$\|X_1 - X_b\| \leq \varepsilon \cdot \|X_1\|,$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность. Тогда мы говорим, что точка  $X_1$  является приближением точки  $X_b$ .

**Шаг 2.** (Точка  $X_b$  является стационарной?)

Если  $(F(t_1, X_1), n(X_b)) \cdot (n(X_b), F(t_2, X_2)) < 0$ , то найдена стационарная точка и программа завершается, иначе нужно перейти к шагу 3. (Здесь  $n(X_b)$  — вектор нормали к поверхности разрыва функции  $F(t, X)$  в точке  $X_b$ ,  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение. Предложенное условие означает, что векторы  $F(t_1, X_1)$  и  $F(t_2, X_2)$  направлены в сторону пересечения с поверхностью разрыва, а это означает, что решение не покинет поверхности разрыва).

**Шаг 3.** (Идти в клетку  $C_j$ .) Пусть следующий шаг интегрирования  $h_2$  будет таким, что точка  $X(t_1 + h_2/2) = X_b$ , тогда решение в клетке  $C_j$  находим с помощью схемы

$$\begin{aligned} K_1 &= F(t_1, X_1), \\ K_2 &= F(t_1 + h_2, X_1 + h_2 K_1), \\ X(t_1 + h_2) \approx X_2 &= X_1 + h_2 \cdot \frac{K_1 + K_2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

(Здесь  $X_1 + h_2 K_1$  представляет первое приближение точки  $X_2$ . Среднее значение скорости кривой в точке  $X_b$  задается вектором  $V = (K_1 + K_2)/2$ ).

Далее докажем теорему об аппроксимации решения схемой (2). Введем некоторые обозначения. Пусть функция  $\bar{X}(t)$  представляет точное решение динамической системы  $\dot{X} = F(t, X)$ . Рассмотрим решение около границы между клетками  $C_i$  и  $C_j$ . Будем считать, что решение в граничной точке  $X_b$  является непрерывным, но негладким. Кроме того, будем считать, что точка  $X_b$  не является стационарной. Обозначим  $X_1 = \bar{X}(t_1) \in C_i$ ,  $X_2 = \bar{X}(t_2) \in C_j$ ,  $h_t = t_2 - t_1$ ,  $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ . Тогда граничная точка определяется формулой  $X_b = \bar{X}(t_1 + \theta h_t)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ . Пусть точка  $X_2^*$  — приближенное решение, полученное с помощью численной схемы (2). Обозначим отклонение от точного решения  $\Delta X_2^* = X_2 - X_2^*$ .

**Теорема 1.** Пусть векторное поле  $F(t, X)$  ограничено:  $\|F(t, X)\| \leq M$  для всех  $X \in \Omega$ ,  $a \leq t \leq b$ , дифференцируемо по  $X$  в некоторой окрестности точки  $X_2$ , и производная в точке  $X_2$  ограничена  $\|\frac{dF}{dX}(t_2, X_2)\| = L < \infty$ . Тогда отклонение приближенного решения  $X_2^*$  от точного значения  $X_2$  определяется формулой  $\Delta X_2^* = R \cdot h_t + O(h_t^2)$ , где  $R \leq 2M(\theta - 1/2)$ .

*Доказательство.* Пусть  $X_b^- = \lim_{\tau \rightarrow \theta^- 0} X(t_1 + \tau h_t)$  и  $X_b^+ = \lim_{\tau \rightarrow \theta^+ 0} X(t_1 + \tau h_t)$ . Поскольку решение  $X(t)$  является гладким в клетках  $C_i$ ,  $C_j$ , то значения  $X_b^-$  и  $X_b^+$  можно представить в виде

$$X_b^- = X_1 + \theta h_t F(t_1, X_1) + O(h_t^2), \quad (3)$$

$$X_b^+ = X_2 - (1 - \theta) h_t F(t_2, X_2) + O(h_t^2). \quad (4)$$

Так как решение  $\bar{X}(t)$  является непрерывным в точке  $X_b$ , то эти значения совпадают  $X_b^- = X_b^+ = X_b$ . Приравняем правые части выражений (3) и (4),

получим уравнение для  $X_2$ :

$$X_2 = X_1 + (\theta F(t_1, X_1) + (1 - \theta)F(t_2, X_2))h_t + O(h_t^2).$$

Вычислим приближенное значение  $\tilde{X}_2 = X_1 + h_t F(t_1, X_1)$ . Найдем отклонение приближенного значения  $\tilde{X}_2$  от точного решения  $X_2$ :

$$\Delta \tilde{X}_2 = X_2 - \tilde{X}_2 = (1 - \theta)h_t(-F(t_1, X_1) + F(t_2, X_2)) + O(h_t^2).$$

Пусть  $X_2^*$  — это приближенное значение точки  $X_2$ , полученное по схеме (2):

$$X_2^* = X_1 + h_t \frac{F(t_1, X_1) + F(t_2, \tilde{X}_2)}{2}.$$

Вычислим отклонение точки  $X_2^*$  от точного значения  $X_2$ :

$$\Delta X_2^* = X_2 - X_2^* = \left(\theta - \frac{1}{2}\right)h_t F(t_1, X_1) + h_t \left((1 - \theta)F(t_2, X_2) - \frac{1}{2}F(t_2, \tilde{X}_2)\right) + O(h_t^2).$$

Используя формулу Тейлора, представим функцию  $F(t, X)$  в окрестности точки  $X_2$  в виде

$$F(t_2, \tilde{X}_2) - F(t_2, X_2) = L\Delta \tilde{X}_2 + O(\|\Delta \tilde{X}_2\|^2).$$

Это сделать возможно, поскольку в этой окрестности функция дифференцируема и ее производная ограничена. Кроме того, очевидно, что  $O(\|\Delta \tilde{X}_2\|^2) = O(h_t^2)$ . Получаем

$$\Delta X_2^* = h_t \left( \left(\theta - \frac{1}{2}\right) + (\theta - 1) \frac{h_t L}{2} \right) (F(t_1, X_1) - F(t_2, X_2)) + O(h_t^2),$$

и мы можем записать

$$\Delta X_2^* = R \cdot h_t + O(h_t^2),$$

где  $R = (\theta - 1/2) \cdot (F(t_1, X_1) - F(t_2, X_2))$ . Поскольку функция  $F(t, X)$  ограничена числом  $M$ , то  $\|F(t_1, X_1) - F(t_2, X_2)\| \leq 2M$ , поэтому  $R \leq 2M(\theta - 1/2)$ . Теорема 1 доказана. ■

**Замечание 1.** Если в условиях теоремы 1 положить, что шаг  $h_t$  выбран таким образом, что  $\theta - 1/2 \leq h_t$ . Тогда  $\Delta X_2^* = O(h_t^2)$ .

### 3. Программа МЕР2 для исследования динамических систем с клетчатой структурой

Программа МЕР2 реализует предложенный выше алгоритм численного решения систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Она выполняет следующие функции:

- ввод системы с клетчатой структурой в графическом режиме;
- сохранение и загрузка файла данных системы. Формат файла текстовый, и файл может быть отредактирован при необходимости текстовым редактором;
- вывод графиков решений системы;
- построение проекций фазового пространства на плоскость.

**Модель трехуровневой цепи питания.** Для демонстрации возможностей программы МЕР2 представим результаты исследования модели трехуровневой цепи питания [3, 4]. Эта модель описывает изменение биомассы растительности (R), травоядных (C) и хищников (P). Хищники могут питаться как травоядными, так и растительностью. Динамика популяций описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= R \left( r \left( 1 - \frac{R}{K} \right) - \frac{\lambda_{RC} C}{1 + h_{RC} \lambda_{RC} R} - \frac{u_{RP} \lambda_{RP} P}{1 + u_{RP} \lambda_{RP} h_{RP} R + u_{CP} \lambda_{CP} h_{CP} C} \right), \\ \frac{dC}{dt} &= C \left( \frac{e_{RC} \lambda_{RC} R}{1 + h_{RC} \lambda_{RC} R} - \frac{u_{CP} \lambda_{CP} P}{1 + u_{RP} \lambda_{RP} h_{RP} R + u_{CP} \lambda_{CP} h_{CP} C} - m_C \right), \\ \frac{dP}{dt} &= P \left( \frac{u_{RP} \lambda_{RP} e_{RP} R + u_{CP} \lambda_{CP} e_{CP} C}{1 + u_{RP} \lambda_{RP} h_{RP} R + u_{CP} \lambda_{CP} h_{CP} C} - m_P \right).\end{aligned}\quad (5)$$

Определения и значения параметров представлены в таблице 1.

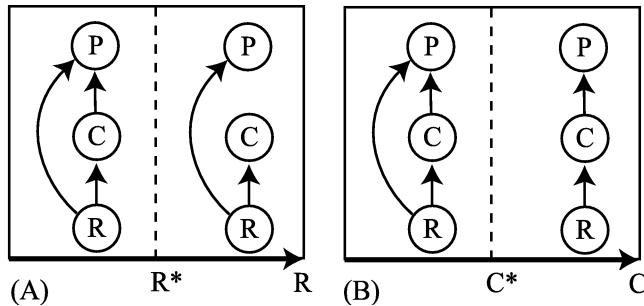


Рис. 1. Топология цепи питания адаптивных хищников.

Результаты моделирования приведены на рисунках 1 и 3. На рисунках представлены траектории решений в трехмерном фазовом пространстве ( $R, C, P$ ), спроектированные на плоскость ( $R, C$ ). Начальные значения переменных выбраны произвольно.

Согласно модели V. Křivan и S. Diehl хищник выбирает свою диету по следующему правилу. Возможно два варианта питания: 1) растительность более продуктивна для питания хищников, чем травоядные; 2) травоядные более продуктивны для питания хищников, чем растительность. В первом случае имеет место неравенство:

$$\frac{e_{RP}}{h_{RP}} > \frac{e_{CP}}{h_{CP}}. \quad (6)$$

Оптимальная стратегия питания хищников состоит в поглощении растительности ( $u_{RP} = 1$ ), травоядные же включены в диету хищников только тогда, когда плотность растительности меньше переключательной плотности

$$R^* = \frac{e_{CP}}{\lambda_{RP}(e_{RP}h_{CP} - e_{CP}h_{RP})}.$$

Топология цепи питания не является фиксированной, она меняется от исключительно конкурентной цепи ( $u_{RP} = 1; u_{CP} = 0$  в модели (5)) до цепи всеядного

Таблица 1. Определения параметров и их значения, используемые при моделировании.

Параметр	Определение	Значение (единицы)
$r$	Максимальная скорость роста растительности	0.3 час <sup>-1</sup>
$K$	Вместимость растительности в окружающей среде	10 мг С/л
$\lambda_{RC}$	Скорость поиска растительности травоядным	0.037 л/(мг час)
$\lambda_{RP}$	Скорость поиска растительности хищником	0.025 л/(мг час)
$\lambda_{CP}$	Скорость поиска травоядного хищником	0.025 л/(мг час)
$u_{RP}$	Вероятность нападения хищников на растительность	1 (безразмерна)
$u_{CP}$	Вероятность нападения хищников на травоядных	1 (безразмерна)
$h_{RC}$	Время, необходимое травоядным для усвоения растительности	3 час
$h_{RP}$	Время, необходимое хищникам для усвоения растительности	4 час
$h_{CP}$	Время, необходимое хищникам для усвоения травоядных	4 час
$e_{RC}$	Эффективность усвоения биомассы растительности для травоядных	0.6 (безразмерна)
$e_{RP}$	Эффективность усвоения биомассы растительности для хищников	0.36 (безразмерна)
$e_{CP}$	Эффективность усвоения биомассы травоядного для хищников	0.6 (безразмерна)
$m_C$	Скорость отмирания травоядных	0.03 h <sup>-1</sup>
$m_P$	Скорость отмирания хищников	0.0275 h <sup>-1</sup>

хищника ( $u_{RP} = u_{CP} = 1$ ). Изменение стратегии происходит при переходе через переключательную плотность растительности  $R^*$  (рис. 1(А)).

В случае, когда травоядные являются более питательными для хищников, чем растительность, неравенство (6) инвертируется. Когда плотность травоядных меньше переключательной плотности

$$C^* = \frac{e_{RP}}{\lambda_{CP}(e_{CP}h_{RP} - e_{RP}h_{CP})},$$

хищники выбирают стратегию всеядного ( $u_{RP} = u_{CP} = 1$ ), а когда больше переключательной плотности, то они потребляют только травоядных ( $u_{RP} = 0$ ;  $u_{CP} = 1$ ). Таким образом, топология цепи питания не является фиксированной и переключается между цепью питания «настоящего» хищника и цепью питания всеядного хищника, зависящей от плотности травоядных (рис. 1(Б)).

#### 4. Выводы и заключение

Результаты моделирования системы трехуровневой цепи питания в двух режимах приведены на рис. 1, 3. В фазовом пространстве системы имеется две клетки. В первом режиме клетки разделены плоскостью  $R = R^*$ , а во втором — плоскостью  $C = C^*$ .

Полученные фазовые портреты подтверждают целесообразность введения клетчатой структуры в динамической системе (5). Решения системы имеют выраженные особенности на границе между клетками. Заранее определенное геометрическое расположение клеток значительно уменьшает затраты на исследование системы. В частности, предложенный численный алгоритм поиска

решения на границе клеток дает более точное решение, чем классический метод Рунге-Кутта, что продемонстрировано на графике решений системы двумя методами (рис. 4).

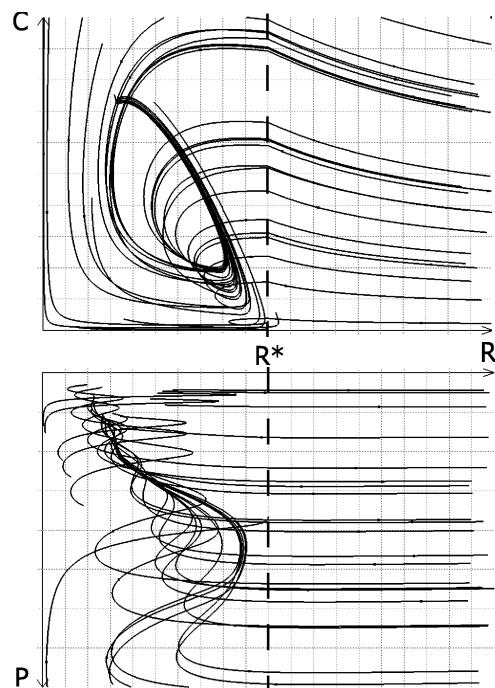


Рис. 2. Фазовое пространство системы в первом режиме. Параметры системы:  $e_{RP} = 0.2$ ,  $e_{CP} = 0.1$ ,  $R^* = 10$ , остальные указаны в таблице 1.

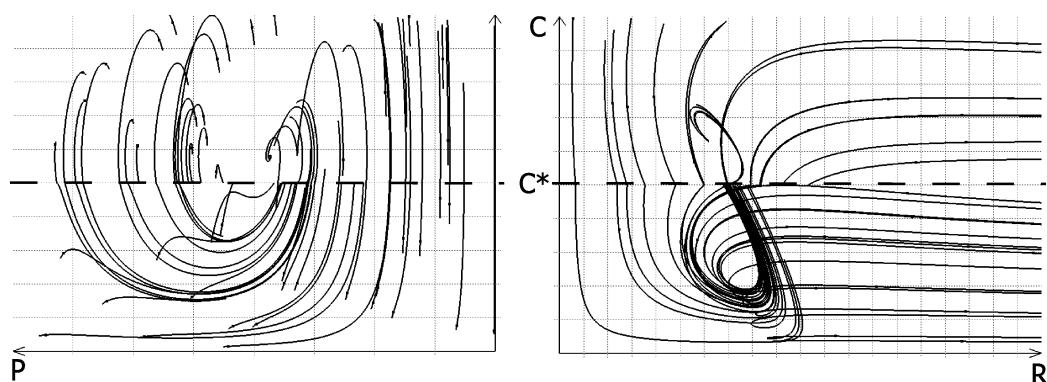


Рис. 3. Фазовое пространство системы во втором режиме. Параметры системы:  $e_{RP} = 0.1$ ,  $e_{CP} = 0.3$ ,  $C^* = 5$ , остальные указаны в таблице 1.

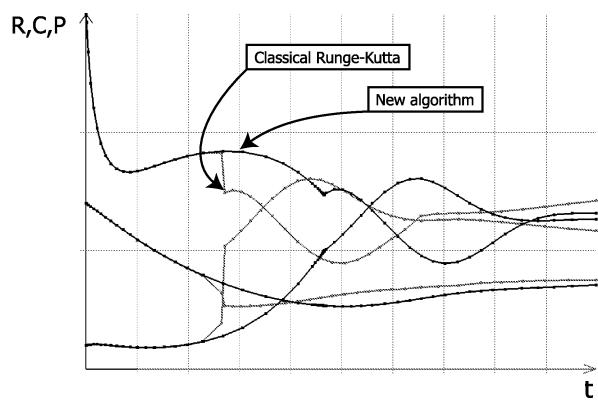


Рис. 4. Кривые решения системы двумя методами: 1) классический метод Рунге-Кутты; 2) предложенный алгоритм. Параметры системы:  $e_{RP} = 0.1$ ,  $e_{CP} = 0.3$ ,  $C^* = 5$ , остальные указаны в таблице 1. Начальные значения:  $R(0) = 15$ ,  $C(0) = 1$ ,  $P(0) = 7$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.
2. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
3. Křivan, V. Optimal Intraguild Foraging and Population Stability // Theoretical Population Biology. 2000. V.58. P.79-94.
4. Křivan, V., Diehl, S. Adaptive omnivory and species coexistence in tri-trophic food webs // Theoretical Population Biology. 2005. V.67. P.85-99.