Математические структуры и моделирование
2005, вып. 15, с. 92–101

УДК 530.12:531.51

ВНЕШНЯЯ КРИВИЗНА 3-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЗАТРАТЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ 4-МЕРНОЙ КРОТОВОЙ НОРЫ

Е.В. Палешева

В работе исследуется возможность уменьшения затрат энергии, необходимых для образования 4-мерной кротовой норы. Соответствующее изменение скачка плотности энергии может быть достигнуто, только если внешняя кривизна 3-мерного пространства не удовлетворяет условию непрерывности.

В последние годы наблюдается увеличение числа работ, связанных с существованием времениподобных замкнутых гладких кривых. К настоящему моменту можно уже говорить о нескольких типах 4-мерных пространств, допускающих машину времени. К таким пространствам относятся, например, пространства гёделевского типа — решения, описывающие вращающуюся вселенную. Если в таком пространстве-времени существуют временные петли, то это изначальное свойство 4-мерной геометрии. К другому типу 4-мерных пространств, которые, как считают некоторые авторы, допускают еще один вариант машины времени, относятся 4-мерные пространства с 3-мерной кротовой норой. В такой модели, по предположению Кипа Торна, временная петля появляется за счет механического движения одного из концов кротовой норы, причем времениподобные замкнутые гладкие кривые изначально могут и не существовать в данном пространстве-времени. Впрочем, если следовать результатам, представленным в [3–6], в работе Торна имеются некоторые неточности, и поэтому предложенная им модель в действительности не может описывать машину времени. Но в некоторых 4-мерных пространствах с 3-мерной кротовой норой временные петли являются свойством 4-мерной геометрии, и вот в таких пространствах машина времени уже будет реальностью, а не ошибочным домыслом, как и в метриках гёделевского типа. Следует также отметить, что исследования, касающиеся решений с машиной времени, проводятся не только в рамках классической теории относительности, но и в теории суперструн, а также в квантовой теории поля. Кроме всего вышесказанного, следует упоминуть как о машине времени в

Омский государственный университет.
E-mail: `palesheva@univer.omsk.su`

пространствах с 4-мерной кротовой норой, так и о машине времени в 5-мерном пространстве-времени, допускающем пружинные слои. Основные результаты, касающиеся этих моделей, можно найти в [1–3]. В данных работах, например, рассматривался процесс рождения 4-мерной кротовой норы. Было замечено, что в этом случае 3-мерное пространство постепенно «разрывается» на два куска. Другими словами, рождение 4-мерной кротовой норы можно рассматривать как процесс, в ходе которого связное 3-мерное пространство становится несвязным. Последнее, в свою очередь, осуществляется как стягивание границы отрываемой области в точку, после чего 3-мерное пространство «разрывается» на две связные области. Такой подход позволил автору работ [1–3] рассчитать средний скачок плотности энергии в отрываемой области. Данная величина оказалась обратно пропорциональна площади характерного сечения отрываемой области. Впрочем, при этом предполагалась непрерывность внешней кривизны 3-мерного пространства. В данной работе мы попробуем отказаться от последнего условия, возможно, это позволит нам уменьшить скачок плотности энергии. Учитывая, что нам придется использовать такие понятия, как внешняя кривизна, мы, следуя работе [7], приведем вывод уравнений Гаусса-Кодацци и их следствий[1].

1. Уравнения Гаусса-Кодацци

Рассмотрим пространственноподобную гиперповерхность, метрический тензор которой будем определять выражением

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}. \tag{1}$$

В качестве сигнатуры 4-мерного пространства-времени выберем $\langle +, -, -, - \rangle$. Заметим также, что если справедливо соотношение (1), то

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}. \tag{2}$$

На выбранной гиперповерхности зададим систему координат $\langle e^1, e^2, e^3 \rangle$, такую, что e^α также являются базисными векторами 4-мерного пространства-времени. Для удобства вычислений будем предполагать, что вектор нормали к гиперповерхности соответствует вектору e^0. Такая система координат является синхронной, т.е.

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0,$$

и соответствует гауссовой нормальной системе координат на выбранной пространственноподобной гиперповерхности.

[1]Дело в том, что в работе Мизнера, Торна и Уиллера используется сигнатура $\langle -, +, +, + \rangle$, отличная от используемой в этой статье $\langle +, -, -, - \rangle$, и кроме того, расщепление пространства-времени также отлично от применяемого нами. Поэтому нам приходится заново повторить вывод уравнений Гаусса-Кодацци.

В произвольной системе отсчета ковариантная производная вектора нормали n связана с базисными векторами на гиперповерхности следующим образом:

$$\nabla_\alpha n = -K_{\alpha\beta} e^\beta, \tag{3}$$
$$\nabla_\alpha n = -K_\alpha^{\ \beta} e_\beta, \tag{4}$$

где величина $K_{\alpha\beta}$ называется тензором внешней кривизны данной гиперповерхности. Тогда, в силу соотношений (1) и (2),

$$K_{\alpha\beta} = -e_\beta \cdot \nabla_\alpha n, \tag{5}$$
$$K_\alpha^{\ \beta} = g^{\beta\mu} K_{\alpha\mu}, \tag{6}$$

где $g^{\beta\mu}$ — компоненты метрического тензора пространства-времени.

Продолжая следовать результатам работы [7], а также учитывая синхронность системы отсчета, мы можем записать уравнения Гаусса-Вайнгартена:

$$^{(4)}\nabla_\alpha e_\beta = K_{\alpha\beta} \cdot n + {}^{(3)}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, e_\mu. \tag{7}$$

Здесь $^{(3)}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля на гиперповерхности. В дальнейшем вместо $^{(4)}\nabla$ будем писать ∇.

Для вычисления компонент 4-мерного тензора Римана воспользуемся оператором кривизны (см. [8]):

$$\mathrm{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\nabla_\mathbf{a}, \nabla_\mathbf{b}] - \nabla_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}.$$

Как известно,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = e_\alpha \cdot \mathrm{R}(e_\gamma, e_\delta) e_\beta$$

и

$$R^\alpha_{\ \beta\gamma\delta} = e^\alpha \cdot \mathrm{R}(e_\gamma, e_\delta) e_\beta.$$

Итак, вычислим $R^\mu_{\gamma\alpha\beta}$. Так как для любых α и β величина[2]

$$[e_\alpha, e_\beta] = {}^{(4)}\nabla_\alpha e_\beta - {}^{(4)}\nabla_\beta e_\alpha = {}^{(4)}\Gamma^k_{\alpha\beta} e_k - {}^{(4)}\Gamma^k_{\beta\alpha} e_k$$

равна нулю, то

$$\mathrm{R}(e_\alpha, e_\beta) e_\gamma = \nabla_\alpha \nabla_\beta e_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha\, , e_\gamma$$

и в силу уравнений Гаусса-Вайнгартена мы имеем:

$$\mathrm{R}(e_\alpha, e_\beta) e_\gamma = \nabla_\alpha \left(K_{\beta\gamma} n + {}^{(3)}\Gamma^\mu_{\beta\gamma} e_\mu \right) - \nabla_\beta \left(K_{\alpha\gamma} n + {}^{(3)}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma} e_\mu \right). \tag{8}$$

Применяя ковариантное дифференцирование в уравнении (8) и учитывая соотношения (3), мы получим

$$\mathrm{R}(e_\alpha, e_\beta) e_\gamma = \left(K_{\beta\gamma|\alpha} - K_{\alpha\gamma|\beta} \right) n + \left(K_{\alpha\gamma} K_\beta^{\ \mu} - K_{\beta\gamma} K_\alpha^{\ \mu} \right) e_\mu + {}^{(3)}R^\mu_{\ \gamma\alpha\beta} e_\mu, \tag{9}$$

[2]Здесь e_k вектора 4-мерного базиса.

где

$$K_{\beta\gamma|\alpha} = \frac{\partial K_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - {}^{(3)}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma} K_{\beta\mu} - {}^{(3)}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} K_{\gamma\mu}.$$

Далее, применяя выражение (9) и соотношения

$${}^{(4)}R^0_{\gamma\alpha\beta} = e^0 \mathrm{R}(e_\alpha e_\beta) e_\gamma,$$

$${}^{(4)}R^\mu_{\gamma\alpha\beta} = e^\mu \mathrm{R}(e_\alpha e_\beta) e_\gamma,$$

находим уравнения Гаусса-Кодацци:

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R^0_{\gamma\alpha\beta} &= K_{\beta\gamma|\alpha} - K_{\alpha\gamma|\beta}, \\ {}^{(4)}R^\mu_{\gamma\alpha\beta} &= K_{\alpha\gamma} K_\beta^{\ \mu} - K_{\beta\gamma} K_\alpha^{\ \mu} + {}^{(3)}R^\mu_{\gamma\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{10}$$

2. Скалярная кривизна

Для того чтобы получить соотношение, определяющее скалярную кривизну пространства-времени через внешнюю и скалярную кривизны 3-мерного пространства, одних только уравнений Гаусса-Кодацци недостаточно. Необходимо еще найти выражение, определяющее величину ${}^{(4)}R^0_{\gamma 0\beta}$. Для этого воспользуемся равенством

$${}^{(4)}R^0_{\gamma 0\beta} = {}^{(4)}R_{0\gamma 0\beta} = {}^{(4)}R_{\beta 0\gamma 0},$$

выполненным в нашем случае. Так как

$${}^{(4)}R_{\beta 0\gamma 0} = e_\beta \cdot \mathrm{R}(e_\gamma, n) n,$$

то

$${}^{(4)}R^0_{\gamma 0\beta} = e_\beta \cdot \mathrm{R}(e_\gamma, n) n.$$

Найдем действие оператора $\mathrm{R}(e_\gamma, n)$ на вектор нормали. По определению оператора кривизны получаем:

$$\mathrm{R}(e_\gamma, n) n = \nabla_\gamma \nabla_n n - \nabla_n \nabla_\gamma n - \nabla_{[e_\gamma, n]}. \tag{11}$$

В силу того, что $[e_\gamma, n] = 0$, а также $\nabla_n n = 0$, уравнение (11) равносильно следующему:

$$\mathrm{R}(e_\gamma, n) n = -\nabla_n \nabla_\gamma n. \tag{12}$$

Учитывая связь (4) между производной нормали и тензором внешней кривизны, преобразуем выражение (12) к следующему виду:

$$\mathrm{R}(e_\gamma, n) n = \nabla_n (K_\gamma^{\ \mu} e_\mu). \tag{13}$$

После ковариантного дифференцирования уравнение (13) преобразуется в

$$\mathrm{R}(e_\gamma, n) n = \frac{\partial K_\gamma^{\ \mu}}{\partial x^0} e_\mu + K_\gamma^{\ \mu} \nabla_n e_\mu. \tag{14}$$

Далее, так как $[n, e_\gamma] = 0$, то справедливо соотношение

$$\nabla_n e_\gamma - \nabla_\gamma n = 0,$$

учитывая которое перепишем (14):

$$\mathrm{R}(e_\gamma, n)n = \frac{\partial K_\gamma^{\ \mu}}{\partial x^0}\, e_\mu + K_\gamma^{\ \mu}\, \nabla_\mu n. \tag{15}$$

Применяя вновь в уравнении (15) равенство (4), окончательно получим, что

$$\mathrm{R}(e_\gamma, n)n = \frac{\partial K_\gamma^{\ \mu}}{\partial x^0}\, e_\mu - K_\gamma^{\ \mu} K_\mu^{\ \nu}\, e_\nu. \tag{16}$$

В результате, домножив скалярно соотношение (16) на вектор e_β, будем иметь:

$$^{(4)}R^0_{\gamma 0\beta} = g_{\beta\mu}\frac{\partial K_\gamma^{\ \mu}}{\partial x^0} - K_\gamma^{\ \mu} K_{\beta\mu}. \tag{17}$$

Так как

$$K_\gamma^{\ \mu} = g^{\mu\alpha} K_{\gamma\alpha},$$

то соотношение (17) равносильно следующему:

$$^{(4)}R^0_{\gamma 0\beta} = g_{\beta\mu}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x^0}\, K_{\gamma\alpha} + \frac{\partial K_{\gamma\beta}}{\partial x^0} - K_\gamma^{\ \mu} K_{\beta\mu}. \tag{18}$$

Учитывая равенство (см. [8])

$$\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x^0} = 2K^{\mu\alpha}$$

и меняя порядок суммирования, приведем выражение (18) к виду

$$^{(4)}R^0_{\gamma 0\beta} = K_{\beta\mu} K_\gamma^{\ \mu} + \frac{\partial K_{\gamma\beta}}{\partial x^0}. \tag{19}$$

Далее, используя уравнения Гаусса-Кодацци и соотношение (19), мы можем вычислить величину $^{(4)}R_{\gamma\beta}$. В силу того, что

$$^{(4)}R_{\gamma\beta} = {}^{(4)}R^k_{\gamma k\beta} = {}^{(4)}R^0_{\gamma 0\beta} + {}^{(4)}R^\mu_{\gamma\mu\beta},$$

получаем:

$$^{(4)}R_{\gamma\beta} = K_{\beta\mu} K_\gamma^{\ \mu} + \frac{\partial K_{\gamma\beta}}{\partial x^0} + K_{\mu\gamma} K_\beta^{\ \mu} - K_{\beta\gamma} K_\mu^{\ \mu} + {}^{(3)}R^\mu_{\gamma\mu\beta}. \tag{20}$$

Так как

$$K_{\beta\mu} K_\gamma^{\ \mu} = K_{\gamma\mu} K_\beta^{\ \mu}$$

и $K_{\mu\gamma} = K_{\gamma\mu}$, то равенство (20) эквивалентно выражению

$$^{(4)}R_{\gamma\beta} = 2K_{\gamma\mu} K_\beta^{\ \mu} + \frac{\partial K_{\gamma\beta}}{\partial x^0} - K_{\beta\gamma} K_\mu^{\ \mu} + {}^{(3)}R_{\ \gamma\beta}. \tag{21}$$

Для получения соотношения, определяющего скалярную кривизну пространства-времени через скалярную кривизну и внешнюю кривизну 3-мерного пространства, осталось вычислить компоненту ${}^{(4)}R_{00}$. Поскольку

$$ {}^{(4)}R_{00} = {}^{(4)}R^{0}_{000} + {}^{(4)}R^{\mu}_{0\mu 0}, $$

найдем сначала ${}^{(4)}R^{0}_{000}$. Но так как

$$ {}^{(4)}R^{0}_{000} = e^{0} \cdot \mathrm{R}(n,n)n, $$

а

$$ \mathrm{R}(n,n)n = \nabla_n \nabla_n n - \nabla_n \nabla_n n - \nabla_{[n,n]} = 0, $$

то ${}^{(4)}R^{0}_{000} = 0$.

Для получения уравнения, определяющего компоненту ${}^{(4)}R^{\mu}_{0\mu 0}$, воспользуемся равенством

$$ {}^{(4)}R^{\mu}_{0\alpha 0} = e^{\mu} \cdot \mathrm{R}(e_\alpha, n)n. $$

Применяя формулу (16), будем иметь:

$$ {}^{(4)}R^{\mu}_{0\alpha 0} = \frac{\partial K_{\alpha}^{\ \mu}}{\partial x^0} - K_{\alpha}^{\ \nu} K_{\nu}^{\ \mu} = \frac{\partial K_{\alpha}^{\ \mu}}{\partial x^0} - K_{\alpha\nu} K^{\nu\mu}. $$

Таким образом получаем:

$$ {}^{(4)}R^{\mu}_{0\mu 0} = \frac{\partial K_{\mu}^{\ \mu}}{\partial x^0} - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. $$

В результате находим следующее соотношение:

$$ {}^{(4)}R_{00} = \frac{\partial K_{\mu}^{\ \mu}}{\partial x^0} - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. \tag{22} $$

Учитывая (22) и (21), получим выражение для скалярной кривизны пространства-времени, определяемой в нашем случае соотношением

$$ {}^{(4)}R = {}^{(4)}R_{00} + g^{\gamma\beta}{}^{(4)}R_{\gamma\beta}. \tag{23} $$

Вводя обозначение

$$ K = K_{\mu}^{\ \mu} $$

и используя равенства

$$ g^{\gamma\beta} K_{\gamma\mu} K_{\beta}^{\ \mu} = K_{\gamma\mu} K^{\gamma\mu}, \qquad g^{\gamma\beta} K_{\beta\gamma} K = K^2, $$

после подстановки в уравнение (23) компонент ${}^{(4)}R_{00}$ и ${}^{(4)}R_{\gamma\beta}$ получим выражение

$$ {}^{(4)}R = \frac{\partial K}{\partial x^0} + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - K^2 + g^{\gamma\beta} \frac{\partial K_{\gamma\beta}}{\partial x^0} - {}^{(3)}R. \tag{24} $$

С помощью соотношений $K = g^{\gamma\beta} K_{\beta\gamma}$ и

$$ \frac{\partial g^{\gamma\beta}}{\partial x^0} = 2K^{\gamma\beta} $$

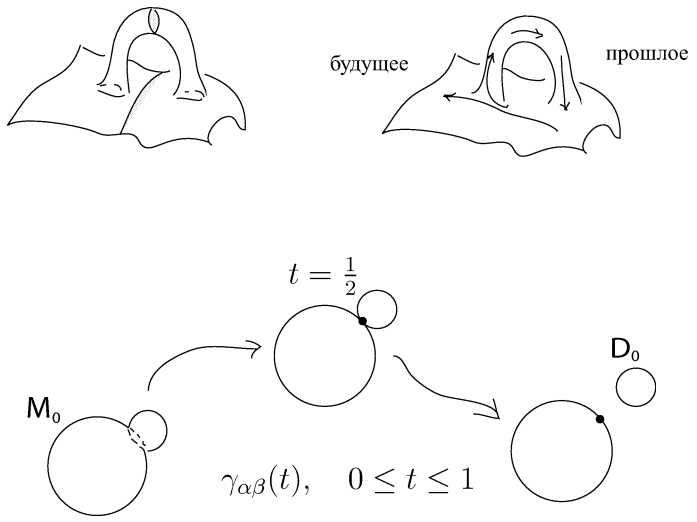

Рис. 1. Процесс рождения 4-мерной кротовой норы как разрыв связности 3-мерного пространства.

нетрудно проверить справедливость равенства

$$g^{\gamma\beta} K_{\beta\gamma} = \frac{\partial K}{\partial x^0} - 2K^{\gamma\beta} K_{\gamma\beta},$$

подставляя которое в уравнение (24) получим искомое выражение для скалярной кривизны:

$$^{(4)}R = 2\frac{\partial K}{\partial x^0} - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - K^2 - {}^{(3)}R. \tag{25}$$

3. Скачок плотности энергии

Как известно, плотность энергии $\varepsilon = T_0^0$ определяется уравнением

$$\kappa T_0^0 = {}^{(4)}R_0^0 - \frac{1}{2}R. \tag{26}$$

Так как в выбранной нами системе отсчета справедливо равенство $R_0^0 = R_{00}$, то, подставляя в уравнение (26) соотношения (22) и (25), мы получим:

$$\kappa\varepsilon = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}. \tag{27}$$

Нетрудно видеть, что, хотя в выражение для скалярной кривизны входит производная

$$\frac{\partial K}{\partial x^0},$$

а следовательно, и вторые производные по времени от $g_{\alpha\beta}$, соответствующие компоненты отсутствуют в уравнении, определяющем плотность энергии.

Следуя работе [3] вычислим скачок плотности энергии в момент образования 4-мерной кротовой норы. Данный процесс можно рассматривать как отрыв

от 3-мерного пространства M_0 области D_0 (см. рис. 1). Последнее определяется как стягивание границы области D_0 в точку. Для соответствующего изменения связности 3-мерного пространства в [3] рассматривается семейство римановых метрик $\gamma_{\alpha\beta}(t)$, $t \in [0,1]$, заданных на пространстве M_0. При этом параметр t не обязательно совпадает с координатой времени. Предполагалось, что данное семейство метрик удовлетворяет следующим условиям:

1) $\gamma_{\alpha\beta}(t)$ при $0 \le t < 1/2$ поле класса C^2, а при $t \ge 1/2$ на границе ∂D_0 имеет разрывы производных первого рода;

2) $\partial\gamma_{\alpha\beta}/\partial n$ непрерывны;

3) $\gamma_{\alpha\beta}(t) = \gamma_{\alpha\beta}(0)$ вне ε-окрестности области D_0;

4) пространство $\langle M_0, \gamma_{\alpha\beta}(t)\rangle$ при $t > 1/2$ имеет неотрицательную кривизну;

5) пространство $\langle M_0, \gamma_{\alpha\beta}(t)\rangle$ при $t \in [0,1]$ допускает регулярное единичное киллингово поле ξ_t.

Нетрудно заметить, что непрерывность производных $\partial\gamma_{\alpha\beta}/\partial n$ в выбранной системе отсчета соответствует непрерывности первых производных по времени от $g_{\alpha\beta}$, а значит и непрерывности тензора внешней кривизны $K_{\alpha\beta}$. Поэтому в процессе вычисления скачка плотности энергии при переходе через точку $t = 1/2$ с данным условием все слагаемые, содержащие компоненты тензора внешней кривизны, аннулируются. В результате в [3] показано, что при данных условиях

$$\langle\delta\varepsilon\rangle \sim \frac{1}{\sigma}\,,$$

в силу полученного соотношения

$$\langle\delta^{(3)}R\rangle \sim \frac{1}{\sigma}\,. \tag{28}$$

Справедливость результата (28) вынуждает нас отказаться от непрерывности тензора внешней кривизны, если мы хотим уменьшить скачок плотности энергии. Поэтому мы рассматриваем семейство метрик, удовлетворяющих условиям:

1) $\gamma_{\alpha\beta}(t)$ при $0 \le t < 1/2$ поле класса C^2, при $t \ge 1/2$ на границе ∂D_0 имеет разрывы производных первого рода;

2) $\gamma_{\alpha\beta}(t) = \gamma_{\alpha\beta}(0)$ вне ε-окрестности области D_0;

3) пространство $\langle M_0, \gamma_{\alpha\beta}(t)\rangle$ при $t > 1/2$ имеет неотрицательную кривизну;

4) пространство $\langle M_0, \gamma_{\alpha\beta}(t)\rangle$ при $t \in [0,1]$ допускает регулярное единичное киллингово поле ξ_t.

В результате, так как

$$K^2 - K_{\mu\delta}K^{\mu\delta} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu} - \gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}\right)\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^0}, \tag{29}$$

получаем:

$$\left\langle\delta\left(K^2 - K_{\mu\delta}K^{\mu\delta}\right)\right\rangle = \frac{1}{4}\left\langle\left(\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu} - \gamma^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu}\right)\delta\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^0}\right)\right\rangle. \tag{30}$$

Поэтому уменьшение скачка плотности энергии возможно, например, в том случае, когда

$$\left\langle\delta\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,.$$

Рассмотрим случай диагональной метрики. Тогда

$$\begin{aligned}\left\langle\delta\left(K^2 - K_{\mu\delta}K^{\mu\delta}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\delta\left(\frac{\partial\ln(\gamma_{11})}{\partial x^0}\frac{\partial\ln(\gamma_{22})}{\partial x^0}\right)\right\rangle + \\ +\frac{1}{2}\left\langle\left(\delta\frac{\partial\ln(\gamma_{11})}{\partial x^0}\frac{\partial\ln(\gamma_{33})}{\partial x^0}\right)\right\rangle + \\ +\frac{1}{2}\left\langle\left(\delta\frac{\partial\ln(\gamma_{22})}{\partial x^0}\frac{\partial\ln(\gamma_{33})}{\partial x^0}\right)\right\rangle.\end{aligned} \tag{31}$$

Если, например, производные

$$\frac{\partial\gamma_{11}}{\partial x^0}, \frac{\partial\gamma_{22}}{\partial x^0}$$

непрерывны и

$$\frac{\partial\gamma_{33}}{\partial x^0} \sim \frac{1}{\sigma}\,,$$

то в силу соотношения (31) получим:

$$\left\langle\delta\left(K^2 - K_{\mu\delta}K^{\mu\delta}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\delta\frac{\partial\ln(\gamma_{33})}{\partial x^0}\right\rangle\left(\frac{\partial\ln(\gamma_{11})}{\partial x^0} + \frac{\partial\ln(\gamma_{22})}{\partial x^0}\right) \tag{32}$$

при дополнительном условии

$$\left(\frac{\partial\ln(\gamma_{11})}{\partial x^0} + \frac{\partial\ln(\gamma_{22})}{\partial x^0}\right) = const.$$

При этом знак величины может оказаться как отрицательным, так и положительным. Другими словами, надлежащим изменением производных по времени от компонент метрического тензора пространства-времени мы можем либо уменьшить, либо увеличить скачок плотности энергии. При этом можно даже попытаться свести затраты энергии к выделению энергии.

Заключение

В данной работе мы показали, что усредненный скачок плотности энергии, возникающий в момент образования 4-мерной кротовой норы, можно уменьшить или увеличить. В результате трудности, связанные с проблемой больших затрат энергии, необходимых для образования 4-мерной ручки, переходят в трудности иного рода: как изменить внешнюю кривизну 3-мерного пространства (другими словами, как изменить «способ» вложения 3-мерного пространства в пространство-время).

Мы до сих пор рассматривали только процедуру отрыва 3-мерной области от пространства M_0. Но в действительности с рождением кротовой норы связан также и процесс приклеивания данной области к многообразию M_0. И при этом также возникнет скачок энергии. Хотя, как нетрудно догадаться, эти процессы «взаимообратны». Это означает, что если в одном случае происходит выделение энергии, то в другом требуются ее затраты. Поэтому возникает следующее предположение. Если при отрыве области D_0 происходит выделение энергии, то можно попробовать каким-то образом сохранить хоть какую-то ее часть для того, чтобы использовать для приклеивания данной области снова к пространству M_0. Конечно, процесс диссипации энергии неизбежен, но мы, по крайней мере, сможем свести к минимуму проблему, связанную с необходимыми на образование 4-мерной кротовой норы затратами энергии.

Литература

1. Гуц А.К. Изменение топологии физического пространства в замкнутой вселенной // Известия вузов. Физика. 1982. №5. С. 23-26.
2. Гуц А.К. Нарушение связности физического пространства // Известия вузов. Физика. 1983. №8. С. 3-6.
3. Гуц А.К. Элементы теории времени. Омск: Изд-во Наследие. Диалог-Сибирь, 2004.
4. Guts A.K. Time machine as four-dimensional wormhole. Los Alamos e-print gr-qc/9612064 (1996).
5. Konstantinov M. Ju. The Principle of Self-Consistency as a consequence of the Principle of Minimal Action. Los Alamos e-print gr-qc/9510039 (1995).
6. Константинов М.Ю. О кинематических свойствах топологически нетривиальных моделей пространства-времени // Известия вузов. Физика. 1992. №12. С.84-88.
7. Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация. Т. 2. М.: Мир, 1997.
8. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979.