Математические структуры и моделирование
2006, вып. 16, с. 67–76

УДК 514.8+517.986

СИМВОЛЫ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ НА АЛГЕБРАХ ЛИ

И.В. Широков

В статье выведены формулы, позволяющие заменить работу с операторными функциями (от некоммутирующих переменных) из обертывающей алгебры на работу с ассоциативной алгеброй гладких функций на дуальном пространстве, т.е. функций от коммутирующих переменных. Показано, что выбор способа упорядочивания операторов эквивалентен выбору локальных координат в группе Ли.

Введение

Пусть G — связная и односвязная вещественная n–мерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, базисные элементы которой $\{e_i\}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям: $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$. Пусть также задано представление $\hat{T}$ группы G в линейном пространстве $\mathcal{H}$. Мы будем обозначать одной и той же буквой элемент группы $t \in G$, лежащий в окрестности единицы группы и соответствующий набор его локальных координат $t = (t^1, \ldots, t^n) \in I^n$ (I^n — n–мерный открытый куб), причем $e = (0, \ldots, 0)$. Линейные операторы $\hat{X}_j$:

$$\hat{X}_j = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial t^j} \hat{T}(t) \right) \bigg|_{t=0}, \quad j = 1, \ldots, n = \dim G$$

являются генераторами представления $\hat{T}$ группы G и образуют базис представления алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathcal{H}$ со следующими коммутационными соотношениями:

$$\frac{i}{\hbar}[\hat{X}_j, \hat{X}_k] = C_{jk}^m \hat{X}_m.$$

(Здесь $\hbar$ — некоторый вещественный положительный параметр, в квантовой механике ему соответствует постоянная Планка).

В физических приложениях (в квантовой механике) пространство $\mathcal{H}$ является гильбертовым, а операторы $\hat{X}_j$ — самосопряженными. В этом случае представление $\hat{T}$ унитарно. В настоящей работе нет необходимости накладывать условия гильбертовости пространства $\mathcal{H}$ и унитарности представления $\hat{T}$.

Омский государственный университет.
E-mail: `shirokov@univer.omsk.su`

Поставим каждому оператору $\hat{X}_j$ во взаимнооднозначное его символ X_j и распространим по линейности это соответствие на всю алгебру $\mathfrak{g}$:

$$\hat{X} = \alpha^j \hat{X}_j \longleftrightarrow X = \alpha^j X_j,\ \alpha^j \in \mathbb{R}.$$

Продолжим введенное соответствие на обертывающую алгебру $U(\mathfrak{g})$, т.е. каждой операторной функции $f(\hat{X}) \in U(\mathfrak{g})$ поставим в соответствие полиномиальную функцию $\tilde{f}(X)$ от символов X_j. (Под операторной функцией мы понимаем некоторый элемент из представления обертывающей алгебры, порожденного представлением $\hat{T}$). Символы X_j можно отождествить с координатами линейного функционала $X \in \mathfrak{g}^*$ в двойственном базисе: $X = X_j e^j$, где $\langle e^j, e_i\rangle = \delta_i^j$. Таким образом, мы ставим в соответствие операторной функции на алгебре $\mathfrak{g}$ ее символ — полиномиальную функцию на $\mathfrak{g}^*$. Произведению двух операторов $f_1(\hat{X})f_2(\hat{X})$ (как элементов ассоциативной алгебры $U(\mathfrak{g})$) будет соответствовать так называемое *звездное произведение (star–product)* их символов:

$$(\widetilde{f_1 f_2})(X) = \tilde{f}_1(X) * \tilde{f}_2(X). \tag{1}$$

Ясно, что соответствие между символами и операторами неоднозначно. Например, функция X_1X_2 из $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ может соответствовать различным операторам $\hat{X}_1\hat{X}_2$, $\hat{X}_2\hat{X}_1$, $(\hat{X}_1\hat{X}_2 + \hat{X}_2\hat{X}_1)/2$ и т.д. Для однозначности соответствия между символами и соответствующими операторами необходимо выбрать способ упорядочивания. От выбора способа упорядочивания зависит формула для звездного умножения (1).

Пусть M — некоторое пуассоново многообразие (или супермногообразие). Отображение алгебры гладких функций на пуассоновом многообразии M (классические наблюдаемые) в алгебру самосопряженных операторов на лагранжевом подмногообразии в M (квантовые наблюдаемые) такое, что коммутатор операторов в некотором смысле соответствует скобке Пуассона их символов, называется процедурой *квантования* многообразия M. При этом такое отображение должно удовлетворять еще ряду требований, которые зависят от вида квантования (геометрического [1], деформационного [2] и т.д.) и которые мы здесь не приводим.

На коалгебре $\mathfrak{g}^*$ определена скобка Пуассона–Ли[1]:

$$\{\tilde{f}_1(X), \tilde{f}_2(X)\}^{Lie} = C_{ij}^k X_k \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial X_i}\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial X_j}, \quad f_1, f_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}^*). \tag{2}$$

Таким образом, коалгебра $\mathfrak{g}^*$ является пуассоновом многообразием. Однако мы в настоящей работе не будем заниматься проблемой квантования пуассонового многообразия $\mathfrak{g}^*$. Мы исходим из некоторого известного представления $\hat{T}$ группы Ли, и нашей задачей является получение формулы для звездного произведения.

1. Операторные функции и их символы

Операторы $\hat{T}(t)$ представления элементов $t \in G$, лежащих в окрестности единицы группы, являются поднятием представления алгебры Ли с помощью экспоненциального

[1]По повторяющимся верхним и нижним индексам, если не оговорено противное, производится суммирование.

отображения
$$\exp:\ \mathfrak{g}\to G,$$
т.е. $\hat{T}(t)=\exp(it\hat{X}/\hbar)$. Под этой операторной экспонентой можно понимать либо произведение операторных экспонент, порядок следования которых определяется некоторой подстановкой $\sigma=(i_1,\dots,i_n)$:
$$e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{X}}=e^{\frac{i}{\hbar}t^{i_1}\hat{X}_{i_1}}\cdots e^{\frac{i}{\hbar}t^{i_n}\hat{X}_{i_n}}\quad \text{(суммы по индексам } i_1,\dots,i_n \text{ нет)},$$
что соответствует выбору канонических координат второго рода, либо одной экспоненте
$$e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{X}}=e^{\frac{i}{\hbar}t^j\hat{X}_j},$$
что соответствует выбору канонических координат первого рода, либо некоторой смеси координат первого и второго рода. В этом разделе мы не будем фиксировать выбор координат.

Основной формулой, связывающей операторные функции $f(\hat{X})$ и их символы $\tilde{f}(X)$, является следующее выражение:
$$f(\hat{X})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int e^{-\frac{itX}{\hbar}}\tilde{f}(X)\hat{T}(t)\,dtdX. \tag{3}$$
Здесь $dt=dt^1\dots dt^n$, $dX=dX_1\dots dX_n$. Интегрирование по переменным X_i производится по всему пространству R^n, по переменным t^i — по открытому n–мерному кубу I^n, содержащему 0. Если группа G — эспоненциальная, то $I^n=R^n$.

Из формулы (3) можно вывести эквивалентную и заодно показать, что значение интеграла в правой части равенства (3) не зависит от выбора области I^n. Подставим произвольную полиномиальную функцию
$$\tilde{f}(X)=\sum_k a_{k_1\dots k_n}X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}$$
в выражение (3):
$$f(\hat{X})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\sum_k a_{k_1\dots k_n}\int X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}e^{-\frac{itX}{\hbar}}\hat{T}(t)\,dXdt=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\sum_k a_{k_1\dots k_n}\times$$
$$\times\int\hat{T}(t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t^1}\right)^{k_1}\dots\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t^n}\right)^{k_n}\exp\left(-\frac{itX}{\hbar}\right)\,dXdt=\sum_k a_{k_1\dots k_n}\times$$
$$\times\int\hat{T}(t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t^1}\right)^{k_1}\dots\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t^n}\right)^{k_n}\delta(t)\,dXdt=\tilde{f}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{T}(t)\Big|_{t=0}.$$
Полученный результат распространяется на любую аналитическую функцию. Таким образом, связь между операторной функцией и ее символом дается эквивалентной формулой
$$f(\hat{X})=\tilde{f}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{T}(t)\Big|_{t=0}. \tag{4}$$

Из формулы (4) следует, что *выбор локальных координат в окрестности единице группы определяет способ упорядочивания операторов в операторных функциях.* В качестве простейшего примера возьмем функцию $\tilde{f}(X) = X_1X_2X_3$ и построим с помощью формулы (4) соответствующие операторные функции для трех видов локальных координат в группе G:

$$\begin{aligned}
\hat{T}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}t^1\hat{X}_1}e^{\frac{i}{\hbar}t^3\hat{X}_3}e^{\frac{i}{\hbar}t^2\hat{X}_2}e^{\frac{i}{\hbar}t^4\hat{X}_4}\dots e^{\frac{i}{\hbar}t^n\hat{X}_n}, \quad f(\hat{X}) = \hat{X}_1\hat{X}_3\hat{X}_2;\\
\hat{T}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}t^1\hat{X}_1}e^{\frac{i}{\hbar}(t^2\hat{X}_2+t^3\hat{X}_3+t^4\hat{X}_4+\dots+t^n\hat{X}_n)}, \quad f(\hat{X}) = \frac{1}{2}\hat{X}_1(\hat{X}_2\hat{X}_3+\hat{X}_3\hat{X}_2);\\
\hat{T}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}(t^1\hat{X}_1+t^2\hat{X}_2+t^3\hat{X}_3+t^4\hat{X}_4+\dots+t^n\hat{X}_n)}, \quad f(\hat{X}) = \frac{1}{6}(\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3+\hat{X}_1\hat{X}_3\hat{X}_2+\\
&+ \hat{X}_2\hat{X}_1\hat{X}_3+\hat{X}_2\hat{X}_3\hat{X}_1+\hat{X}_3\hat{X}_1\hat{X}_2+\hat{X}_3\hat{X}_2\hat{X}_1).
\end{aligned}$$

В первом случае были выбраны канонические координаты второго рода, соответствующие подстановке $\sigma = (1,3,2,4,\dots,n)$. Все операторные функции в этом случае являются суммами операторных выражений, в которых слева будет стоять оператор $\hat{X}_1$ в некоторой степени, затем операторы $\hat{X}_3,\ \hat{X}_2,\ \hat{X}_4,\dots,\hat{X}_n$. Во втором случае выбраны смешанные координаты, в операторных выражениях слева будет стоять оператор $\hat{X}_1$ в некоторой степени, умноженный на симметризованное выражение от операторов $\hat{X}_2,\ \hat{X}_3,\dots,\hat{X}_n$. Третий случай соответствует выбору канонических координат первого рода, который определяет симметризованное упорядочивание (или, как его иначе называют, упорядочивание по Вейлю).

2. Звездное произведение символов операторов

По определению представления $\hat{T}(y)\hat{T}(z) = \hat{T}(x(y,z))$, где $x(y,z)$ — функция композиции (умножения) в группе Ли G в локальных координатах. Согласно формуле (3) имеем

$$\begin{aligned}
f_1(\hat{X})f_2(\hat{X}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}}\int \hat{T}(y)\hat{T}(z)e^{-\frac{i}{\hbar}(yY+zZ)}\tilde{f}_1(Y)\tilde{f}_2(Z)\,dYdZdydz =\\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}}\int \hat{T}(x(y,z))e^{-\frac{i}{\hbar}(yY+zZ)}\tilde{f}_1(Y)\tilde{f}_2(Z)\,dYdZdydz =\\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n}}\int \hat{T}(t)e^{-\frac{itX}{\hbar}}\widetilde{f_1f_2}(X)\,dXdt, \quad \text{где}\\
\widetilde{f_1f_2}(X) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}}\int e^{\frac{i}{\hbar}(x(y,z)X-yY-zZ)}\tilde{f}_1(Y)\tilde{f}_2(Z)\,dYdZdydz.
\end{aligned}$$

Вспоминая определение звездного произведения (3), окончательно получим

$$\tilde{f}_1(X)*\tilde{f}_2(X) = \int K(X;Y,Z)\tilde{f}_1(Y)\tilde{f}_2(Z)\,dYdZ, \tag{5}$$

$$K(X;Y,Z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}}\int e^{\frac{i}{\hbar}(x(y,z)X-yY-zZ)}\,dydz. \tag{6}$$

Учитывая, что функции $\tilde{f}_1(X), \tilde{f}_2(X)$ полиномиальны, и действуя так же, как и при выводе формулы (4), получим формулу для звездного произведения, эквивалентную формуле (5):

$$\tilde{f}_1(X) * \tilde{f}_2(X) = \tilde{f}_1(-i\hbar\partial_y)\tilde{f}_2(-i\hbar\partial_z)e^{\frac{i}{\hbar}x(y,z)X}\Big|_{y=z=0}. \qquad (7)$$

Для единичного оператора $\hat{1}$ очевидны равенства $\hat{1} \cdot f(\hat{X}) = f(\hat{X}) \cdot \hat{1} = f(\hat{X})$. Из формулы (4) следует, что единичному оператору соответствует символ $\tilde{f} \equiv 1$ и поэтому должны выполняться равенства $1 * \tilde{f}(X) = \tilde{f}(X) * 1 = \tilde{f}(X)$, справедливость которых следует из формулы (7) и из свойства функции композиции в группе Ли: $x(y,0) = y$, $x(0,z) = z$. По определению символа оператора звездное произведение должно быть ассоциативной бинарной операцией. Это легко проверить непосредственно, используя формулы (5), (6) (или формулу (7)) и свойство ассоциативности умножения в группе Ли $x(y,x(z,u)) = x(x(y,z),u)$.

Таким образом, линейное пространство гладких функций на $\mathfrak{g}^*$, снабженное бинарной операцией «$*$», является ассоциативной (но некоммутативной) алгеброй $\mathcal{A} = (C^\infty(\mathfrak{g}^*), *)$ с единицей. Отметим, что в схеме геометрического квантования и в некоторых случаях деформационного квантования свойство ассоциативности не выполняется.

Введем на алгебре $\mathcal{A}$ скобку Пуассона:

$$\{\varphi(X),\psi(X)\}^{symb} = \frac{i}{\hbar}\left(\varphi(X) * \psi(X) - \psi(X) * \varphi(X)\right), \quad \varphi(X),\psi(X) \in \mathcal{A}. \qquad (8)$$

Поскольку формула (5) для звездного произведения зависит от выбранных в группе Ли локальных координат, то каждому такому выбору координат соответствует своя скобка Пуассона (8). Как мы покажем ниже, все различные скобки (8) являются деформациями скобки Ли–Пуассона (2), т.е. $\{\cdot,\cdot\}^{symb} \to \{\cdot,\cdot\}^{Lie}$ при $\hbar \to 0$.

Обозначим через ξ,η — лево- и правоинвариантные векторные поля, ω,σ — лево- и правоинвариантные 1-формы на группе G, в координатах имеем:

$$[\xi_i,\xi_j] = C^k_{ij}\xi_k, \quad [\eta_i,\eta_j] = C^k_{ij}\eta_k, \quad [\xi_i,\eta_j] = 0;$$
$$\xi_j = \xi^k_j(z)\frac{\partial}{\partial z^k}, \quad \eta_j = \eta^k_j(z)\frac{\partial}{\partial z^k}, \quad \omega^k = \omega^k_j(z)dz^j, \quad \sigma^k = \sigma^k_j(z)dz^j;$$
$$\omega^j_i\xi^i_k = \delta^j_k, \quad \sigma^j_i\eta^i_k = \delta^j_k, \quad \xi^i_j(0) = -\eta^i_j(0) = \delta^i_j.$$

Условия лево- и правоинвариантности полей ξ_i,η_i эквивалентны следующим выражениям:

$$\frac{\partial x^j(y,z)}{\partial z^k} = \xi^j_i(x(y,z))\omega^i_k(z), \quad \frac{\partial x^j(y,z)}{\partial y^k} = \eta^j_i(x(y,z))\sigma^i_k(z). \qquad (9)$$

Используя соотношения (9), перепишем формулу (7) в виде

$$\tilde{f}_1(X) * \tilde{f}_2(X) = \tilde{f}_1\left(-i\hbar\partial_y + X_j\eta^j_i(x(y,z))\sigma^i(y)\right) \times$$
$$\times\ \tilde{f}_2\left(-i\hbar\partial_z + X_j\xi^j_i(x(y,z))\omega^i(z)\right) \cdot 1\Big|_{y=z=0}. \qquad (10)$$

Из формулы (10) следует

$$
\begin{aligned}
\tilde f_1(X) * \tilde f_2(X) &= \tilde f_1(X)\tilde f_2(X) - i\hbar \frac{\partial \tilde f_1}{\partial X_s}\frac{\partial \tilde f_2}{\partial X_m} X_j\, \xi^j_{m,s}(0) + O(\hbar^2),\\
\tilde f_2(X) * \tilde f_1(X) &= \tilde f_1(X)\tilde f_2(X) - i\hbar \frac{\partial \tilde f_1}{\partial X_s}\frac{\partial \tilde f_2}{\partial X_m} X_j\, \xi^j_{s,m}(0) + O(\hbar^2).
\end{aligned}
$$

Здесь $\xi^j_{m,s}(0) \equiv \partial\xi^j_m(z)/\partial z^s$ при $z = 0$. Учет равенства $\xi^j_{m,s}(0) - \xi^j_{s,m}(0) = C^k_{sm}$ и определения скобок Пуассона (2), (8) приводит к следующему соотношению:

$$
\{\tilde f_1(X), \tilde f_2(X)\}^{symb} = \{\tilde f_1(X), \tilde f_2(X)\}^{Lie} + O(\hbar).
$$

3. Упорядочивание по Вейлю

Случай симметризованного упорядочивания, или, иначе, упорядочивания по Вейлю, обладает по сравнению с общим случаем рядом полезных свойств. Как показано выше, скобка Пуассона–Ли (2) и скобка Пуассона символов (8) не совпадают. Однако в случае симметризованного упорядочивания справедливо более слабое утверждение.

Утверждение. *При выборе канонических координат первого рода, или, что эквивалентно, при упорядочивании операторов по Вейлю, имеет место равенство:*

$$
\{X_i, \tilde f(X)\}^{symb} = \{X_i, \tilde f(X)\}^{Lie}, \quad i \in \overline{1,n}. \tag{11}
$$

Proof. Пусть операторной функции $f(\hat X)$ соответствует символ $\tilde f(X)$, т.е. эти величины связаны соотношением (3). Выберем в группе Ли канонические координаты первого рода и введем параметрическое семейство операторных функций $f_\tau(\hat X)$:

$$
f_\tau(\hat X) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat X} f(\hat X) e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\hat X}.
$$

Согласно формуле (3) имеем:

$$
\begin{aligned}
f_\tau(\hat X) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat X}\hat T(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\hat X} e^{-\frac{i}{\hbar}tX} f(X)\, dXdt = \int \exp\frac{i}{\hbar}\left(t e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat X}\hat X e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\hat X}\right)\times\\
\times\, e^{-\frac{i}{\hbar}tX} f(X)\,\frac{dXdt}{(2\pi\hbar)^n} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int e^{\frac{i}{\hbar}t'\hat X} e^{-\frac{i}{\hbar}t'X'} f(X'A)\, dX'dt'.
\end{aligned}
$$

Здесь $t'^j = A^j_k(\tau)t^k$, $X'_k = X_j(A^{-1}(\tau))^j_k$, $A(\tau)$ — матрица присоединенного представления. Мы воспользовались также равенствами

$$
Xt \equiv X_k t^k = X't', \quad dX'dt' = dXdt.
$$

Убирая штрихи, получим

$$
f_\tau(\hat X) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int \hat T(t) e^{-\frac{itX}{\hbar}} \tilde f(XA(\tau))\, dXdt.
$$

Иначе говоря, операторной функции $f_\tau(\hat{X})$ соответствует символ

$$\tilde{f}_\tau(X) = \tilde{f}(XA(\tau)).$$

Для окончания доказательства Утверждения осталось заметить, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau^j} f_\tau(\hat{X})\bigg|_{\tau=0} = \frac{i}{\hbar}[\hat{X}_j, f(\hat{X})], \quad \frac{\partial}{\partial\tau^j} \tilde{f}_\tau(X)\bigg|_{\tau=0} = \{X_j, \tilde{f}(X)\}^{Lie}.$$

■

Отметим еще одно полезное свойство симметрического упорядочивания. Пусть представление $\hat{T}$ унитарно, т.е. операторы $\hat{X}$ эрмитовы. Тогда

$$\hat{T}^+(t) = \hat{T}(-t)$$

и

$$\left(f(\hat{X})\right)^+ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int e^{\frac{itX}{\hbar}}\tilde{f}^*(X)\hat{T}^+(t)\,dtdX = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int e^{-\frac{itX}{\hbar}}\tilde{f}^*(X)\hat{T}(t)\,dtdX,$$

т.е. эрмитову сопряжению операторной функции соответствует комплексное сопряжение ее символа. В частности, самосопряженным операторам при вейлевском упорядочивании соответствуют вещественные функции на $\mathfrak{g}^*$.

4. Примеры

4.1. Алгебра Гейзенберга

Простейшим нетривиальным примером является трехмерная алгебра Гейзенберга. С другой стороны, алгебра Гейзенберга играет огромную роль в квантовой механике, и на ее основе базируются важные для приложений конструкции (например, когерентные состояния, континуальные интегралы и т.д.)

Трехмерная алгебра Гейзенберга с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеет одно ненулевое коммутационное соотношение $[e_1, e_2] = e_3$. Определим неприводимое представление этой алгебры в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(R^1, dq)$:

$$\hat{X}_1 \equiv \hat{P} = -i\hbar\partial_q, \quad \hat{X}_2 \equiv \hat{Q} = q, \quad \hat{X}_3 = 1$$

и обозначим через P, Q символы операторов $\hat{P}, \hat{Q}$ соответственно, единичному оператору $\hat{X}_3$ поставим в соответствие число 1. Как говорилось выше, в зависимости от выбора упорядочивания операторов мы будем иметь различные виды звездного произведения.

4.1.1. qp–символы

Выберем упорядочивание, при котором в каждом мономе оператор $\hat{Q}$ стоит левее оператора $\hat{P}$, т.е.

$$f(\hat{Q}, \hat{P}) = \sum_{j,k} a_{jk}\hat{Q}^j\hat{P}^k. \tag{12}$$

Такому выбору упорядочивания соответствует следующий выбор координат: $\hat{T}(t) = \exp(\frac{i}{\hbar}t^3 \cdot 1)\exp(\frac{i}{\hbar}t^2\hat{Q})\exp(\frac{i}{\hbar}t^1\hat{P})$, и операторная функция (12) будет иметь символ

$$\tilde{f}(Q,P) = f(Q,P) = \sum_{j,k} a_{jk}Q^jP^k. \tag{13}$$

Функция композиции $x(y,z)$ в этих координатах выглядит следующим образом:

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2, \quad x_3 = y_1z_2 + y_3 + z_3.$$

Подстановка данной функции композиции в формулы (5), (6) дает

$$f_1(Q,P) * f_2(Q,P) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{-\frac{i}{\hbar}(Q-Q_2)(P-P_1)} f_1(Q,P_1)f_2(Q_2,P)\,dQ_2dP_1. \tag{14}$$

По известной функции композиции легко вычислить явный вид лево- и правоинвариантных векторных полей и форм:

$$\xi_1 = \partial_1,\ \xi_2 = \partial_2 + x_1\partial_3,\ \xi_3 = \partial_3,\ \omega^1 = dx_1,\ \omega^2 = dx_2,\ \omega^3 = -x_1dx_2 + dx_3;$$
$$\eta_1 = -\partial_1 - x_2\partial_3,\ \eta_2 = -\partial_2,\ \eta_3 = -\partial_3,\ \sigma^1 = -dx_1,\ \sigma^2 = -dx_2,\ \sigma^3 = x_2dx_1 - dx_3.$$

Здесь принято обозначение $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$. Эквивалентная формула (10) примет вид

$$\begin{aligned} f_1(Q,P) * f_2(Q,P) = f_1(-i\hbar\partial_{y_2} + X_j\eta_i^j(x)\sigma_2^i(y), -i\hbar\partial_{y_1} + X_j\eta_i^j(x)\sigma_1^i(y))\times \\ \times\ f_2(-i\hbar\partial_{z_2} + X_j\xi_i^j(x)\omega_2^i(z), -i\hbar\partial_{z_1} + X_j\xi_i^j(x)\omega_1^i(z)) \cdot 1\big|_{y=z=0} = \\ = f_1(X_2, -i\hbar\partial_{y_1} + X_1)f_2(X_2 + y_1X_3, X_1)\big|_{y=z=0}. \end{aligned}$$

Подставляя в это выражение $X_1 = P,\ X_2 = Q,\ X_3 = 1$, окончательно получим

$$f_1(Q,P) * f_2(Q,P) = f_1(Q, P - i\hbar\partial_{y_1})f_2(Q + y_1, P)\big|_{y_1=0}. \tag{15}$$

4.1.2. pq–символы

Пусть теперь символу $f(Q,P)$ (13) соответствует операторное выражение, в котором операторы $\hat{P}$ стоят левее операторов $\hat{Q}$:

$$f(\hat{Q},\hat{P}) = \sum_{j,k} a_{jk}\hat{P}^k\hat{Q}^j.$$

Выбранному упорядочиванию операторов соответствует локальное представление $\hat{T}(t) = \exp(\frac{i}{\hbar}t^1\hat{P})\exp(\frac{i}{\hbar}t^2\hat{Q})\exp(\frac{i}{\hbar}t^3 \cdot 1)$. Функция композиции в этом случае имеет вид:

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2, \quad x_3 = -y_2z_1 + y_3 + z_3.$$

Действуя аналогично предыдущему случаю, получим формулы для композиции символов:

$$f_1(Q,P) * f_2(Q,P) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}(Q-Q_2)(P-P_1)} f_1(Q_1,P)f_2(Q,P_2)\,dQ_1dP_2, \tag{16}$$

$$f_1(Q,P) * f_2(Q,P) = f_1(Q + i\hbar\partial_{y_2}, P)f_2(Q, P + y_2)\big|_{y_2=0}. \tag{17}$$

4.1.3. Символы Вейля

Выбору симметризованного упорядочивания соответствует выбор канонических координат первого рода: $\hat{T}(t) = \exp(\frac{i}{\hbar}(t^1\hat{P} + t^2\hat{Q} + t^3 \cdot 1))$. Функция композиции в этом случае имеет вид:

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2, \quad x_3 = y_3 + z_3 + (y_1z_2 - y_2z_1)/2.$$

Подставляя явный вид функций композиции в формулы (5), (6), (10), получаем

$$f_1(Q,P) * f_2(Q,P) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int e^{\frac{2i}{\hbar}((Q-Q_2)P_1 + (Q_1-Q)P_2 + (Q_2-Q_1)P)} \times$$
$$\times f_1(Q_1,P_1) f_2(Q_2,P_2)\, dQ_1 dP_1 dQ_2 dP_2; \quad (18)$$

$$f_1(Q,P) * f_2(Q,P) = f_1(Q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial y_2}, P - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial y_1}) f_2(Q + y_1, P + y_2)\Big|_{y_1=y_2=0}. \quad (19)$$

Выше, изходя из общих формул (5), (6), (10), мы получили для частного случая алгебры Гейзенберга выражения для звездного произведения. Следует отметить, что формулы (14)–(18) не являются оригинальными и приведены в монографии [3], в которой они выведены из других соображений.

4.2. Евклидова группа $E(2,\mathbb{R})$

Алгебра Ли вещественной трехмерной евклидовой группы имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

В канонических координатах второго рода $\hat{T}(t) = \exp(t_1e_1)\exp(t_2e_2)\exp(t_3e_3)$ символу

$$f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} X_1^i X_2^j X_3^k$$

соответствует оператор

$$f(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} \hat{X}_1^i \hat{X}_2^j \hat{X}_3^k.$$

Функция композиции в этих координатах выглядит следующим образом:

$$x_1 = y_1 + z_1\cos y_3 - z_2 \sin y_3, \quad x_2 = y_2 + z_2 \cos y_3 + z_1 \sin y_3, \quad x_3 = y_3 + z_3.$$

Обобщенная функция $K(X;Y,Z)$ согласно формуле (6) имеет вид:

$$K(X;Y,Z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \int \exp\frac{i}{\hbar}((y_1 + z_1\cos y_3 - z_2\sin y_3)X_1 + (y_2 + z_2\cos y_3 +$$
$$+ z_1 \sin y_3)X_2 - y_1Y_1 - y_2Y_2 - y_3Y_3 - z_1Z_1 - z_2Z_2 - z_3Z_3)\, dydz = \delta(X_1 - Y_1)\times$$
$$\times \delta(X_2 - Y_2)\delta(X_3 - Z_3) \int \delta(Z_1 - X_1\cos y_3 - X_2 \sin y_3)\delta(Z_2 - X_2\cos y_3 + X_1 \sin y_3)\times$$
$$\times \exp\frac{i}{\hbar}(y_3(X_3 - Y_3))\, dy_3/2\pi\hbar.$$

Подставляя это выражение в формулу (5), получим

$$f_1(X) * f_2(X) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int f_1(X_1, X_2, Y) f_2(X_1 \cos y + X_2 \sin y, X_2 \cos y - X_1 \sin y, X_3) \times \\ \times e^{\frac{i}{\hbar} y (X_3 - Y)} \, dY \, dy.$$

Используя интегральное представление дельта–функции, эту формулу можно переписать в эквивалентном виде:

$$f_1 * f_2 = f_1(X_1, X_2, X_3 - i\hbar \partial_y) f_2(X_1 \cos y + X_2 \sin y, X_2 \cos y - X_1 \sin y, X_3)\big|_{y=0}.$$

Заключение

В настоящей работе мы вывели формулы, которые позволяют заменить работу с операторными функциями (от некоммутирующих переменных) из обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ на работу с ассоциативной алгеброй $\mathcal{A}$ функций на $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, т.е. функций от коммутирующих переменных. Особенно полезной, на наш взгляд, является формула (11). С помощью этой формулы удалось строго обосновать алгоритм нахождения алгебры инвариантных операторов на однородных пространствах, предложенный в работе [4]. Из этого доказательства, как следствие, получается утверждение о совпадении слабо коммутативных и коммутативных пространств. Приведение этого доказательства далеко выходит за рамки настоящей статьи и будет опубликовано в отдельной работе.

References

1. Кириллов А.А. Геометрическое квантование / Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.4. Динамические системы — 4. М.: ВИНИТИ, 1985. С.141-178.
2. Kontsevich M. Deformation Quantization of Poisson Manifolds. – E-print arXiv: q-alg/9709040.
3. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
4. Широков И.В. Тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах // Теоретическая и математическая физика. 2001. Т.129, N.1. С.3-13.