Математические структуры и моделирование
2009, вып. 19, с. 68–77

УДК 574.24

КАТАСТРОФЫ ТИПА «ЛАСТОЧКИН ХВОСТ» В ЭКОЛОГИИ ЧЕЛОВЕКА

А.К. Гуц, Л.А. Володченкова

Предлагается качественное описание катастроф в экологии человека с помощью математической теории катастроф. Описываются состояния равновесия здоровья человека и их смена при изменении степени неблагоприятности/благоприятности внешних управляющих факторов.

Исследования по экологии человека предполагают наличие понятия здорового человека. Однако на сегодня нет общепринятой теории здоровья человека. П.И.Калью [1] к 1988 году рассмотрел 79 определений здоровья человека, сформулированные представителями различных научных дисциплин в разное время в различных странах мира. К 2009-му году их насчитsвается уже более ста.

В преамбуле Устава Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ) индивидуальное здоровье определяется как «состояние полного физического, душевного и социального благополучия, а не только отсутствие болезней и физических дефектов».

Наличие самых различных формулировок понятия здоровья заставило их классифицировать и представить как четыре модели здоровья человека:

1. «**Медицинская модель здоровья**. Она предполагает такое определение здоровья, которое содержит лишь медицинские признаки и характеристики здоровья. Здоровьем считают отсутствие болезней, их симптомов.

2. **Биомедицинская модель здоровья**. Здоровье рассматривается как отсутствие у человека органических нарушений и субъективных ощущений нездоровья. Внимание акцентируется на природно-биологической сущности человека, подчеркивается доминирующее значение биологических закономерностей в жизнедеятельности человека и в его здоровье.

3. **Биосоциальная модель здоровья**. В понятие здоровья включаются биологические и социальные признаки, которые рассматриваются в единстве, но при этом социальным признакам придается приоритетное значение.

4. **Ценностно-социальная модель здоровья**. Здоровье – ценность для человека, необходимая предпосылка для полноценной жизни, удовлетворения материальных и духовных потребностей, участия в труде и социальной жизни, в экономической, научной, культурной и других видах деятельности. Этой

Омский государственный университет.
E-mail: `guts@omsu.ru`, `volodchenkova@cmm.univer.omsk.su`

модели в наибольшей степени соответствует определение здоровья, сформулированное ВОЗ» [1] .

1. Описание модели здоровья человека

В рамках медицинской модели здоровья степень здоровья человека может быть охарактеризована достаточно большим числом количественных показателей, которые получают при проведении различных анализов (кровяное давление, температура тела, количество эритроцитов, сахар в крови и т.д.). К этим показателям следует добавить различные показатели, используемые другими моделями здоровья человека.

Пусть величины $x_j,\ j = 1, 2, ..., N$ – совокупность всевозможных показателей здоровья человека.

Введем *интегральный показатель здоровья человека*, имеющий вид

$$x = \sum_{j=1}^{N} w_j x_j,$$

где w_j – вес показателя x_j, т.е. его вклад (доля) в интегральный показатель. Значения показателя x в момент времени t обозначаем как $x(t)$. Это число принимается нами как степень здоровья человека.

Показатель имеет нижнюю границу – число Z_0. Человек считается здоровым в момент времени t, если сумма его показателей $x(t) \geq Z_0$, и болеющим, если $x(t) < Z_0$.

Очевидно, что такой подход является крайне упрощенным, но любая модель здорового человека есть определенное упрощение, которое может быть со временем усложнена.

Здоровый в момент времени t человек без внешних (и ряда внутренних) причин в следующий момент времени $t + dt$ также будет зоровым.

Иначе говоря,

$$x(t + dt) = x(t) + A(t, x)dt, \tag{1}$$

где $A(t, x)dt$ – величина, описываюшая отклонения в уровне здоровья человека, произошедшие на отрезке времени dt.

Из (1) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x). \tag{2}$$

Очевидно, что в регионе, где проживают люди, может иметь место некоторый долговременный фактор риска для здоровья людей. Например, качество воды, или воздуха или наличие радиоактивного фона.

В таком случае следует в правую часть дифференциального уравнения (2) добавить член $(-r)$:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x) - r. \tag{3}$$

В самом простом случае следует положить, что $A(t,x) = k_1 x$, т.е.

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x - r. \tag{4}$$

Коэффициент k_1 можно посчитать постоянным. Но тогда степень здоровья человека будет нарастать как геометрическая прогрессия и явно «зашкалит», сделав бессмысленной нашу модель. Поэтому начнем ее усложнять.

Коэффициент k_1 отвечает за «прирост здоровья». Учитывая подходы биосоциальной и ценностно-социальной моделей здоровья человека, мы должны учесть, что здоровье человека зависит не только от его индивидуального здоровья, но от состояния здоровья его родителя(ей) и потомства[1]. Взаимодействие их здоровья есть величина $x \cdot x \cdot x$ – «произведение трех здоровий». Примем, что

$$k_1 = k_0 x \cdot x \cdot x - p(x) = k_0 x^3 - p(x), \tag{5}$$

где $k_0 = const$ – «сила» взаимодействия «трех здоровий», а величина $p(x)$ – это то, что мешает поддержанию всеобщего универсального зоровья человека-семьи. Это может быть один из факторов риска блогополучия здорового человека. Пусть это будет критический уровень k_2 медико-санитарной ситуации в регионе.

Тогда следует принять, что

$$p(x) = k_2 - k_3 x, \tag{6}$$

где член $k_3 x$ храктеризует принимаемые меры по преодолению неблагополучной медико-санитарной ситуации. То, что мы в этот член включили x, говорит о том, что принимаемые меры должны соотноситься с состоянием здоровья людей в неблагополучном регионе.

Объединяя уравнения (4)-(6), получаем

$$\frac{dx}{dt} = k_0 x^4 - k_2 x + k_3 x^2 - r = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{k_0}{5}x^5 + \frac{k_3}{3}x^3 + \frac{-k_2}{2}x^2 + (-r)x\right\} \tag{7}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} V(x,u,v,w), \tag{8}$$

где

$$V(x,u,v,w) = \frac{k_0}{5}x^5 + ux^3 + vx^2 + wx, \tag{9}$$

$$u = \frac{k_3}{3}, \quad v = -\frac{k_2}{2}, \quad w = -r.$$

Отметим, что хорошее здоровье людей характеризуется неравенством $x > Z_0$, ухудшение – неравенством $x < Z_0$; действие долговременного вредоносного фактора риска – неравенством $w < 0$, наличие неблагоприятной медико-санитарной ситуации в регионе – неравенством $v < 0$, принятие мер по преодолению неблагополучной медико-санитарной ситуации (лечение) – неравенством $u > 0$.

[1] Любой человек переживает болезнь своих родителей и детей, и это переживание сказывается на его собственном здоровье.

Функция $V(x, u, v, w)$, заданная выражением (9), описывает при изменении параметров u, v, w самые различные бифуркации, называемые в математической теории катастроф катастрофами типа «ласточкин хвост» [2–5].

2. Равновесия системы, их смена и математическая теория катастроф

Равновесные системы, и это относится и к экологии человека, характеризуются тем, что их строение и состав колеблются около какой-то средней точки, представляющей как бы типичное состояние (здоровья) человека.

Равновесие в состоянии здоровья человека зависит от окружающей среды, а среда либо изначально неблагоприятная, либо постоянно подвержена изменениям. Неблагополучная медико-санитарная ситуация, антропогенные загрязнения, природные аномалии и т.д. оказывают влияние на организм человека. Человек либо заболевает, либо этого удается избежать, благодаря принятым мерам, и, следовательно, сохранить состояние здоровья. В случае развития болезни вполне возможен переход к новому равновесию, при котором нельзя считать человека здоровым, но в болезненном состоянии он находится длительное время, осуществляя вместе с другими, столь же больными людьми общественное существование. И это действительно так: на Южном Урале имеется деревня, находящаяся с 1957 года в зоне сильного радиоактивного заражения, в которой люди живут, работают, создают семьи, рожают и выращивают детей, страдая и умирая при этом от раковых заболеваний. В Омске многие люди живут с 1970-х годов в бетонных домах, содержаших радиоактивный макеевский щебень. Известны также многочисленные примеры исторически длительного постоянного проживания людей в местности с плохой водой.

Радиактивный фон, плохая вода и т.д. – это все внешние факторы, влияющие (и управляющие) на экологию человека.

Для математического описания смены равновесий системы при изменении внешних (управляющих) факторов математиками создана теория элементарных катастроф. Она исходит из предположения, что поведение системы определяется некоторой потенциальной функцией $V = V(x, u_1, ..., u_n)$, где x – переменная, характеризующая изучаемую систему, а $u_1, ..., u_n$ – внешние управляющие факторы.

Динамика изменения во времени переменной $x(t)$ задается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V(x, u_1, ..., u_n)}{\partial x}. \tag{10}$$

Равновесия системы – это такие решения $x(t)$ уравнения (1), которые не меняются со временем (какой-то период времени), т.е.

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Но в таком случае, как видно из уравнения (1), имеем *уравнение всевозможных* *равновесий* системы

$$\frac{\partial V(x, u_1, ..., u_n)}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Каждое равновесие есть решение x данного уравнения, зависящее от конкретного набора внешних управляющих факторов, т.е. $x = x(u_1, ..., u_n)$.

Если меняются внешние факторы, скажем, вместо набора $(u_1^0, ..., u_n^0)$ переходим к набору $(u_1^1, ..., u_n^1)$, то имеем смену равновесия системы – вместо равновесия $x_0 = x(u_1, ..., u_n)$ получаем равновесие $x_1 = x(u_1^1, ..., u_n^1)$.

Естественно считать, что если слабо изменятся внешние факторы, то система почти не изменит своего состояния, т.е. практически сохранит значение характеризующей ее переменной x_0 или займет равновесие, близкое к тому, что было, конечно же не отличающееся от предыдущего качественно. Однако исследования показали, что возможны такие малые изменения внешних факторов и они происходят тогда, когда пересекают при своем изменении так называемые *бифуркационные множества*, при которых система переходит к новому равновесию, для которого ее характерстика x_1 существенно отлична от предыдущей, и, следовательно, новое равновесие обладает новыми качествами.

Такие переходы были названы катастрофами, поскольку переходу к новому *устойчивому* равновесию предшествует потеря устойчивости раннего равновесия. Название было продиктовано примерами из механики, физики и кораблестроения, где такие процессы описывали реальные катастрофы (перелом балки, замерзание воды, перевертывание судна). Отсюда и название математической теории, данное ей французским математиком Рене Томом.

С точки зрения математики, как видно из уравнения (11), равновесие $x = x(u_1, ..., u_n)$ – это либо *точка минимума*, либо *точка максимума*, либо так называемая *точка перегиба* функции $V = V_{(u_1,...,u_n)}(x) = V(x, u_1, ..., u_n)$. Обозначение $V_{(u_1,...,u_n)}(x)$ говорит о том, что мы функцию $V = V(x, u_1, ..., u_n)$ рассматриваем как функцию *одной* переменной x и используем соответствующий математический аппарат, известный школьникам.

Как правило, устойчивые равновесия системы – это минимумы функции $V = V_{(u_1,...,u_n)}(x)$. На рисунках графика функции $V = V_{(u_1,...,u_n)}(x)$ они изображаются ямками (соответственно максимумы – неустойчивые равновесия – изображаются вершинами горок).

Теория элементарных катастроф по самой своей природе локальна. Иначе говоря, функция $V_{(u,v,w)}(x) = V(x, u, v, w)$ как функция x определена лишь в окрестности $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, и, следовательно, теория не описывает все возможные состояния равновесия. Уход системы в такие неописываемые теорией равновесия оговаривается как переход к равновесию $x = -\infty$ (минус бесконечность).

3. Определения экологической ситуации и экологических катастроф в экологии человека

Катастрофы, описываемые теорией катастроф, вполне отвечают тому, что можно было бы назвать экологическими катастрофами. Поэтому адаптируем терминологию теории катастроф к экологии человека.

Назовем *местной экологической ситуацией*, отвечающей набору внешних факторов $(u_1, ..., u_n)$, любую из точек локального минимума функции $V_{(u_1,...,u_n)}(x)$.

Экосистема «здоровье человека» в случае местной экологической ситуации пребывает в *равновесии*, т.е. величина $x(t)$ не меняется со временем (управляющие факторы $(u_1, ..., u_n)$ зафиксированы).

Региональной экологической ситуацией, связанной с V, называется набор местных экологических ситуаций, предполагая и возможность равновесия $x = -\infty$ (минус бесконечность).

Принятие значения $x = -\infty$ означает, что наша математическая модель говорит о том, что экосистема «здоровье человека» переходит в равновесное состояние, которое не описывается с помощью предложенного уравнения ее эволюции (1) (теория локальна!).

Фактически региональная экологическая ситуация – это набор местных экологических ситуаций. Иначе говоря, это набор возможных равновесных состояний экосистемы «здоровье человека».

Точкой экологической катастрофы называется любая точка перегиба функции $V = V_{(u_1,...,u_n)}(x)$.

Морфологией катастрофы, или множеством катастроф, называется множество всех точек катастрофы.

Точки катастроф, которые входят в бифуркационное множество, находят, исключая x, в процессе решения системы уравнений

$$\frac{\partial V(x, u_1, ..., u_n)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V(x, u_1, ..., u_n)}{\partial x^2} = 0.$$

Для конкретного набора внешних факторов у функции $V = V_{(u_1,...,u_n)}(x)$ может быть несколько точек минимумов. Скажем, это точки $x_1, x_2, ..., x_m$. В каком из этих равновесий находится система? Для этого придуманы различные *правила*.

Правилом называется способ, по которому мы выбираем равновесия, т.е. минимумы функции $V = V_{(u_1,...,u_n)}(x)$ для некоторой региональной экологической ситуации, связанной с V.

Рассмотрим два основных правила.

Правило максимального промедления предписывает состоянию оставаться в минимуме при заменении факторов до тех пор, пока он существует (рис. 1, вверху).

В момент, когда происходит исчезновение старого миниума и становится необходимым переход в новый, происходит экологическая катастрофа, т.е. резкое, скачкообразное изменение равновесия экосистемы «экология человека».

Правило Максвелла предписывает взять в качестве равновесия системы такую точку минимума, в которой функция $V = V_{(u_1,...,u_n)}(x)$ достигает наименьшего значения (рис. 1, внизу).

Поскольку одним из значений этого минимума может оказаться $-\infty$, правилом Максвелла лучше пользоваться тогда, когда V имеет конечные минимумы.

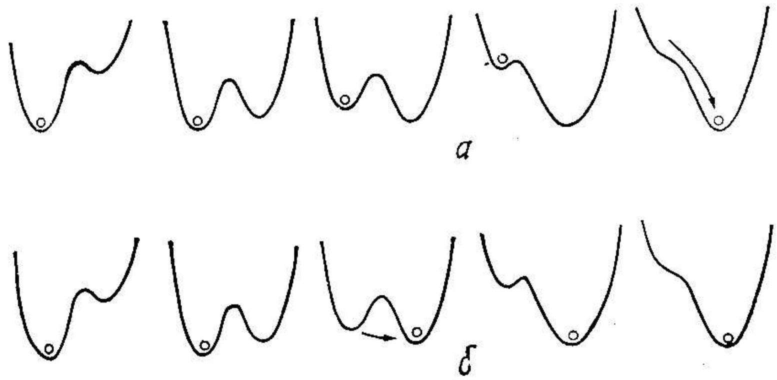

Рис. 1. Вверху показано действие правила максимального промедления, а на нижних рисунках – правило Максвелла.

Ясно, что катастрофы возникают тогда, когда $V = V_{(u_1,...,u_n)}(x)$ достигает абсолютного минимума в двух различных местах.

В случае правила максимального промедления катастрофе, т.е. резкой смене равновесия? отвечает качественное изменение формы потенциальной функции $V = V_{(u_1,...,u_n)}(x)$. В случае правила Максвелла резкая смена равновесия происходит без качественного изменения формы функции $V = V_{(u_1,...,u_n)}(x)$. С точки зрения теории катастроф в случае правила Максвелла можно говорить о некатастрофической смене равновесия. Хотя с точки зрения экологии это скорее всего самая настоящая катастрофа. Катастрофы происходят в любом смысле и вне зависимости от принятого правила, если, изменяясь, управляющие внешние факторы пересекают бифуркционное множество.

Изучим все сказанное в нашем конкретном случае, когда функция V имеет вид (8).

4. Экологические катастрофы типа «ласточкин хвост»

Для катастрофы «ласточкин хвост» потенциал

$$V(x, u, v) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx.$$

Рассмотрим множество

$$M_V = \{(x, u, v, w) : \nabla V = 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0\}.$$

Оно состоит из максимумов, минимумов и точек перегиба функции $V_{(u,v,w)}(x)$. Все они отвечают равновесию в состоянии изучаемой экосистемы человека.

Множество

$$S_V = \{(x, u, v, w) \in M_V : d^2V = 20x^3 + 6ux + 2v = 0\}$$

состоит из точек перегиба, которые принимаются, когда точка (u, v, w) принадлежит так называемому *бифуркационному множеству*:

$$B_V = \{(u, v, w) \in prS_V : \exists x(5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0 \ \& \ 20x^3 + 6ux + 2v = 0\}.$$

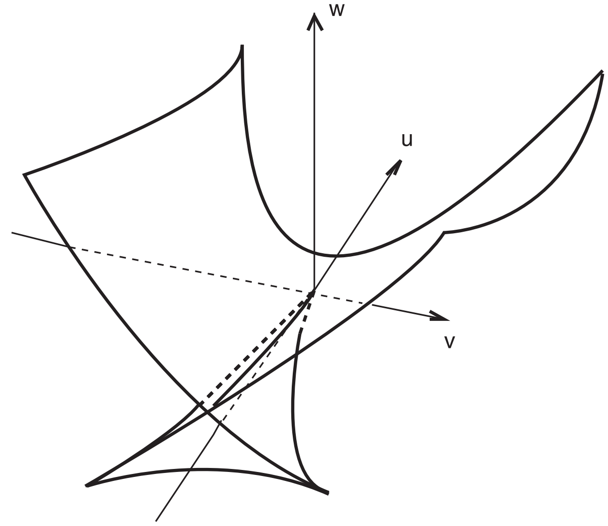

Рис. 2. Бифуркационное множество B_V для катастрофы «ласточкин хвост».

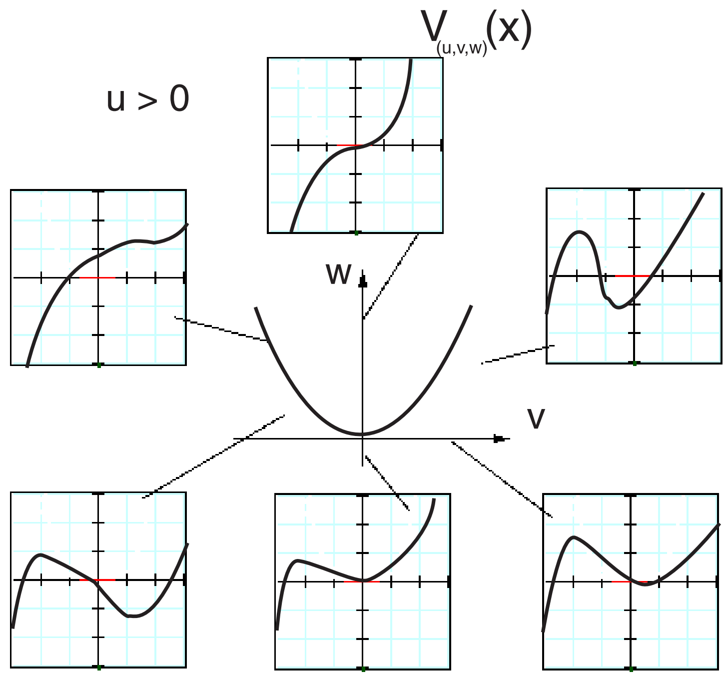

Рис. 3. Катастрофа «ласточкин хвост». Динамика появления и исчезновения максимумов и минимумов у функции $V_{(u,v,w)}(x)$ в сечении $u = const > 0$. При переходе через B_V рождается или умирает равновесие.

Множество B_V – это проекция множества S_V на плоскость (u, v, w). Оно изображено на (рис. 2)

Если точка (u, v, w) меняется, т.е. меняются условия существования экосистемы человека, то сменяется состояния равновесия экосистемы. Изменение качественное, скачкообразное, катастрофическое, если точка (u, v, w) при своем изменении пересекает бифуркационное множество. Это и есть резкая смена состояния здоровья человека.

Для фиксированных управляющих факторов (параметров) (u, v, w) график функции $V_{(u,v,w)}(x)$ изображен на рис. 3,4.

На рис. 3 значение параметр $u > 0$ зафиксировано, а остальные два могут меняться. Бифуркационное множество на плоскости vw сводится к параболе. Раз $u > 0$, то принимаются меры по преодолению возможной неблагополучной медико-санитарной ситуации.

При этом, однако, даже в случае неблагополучной медико-санитарной ситуации ($v < 0$) и при действии долговременного вредоносного фактора риска неравенством $w < 0$ возможна устойчивая равновесная здоровая экологическая ситуация, т.е. $x > 0$ (точка (v, w) расположена ниже параболы, слева). В случае перехода точки (v, w) во внутрь параболы экологическая ситуации резко меняется, имеем экологическую катастрофу, x уходит к $-\infty$, т.е. описание грядущего состояния экосистемы выходит за рамки нашей теории.

Так или иначе, но пользу лечения эта модель демонстрирует.

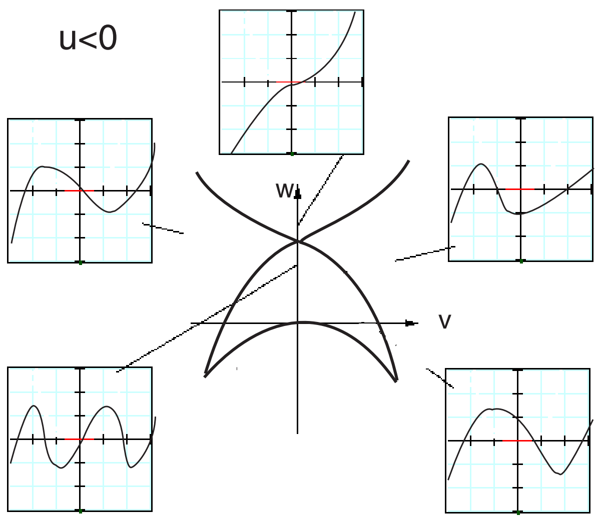

Рис. 4. Катастрофа «ласточкин хвост». Динамика появления и исчезновения максимумов и минимумов у функции $V_{(u,v,w)}(x)$ в сечении $u = const < 0$. При переходе через B_V рождается (умирает) одно или два равновесия.

Рассмотрим теперь случай $u < 0$, когда не принимаются меры по преодолению возможной неблагополучной медико-санитарной ситуации (см. 4). Мы видим, что даже в случае наличия неблагополучной медико-санитарной ситуации $v < 0$ возможно здоровое, т.е. $x > 0$, равновесное состояние экосистемы как при действии долговременного вредоносного фактора риска (график для V слева, с $x > 0$ в качестве локального минимума), так и при его отсутствии.

Но что более интересно: возможно также равновесное нездоровое состояние экосистемы при отсутствии неблагополучной медико-санитарной ситуации, т.е при $v > 0$ (график для V справа, с $x < 0$ в качестве локального минимума).

Наконец, возможны два альтернативных состояния равновесия – нездоровое и зоровое при отсутствии долговременного вредоносного фактора риска и при отсутствии/наличии неблагополучной медико-санитарной ситуации. Как тут не вспомнить южно-уральскую деревню.

5. Структурная устойчивость модели здоровья человека

Описание экологии человека, предложенное в данной статье, обладает важным достоинством – модель структурно устойчива. Иначе говоря, это означает, что найденная нами потенциальная функция (9)

$$V(x,u,v,w) = \frac{k_0}{5}x^5 + ux^2 + vx + w, \tag{12}$$

в случае ее возмущения (малого шевеления) вида

$$V(x,u,v,w) \to V(x,u,v,w) + \delta V(x,u,v,w)$$

может быть возвращена к выражению внешне такому же[2], как (12), если совершить следующие преобразования координаты x и параметров u, v, w:

$$x \to \overline{x} = \overline{x}(x,u,v,w),$$

$$(u,v,w) \to (\overline{u},\overline{v},\overline{w}) = \phi(u,v,w)$$

и прибавить к возмущенному потенциалу некоторую функцию $\psi(u,v,w)$ [4–6].

Иначе говоря, наша модель устойчива по отношению к изменениям потенциальной функции, которые могут проявляться в форме пожеланий внести уточнения в вид потенциальной функции или в форме высказываний о том, что в реальности экология человека не может быть описана некоторой выбранной раз и навсегда конкретной математической формулой.

Наличие структурной устойчивости у модели говорит о том, что ничего качественно нового в описании экологических ситуаций и экологических катастроф возмущенная модель не дает.

Литература

1. Калью, П.И. Сущностная характеристика понятия «здоровье» и некоторые вопросы перестройки здравоохранения: обзорная информация / П.И. Калью. – М., 1988. – 220 с.
2. Гуц, А.К. Математическая социология / А.К. Гуц, Л.А. Паутова, Ю.В. Фролова. – Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2003. – 192 с.
3. Гуц, А.К. Математические методы в социологии / А.К. Гуц, Ю.В. Фролова. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 216 с.
4. Брёкер, Т. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Брёкер, Л. Ландер. – М.: Мир, 1977.
5. Постон, Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт. – М.: Мир, 1980.
6. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. – М.: Мир, 1984.

[2] С точностью до написания черточек над x, u, v, w.