

## ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КРИВОЙ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗРЫВА ПРАВОЙ ЧАСТИ

**Р.Г. Идрисов, В.В. Коробицын**

Предложен подход нахождения точки пересечения траектории решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с поверхностью разрыва правой части. В непрерывной области решение вычисляется с помощью численного метода Рунге–Кутты, а для нахождения точки пересечения применяется линейная интерполяция точек решения до и после пересечения поверхности разрыва. Результаты вычислительного эксперимента показали снижение глобальной погрешности численного решения по сравнению с методами, игнорирующими наличие разрыва.

### **Введение**

Многие математические модели, описывающие процессы в механике, электротехнике, биологии и других областях, задаются системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с разрывной правой частью [6], [12]. Траектория решения таких систем теряет гладкость на поверхности разрыва, что может приводить к росту погрешности численного решения при пересечении границы непрерывности.

Традиционно для нахождения численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений используют методы Рунге–Кутты или Адамса, предполагая выполнение условия Липшица для функции правой части [1], [7], [8]. Однако для систем с разрывами применение этих методов приводит к неуправляемому росту погрешности. Даже если метод снабжен процедурой изменения шага интегрирования, все равно погрешность может увеличиваться в точке разрыва, и при этом может происходить рост числа итераций численного метода [2].

В настоящее время много работ посвящено численному решению систем ОДУ с разрывом в правой части [5], [9], [10], [11]. Однако, проведя обзор этих

работ, нельзя сказать, что существуют универсальные алгоритмы решения систем ОДУ с разрывом в правой части.

В данной статье предлагается подход для дополнения традиционных методов Рунге–Кутты процедурой нахождения точки пересечения траектории решения с поверхностью разрыва. Дополнительные аспекты решения систем ОДУ с разрывами освещены в работах [3], [4].

## 1. Описание подхода вычисления точки разрыва

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0,$$

или в покомпонентной записи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad t > 0,$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $x_i^0$  — координаты начальной точки траектории решения  $x_i(t)$ . Некоторые функции  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  терпят разрыв на поверхностях, задаваемых уравнениями  $\phi_j(t, x_1, \dots, x_n) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Существует два подхода для численного решения систем ОДУ с разрывом в правой части: 1) игнорировать разрыв; 2) на поверхности разрыва остановить вычисление и продолжить с новыми значениями функций.

В первом случае при решении не учитывается особенность системы ОДУ с разрывом, и в точке пересечения кривой решения с поверхностью разрыва происходит увеличение погрешности до неприемлемых значений.

Для реализации второго подхода предлагаем следующий алгоритм:

а) вычисляем решение дифференциального уравнения шаг за шагом, пока одна из функций  $\phi_j(t, x_1, \dots, x_n)$  не меняет знак;

б) с помощью любого итерационного метода для решения нелинейных алгебраических уравнений (например, метода Ньютона) находим решение системы уравнений

$$\begin{cases} \phi_j(t, x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \psi(t, x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\psi(t, x_1, \dots, x_n) = 0$  — уравнение прямой, составленной из точки решения до пересечения с поверхностью разрыва и точки решения после пересечения поверхности разрыва;

в) вычисляем решение дифференциального уравнения в найденной точке пересечения кривой решения с поверхностью разрыва и возобновляем вычисление уже с новыми значениями функций.

Для построения функции  $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$  необходимо взять точку решения  $M_1(t^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ , полученную на последнем до пересечения с поверхностью

разрыва шаге, и точку  $M_2(t^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$  — первую точку решения, полученную после пересечения с поверхностью разрыва. Тогда уравнение прямой, проходящей через эти две точки, примет вид  $\frac{t - t^{(1)}}{t^{(2)} - t^{(1)}} = \frac{x_1 - x_1^{(1)}}{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}} = \dots = \frac{x_n - x_n^{(1)}}{x_n^{(2)} - x_n^{(1)}}$ . Получаем

$$\psi(t, x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_1 - x_1^{(1)}}{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}} = \frac{t - t^{(1)}}{t^{(2)} - t^{(1)}}, \\ \dots \\ \frac{x_n - x_n^{(1)}}{x_n^{(2)} - x_n^{(1)}} = \frac{t - t^{(1)}}{t^{(2)} - t^{(1)}}. \end{cases}$$

Решение этой системы можно выразить в явном виде

$$x_i(t) = x_i^{(1)} + \frac{x_i^{(2)} - x_i^{(1)}}{t^{(2)} - t^{(1)}}(t - t^{(1)}).$$

Тогда решение системы (1) преобразуется к виду

$$\phi_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0,$$

где все  $x_i(t)$  выражены явно через  $t$ . Задача вычисления точки пересечения кривой решения с поверхностью разрыва сводится к нахождению значения свободной переменной  $t$ , значение которой соответствует искомой точке. Однако в нашем случае эта точка будет показывать точку пересечения отрезка прямой линии, концы которого лежат в точках до и после пересечения поверхности разрыва.

## 2. Вычислительный эксперимент

Для тестирования описанного подхода для численного решения систем ОДУ с разрывом в правой части было исследовано поведение численных методов на решении следующей системы ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - d_1, \\ \frac{dy}{dt} = x - c_1, \end{cases} \quad \text{при } x < \alpha, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - d_2, \\ \frac{dy}{dt} = x - c_2, \end{cases} \quad \text{при } x > \alpha,$$

с заданными параметрами  $d_1 = d_2 = 0.5$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.8$ ,  $\alpha = 0.5$  и начальными данными  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0.4999$ ,  $y_0 = 0.3$ .

Для этой системы известно точное решение:

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 \cdot e^{t-t_0} + A_2 \cdot e^{-(t-t_0)} + a_x, \\y(t) &= A_1 \cdot e^{t-t_0} - A_2 \cdot e^{-(t-t_0)} + a_y,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{(x_0 - a_x) + (y_0 - a_y)}{2}, & A_2 &= \frac{(x_0 - a_x) - (y_0 - a_y)}{2}, \\ \begin{cases} a_x &= c_1, \\ a_y &= d_1, \end{cases} & \text{при } x_0 < \alpha, \\ \begin{cases} a_x &= c_2, \\ a_y &= d_2, \end{cases} & \text{при } x_0 > \alpha.\end{aligned}$$

Решение системы терпит разрыв на прямой  $x = \alpha$ . Точное решение является периодическим с периодом

$$T = 2 \ln \left( \frac{|a_x - x_0| + \sqrt{(a_x - x_0)^2 - 4A_1A_2}}{2A_1} \right).$$

Траектория точного решения на фазовой плоскости изображена на рисунке 1.

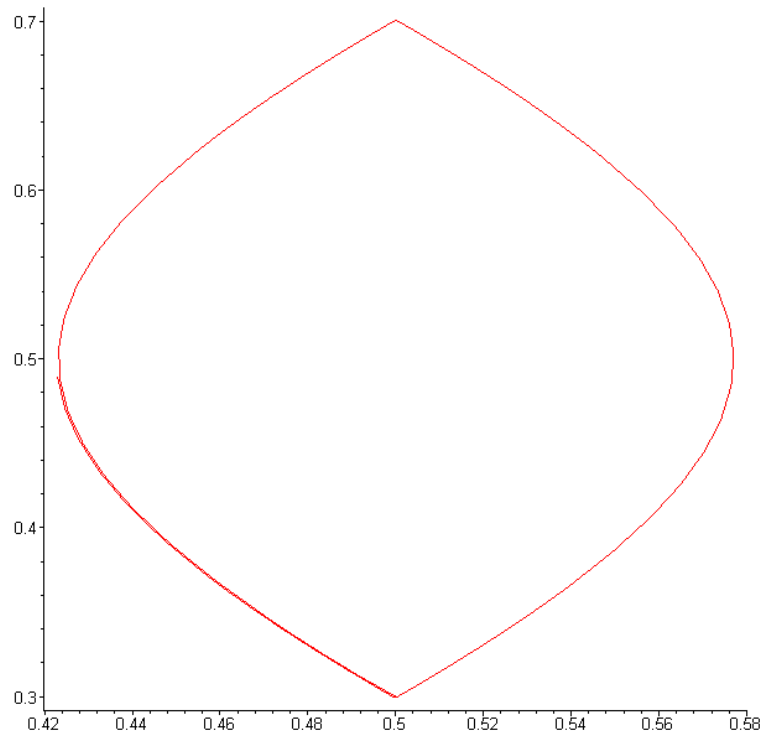


Рис. 1. Траектория решения системы (2) на фазовой плоскости

Для проведения эксперимента была написана программа на языке программирования C++, реализующая следующие методы решения систем ОДУ: методы Рунге—Кутты 3 и 4 порядка, метод Рунге—Кутты—Фельберга 4(5) порядка,

метод Розенброка (неявный метод Рунге—Кутты) и модификация вышеперечисленных методов для решения систем ОДУ с разрывом в правой части. Модификация заключалась в добавлении алгоритма вычисления точки пересечения траектории с поверхностью разрыва, описанном выше.

Для оценки эффективности применения модификации численных методов была проведена оценка локальной погрешности численного решения. Для этого в каждой точке траектории численного решения вычислялось значение локальной погрешности по формуле

$$Err(t_k) = \sqrt{(x_k - x^*(t_k))^2 + (y_k - y^*(t_k))^2},$$

где  $x_k, y_k$  — координаты точки численного решения, соответствующего моменту времени  $t_k$ ,  $x^*(t_k), y^*(t_k)$  — координаты точки точного решения в момент времени  $t_k$ . Графики изменения локальной погрешности при использовании методов Рунге—Кутты 3 и 4 порядков и соответствующих им модификаций представлены на рисунке 2. Как видно из рисунка, локальная погрешность стандартных методов растет с каждым периодом, в то время как погрешность модифицированного метода остается в пределах заданной точности.

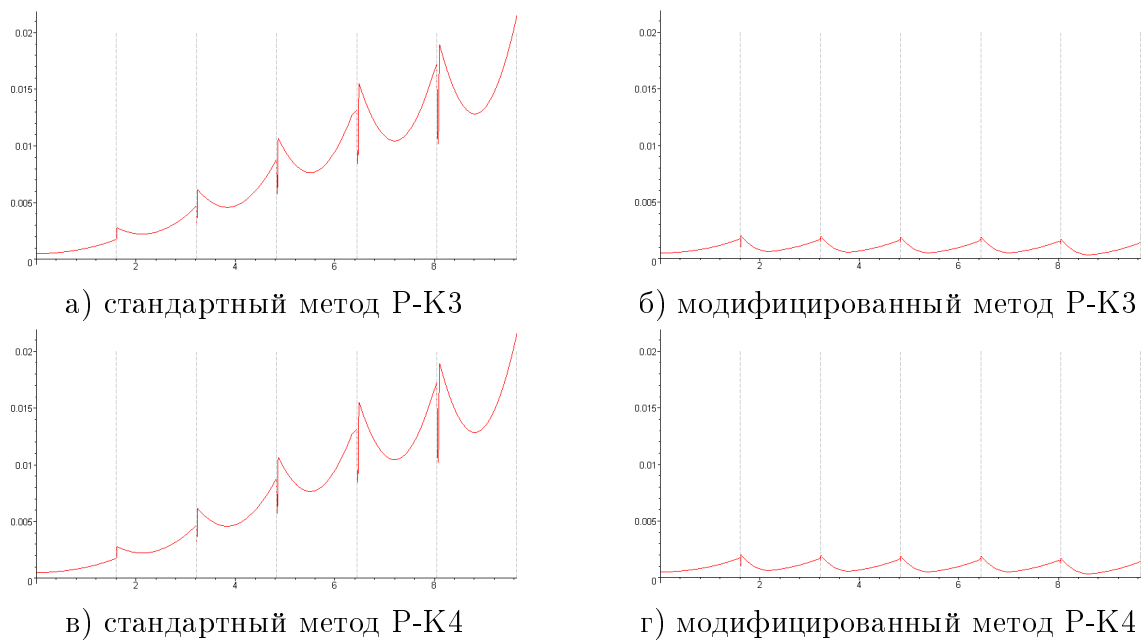


Рис. 2. Графики локальных погрешностей методов Рунге—Кутты 3 и 4 порядков до модификации и после (заданная точность  $10^{-4}$ )

Графики изменения локальной погрешности для методов, соответствующих схеме Рунге—Кутты—Фельберга 4 порядка с модификацией, представлены на рисунке 3. Из рисунка видно, что локальная погрешность метода до модификации растет, а после модификации метода остается в пределах заданной точности.

Графики изменения локальной погрешности метода Розенброка (неявный метод Рунге—Кутты) представлены на рисунке 4. Этот метод показал себя луч-

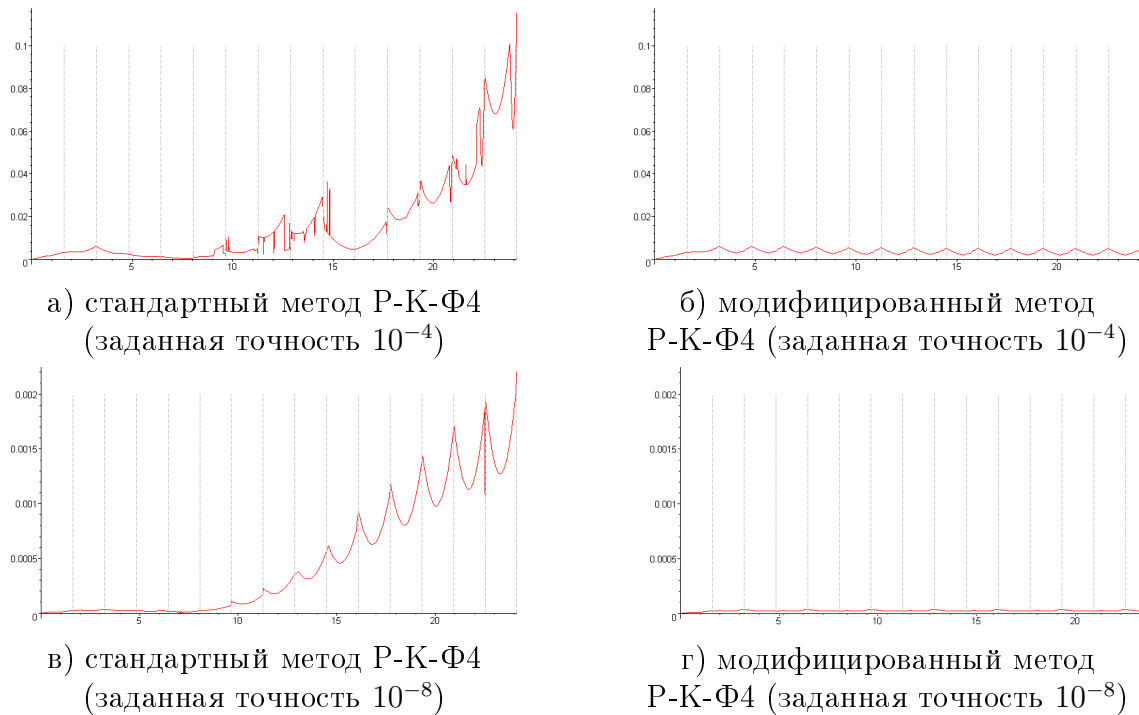


Рис. 3. Графики локальных погрешностей методов Рунге—Кутты—Фельберга до модификации и после нее

ше других, поскольку неявный метод предполагает использование итерационной процедуры для поиска численного решения. Эта процедура оказывается очень полезной при поиске точки пересечения с поверхностью разрыва. Тем не менее для стандартного метода локальная погрешность все же растет, а после модификации метод дает очень хороший результат: локальная погрешность не превышает заданного порога точности.

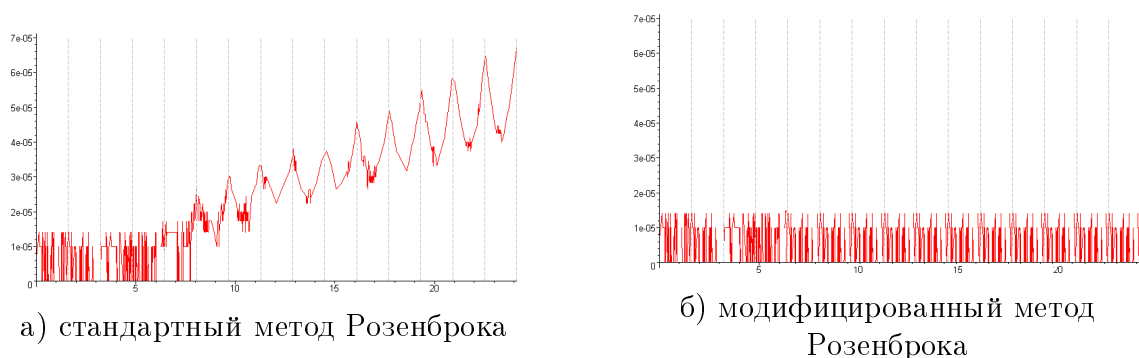


Рис. 4. Графики локальных погрешностей метода Розенброка до модификации и после нее

Делая общий обзор проведенного эксперимента, можно сказать, что использование предложенного алгоритма линейного приближения точки пересечения траектории решения ОДУ с поверхностью разрыва позволяет сохранить глобальную погрешность в пределах заданной точности, в то время как при игнорировании разрыва глобальная погрешность растет и превышает допустимую

через несколько периодов.

Таким образом, в представленной работе приведен способ уточнения точки пересечения кривой решения с поверхностью разрыва. В ходе реализации была решена задача по определению точки пересечения кривой решения с поверхностью разрыва. Также на примере одной системы проведен вычислительный эксперимент, позволяющий оценить точность решения систем ОДУ с разрывом в правой части при разных подходах. Представленный подход может быть использован для разработки программного продукта, предназначенного для численного исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
2. Коробицын В.В., Маренич В.Б., Фролова Ю.В. Исследование поведения явных методов Рунге–Кутты при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Математические структуры и моделирование. 2007. Вып. 17. С. 19–25.
3. Коробицын В.В., Фролова Ю.В. Алгоритм численного решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Математические структуры и моделирование. 2005. Вып. 15. С. 46–54.
4. Коробицын В.В., Фролова Ю.В., Маренич В.Б. Алгоритм численного решения кусочно-шитых систем // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, N. 2. С. 70–81.
5. Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Численное моделирование гибридных систем методом Рунге–Кутты второго порядка точности // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, N. 2. С. 99–105.
6. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
7. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
8. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
9. Gear C.W., Osterby O. Solving ordinary differential equations with discontinuities // ACM Trans. Math. Software. 1984. Vol. 10. P. 23–44.
10. Piironen P.T., Kuznetsov Yu.A. An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions // ACM Trans. Math. Software. 2008. Vol. 34, N. 13. P. 1–24.
11. Shampine L.F., Thompson S. Event location for ordinary differential equations // Computer and Mathematics with Application. 2000. Vol. 39. P. 43–54.
12. Zhusubaliyev Z., Mosekilde E. Bifurcations and chaos in piecewise-smooth dynamical systems. Singapore: World Scientific, 2003.