

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ГРАФИЧЕСКИЙ ПАКЕТ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В СЛУЧАЕ КАТАСТРОФЫ «ЗВЕЗДА»

А. К. Гуц, Е. О. Хлызов

Приводится краткое описание возможностей созданного компьютерного графического пакета CatVis, позволяющего изучать потенциальную функцию ряда элементарных катастроф, в том числе и катастрофы «звезда», управляющее пространство которой шестимерно. Данная катастрофа интересна тем, что с её помощью можно прогнозировать состояния 6-ярусных лесных экосистем.

Введение

Элементарная теория катастроф возникла в конце 1960-х гг. благодаря усилиям французского математика Тома Рене.

Сегодня математическая теория катастроф [2] находит применение в самых различных исследованиях, связанных с изучением изменений состояний равновесий исследуемой системы под воздействием внешних управляющих факторов, образующих управляющее пространство.

Системе в теории катастроф отвечает потенциальная функция V , математическое выражение для которой в случае числа внешних факторов ≤ 4 описывается теоремой Тома. Для исследователя важным является получение полной информации о форме и числовых значениях потенциальной функции в ходе изменений внешних факторов.

Полезно иметь графический пакет программ для компьютера, с помощью которого такая информация о потенциальной функции представляется в полной мере. Авторам известна только одна доступная в Интернете программа, решающая указанную задачу [3].

Наиболее часто для моделирования применяется элементарная катастрофа «сборка» (управляющее пространство двумерно, бифуркационное множество представляется одномерной кривой). Когда управляющее пространство имеет размерность более двух, появляются сложности с визуализацией бифуркационной поверхности. Для того чтобы сохранить наглядность, можно зафиксировать

точку в управляющем пространстве и рассмотреть сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Но это становится тем сложнее, чем больше размерность управляющего пространства. На практике анализ катастрофы типа «ласточкин хвост» уже требует большой вычислительной работы.

Для облегчения задачи визуализации при анализе катастроф с большим числом управляющих факторов авторами статьи разработан программный продукт CatVIS.

В статье приводится краткое описание возможностей CatVis и рассматривается работа с катастрофой «звезда», управляющее пространство которой шестимерно. Данная катастрофа интересна тем, что с её помощью можно прогнозировать состояния 6-ярусных лесных экосистем.

1. Описание программного пакета

В качестве основного языка программирования был выбран язык Java¹. Основным аргументом в пользу такого выбора были возможность выполнения программы непосредственно в вёб-браузере (используя технологию java-апплета) и наличие огромного числа готовых библиотек.

В качестве графической подсистемы была выбрана библиотека Processing², распространяющаяся по лицензии LGPL и имеющая широкие возможности по визуализации данных³.

Реализация некоторых вычислительных алгоритмов была заимствована из пакета Java Scientific Library, разработанного М. Т. Фланаганом⁴.

Программный пакет CatVIS изначально задумывался как вспомогательный инструмент, облегчающий исследователю понимание процессов, возникающих в изучаемой системе при движении в управляющем пространстве.

Возможности пакета CatVIS:

1. Визуализация двумерных сечений по всем плоскостям в заданной точке.
2. Визуализация потенциальной функции $V(x)$.
3. Показ всех критических точек катастрофы при заданных управляющих факторах (решения уравнения $dV/dx = 0$).
4. Визуализация поверхности бифуркационного множества в пространстве $\{x, p_1, p_2\}$, где p_1, p_2 — управляющие факторы.
5. Интерактивность — изменение управляющих факторов сразу же влечёт за собой изменение всех графиков.

¹ См.: URL: <http://java.com>.

² См.: URL: <http://processing.org>.

³ Большое количество примеров можно найти на сайте: URL: <http://openprocessing.org>.

⁴ См.: URL: <http://www.ee.ucl.ac.uk/~mflanaga>.

Подобные программы создавались и за рубежом, но у CatVIS есть как минимум одно существенное отличие — для фиксированной точки управляющего пространства можно получить уравнения сечений в параметрической форме (для ознакомления с используемым алгоритмом см. [1]). Это позволяет гораздо точнее реагировать на изменение управляющих факторов пользователем. Кроме того, CatVIS может быть встроен в веб-страницу.

2. Демонстрация возможностей

Для примера рассмотрим работу программы с катастрофой типа «звезда», потенциал которой задаётся уравнением [1]:

$$V(x) = \frac{x^8}{8} + \frac{A}{6}x^6 + \frac{B}{5}x^5 + \frac{C}{4}x^4 + \frac{D}{3}x^3 + \frac{E}{2}x^2 + Fx. \quad (1)$$

Управляющее пространство с факторами A, B, C, D, E, F шестимерно. Следовательно, для полного его представления понадобится 15 уникальных сечений — по 5 сечений на каждый управляющий фактор с учётом повторений.

Для определённости положим $A = 0, B = 0, C = 50, E = -24$.

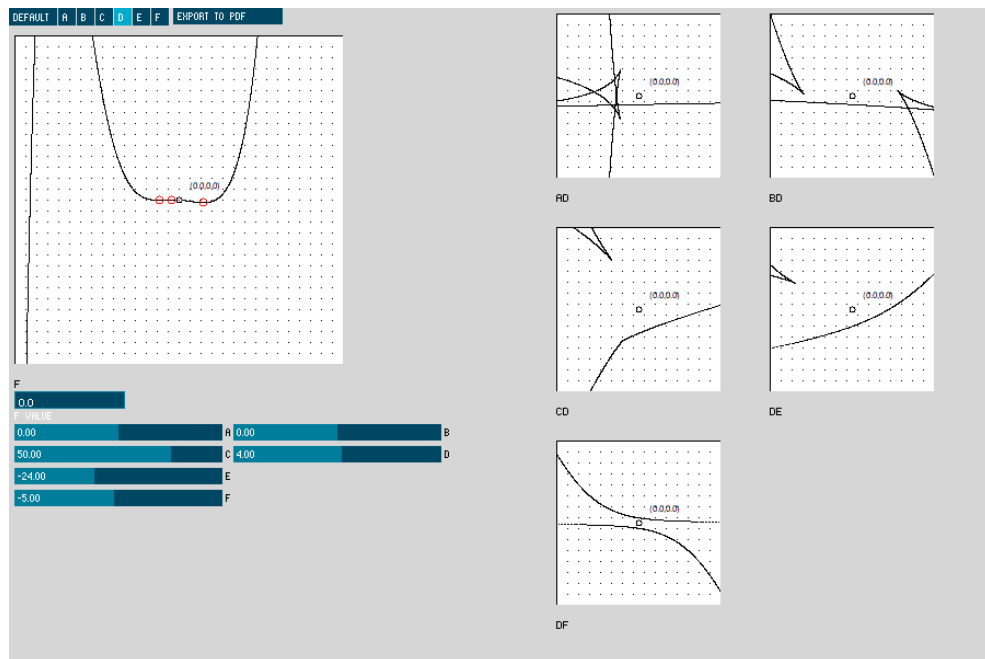


Рис. 1. Главное окно программы

На рис. 1 представлено окно программы CatVIS. В верхнем левом углу расположены кнопки навигации по сечениям, кнопка доступа к окну настроек и кнопка экспорта всех сечений и потенциальной функции в PDF. В нижнем левом углу находятся контроли для точного задания управляющих факторов. В правой части — интерактивные графики сечений. График потенциальной функции $V(x)$ с отмеченными точками экстремума — в левой части основного окна.

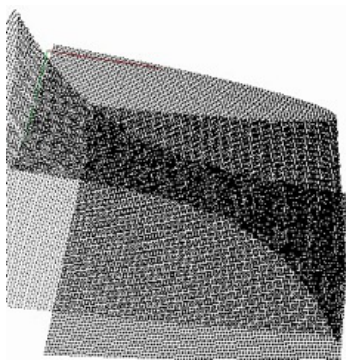
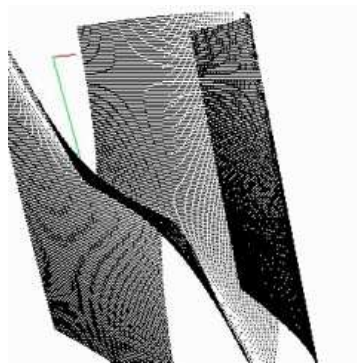
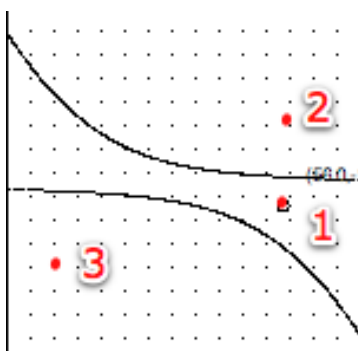
Рис. 2. Взгляд со стороны оси x Рис. 3. Взгляд со стороны оси D 

Рис. 4. Сечение бифуркационного множества

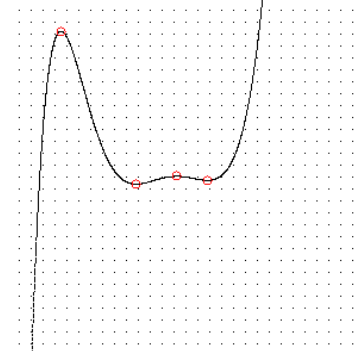


Рис. 5. Потенциал в ситуации (1)

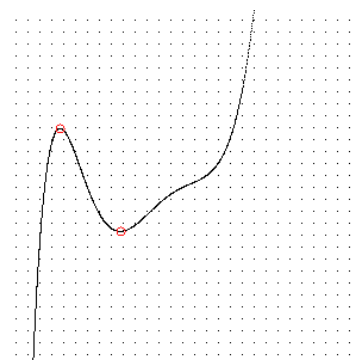


Рис. 6. Потенциал в ситуации (2)

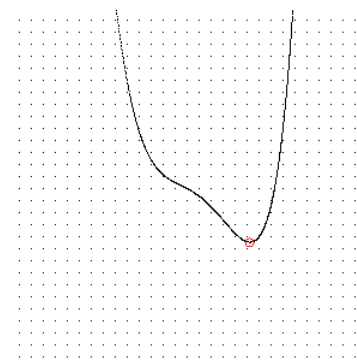


Рис. 7. Потенциал в ситуации (3)

Рассмотрим плоскость DF , где $D \in [-100..100]$, $F \in [-100, 100]$. На рис. 2 и 3 показано изображение бифуркационного множества в пространстве $\{x, D, F\}$.

На полупрозрачных графиках затемнённость области определяется количеством критических точек. Для упрощения можно сказать, что граница области принадлежит бифуркационному множеству в случае, если соседняя область отличается по цвету. На рис. 2 хорошо видно, что центральная область более тёмная — если повернуть поверхность относительно оси OF на $\pi/4$, то легко увидеть, как именно расположены складки.

Рассмотрим сечение бифуркационного множества плоскостью, параллельной DF , в указанной выше точке (рис. 4). На рис. 5, 6, 7 изображены соответствующие виды потенциальной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А. К., Хлызов Е. О. Компьютерная визуализация сечений бифуркационных множеств в теории катастроф Тома // Вестник Омского университета. 2010. Вып. 2. С. 26–28.
2. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. М.: Мир, 1980.
3. Catastrophe teacher. URL: <http://pagesperso-orange.fr/l.d.v.durjardin>.
4. Woodcock A., Poston T. A geometrical study of the elementary catastrophes // Lectures Notes in Math. Berlin: Springer, 1974. Vol. 373.