*Математические структуры и моделирование*
*2014. №2(30). С. 20–31*

УДК 517.968

# ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В $R^3$

**В.Н. Степанов**
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: stpnv@yandex.ru

Омский государственный технический университет

**Аннотация.** Рассматривается следующая задача интегральной геометрии: требуется восстановить функцию, заданную на сфере $S^2$, если известны интегралы от этой функции по полусферам. Получены формулы обращения для искомой функции различными способами: с помощью разложения в ряд по сферическим функциям; редукцией задачи к интегральному уравнению Абеля в «стиле» Функа; использованием формулы обращения А.В. Погорелова.

**Ключевые слова:** интегральная геометрия, геометрическая томография, полусферическое преобразование, формула обращения, сферические гармоники, уравнение Абеля.

## Введение

Задачи восстановления функции через интегралы от неё по семейству подмногообразий относятся к задачам интегральной геометрии. Общая постановка задач интегральной геометрии состоит в следующем [6,13]. Пусть $\Omega$ — гладкое многообразие в $R^n$ и $\{Q(s)\}$ — семейство подмногообразий, зависящее от векторного параметра $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Пусть известны интегралы от некоторой функции $u(x)$, $x \in R^n$ по семейству подмногообразий

$$f(s) = \int_{Q(s)} u(x) d\mu,$$

где $d\mu$ — элемент меры на $Q(s)$. Требуется по функции $f(s)$ найти функцию $u(x)$. Исследование задач интегральной геометрии предполагает получение ответов на следующие вопросы: определяется ли однозначно функция $u(x)$ по функции $f(s)$?; для каких функций $f(s)$ решение задачи существует?; как по функции $f(s)$ найти функцию $u(x)$, желательно в замкнутой аналитической форме? Заметим также, что задачи интегральной геометрии являются некорректными, поэтому важное значение имеют оценки устойчивости решения.

Задачи интегральной геометрии в случае, когда несущее многообразие является сферой, рассматривались в работах [4, 10, 14, 15]. Минковский с помощью разложения по сферическим функциям в [14] показал, что чётная на сфере функция однозначно определяется её интегралами вдоль больших кругов. Позднее Функ [15] свёл решение этой задачи к интегральному уравнению

Абеля и получил решение в замкнутой форме. Далее, А.В. Погорелов в [10] получил формулу обращения, рассматривая проблему конструктивного описания плоских метрик в трёхмерном пространстве. Другие задачи интегральной геометрии на сфере рассматривались в работах [2–4, 16, 17]. Задачи интегральной геометрии на сфере имеют многочисленные приложения: геометрическая томография, теория выпуклых поверхностей, теория радиолокационного распознавания объектов — и с этой точки зрения являлись предметом исследования в работах [1–3, 9, 16, 17].

В данной работе рассматривается следующая задача интегральной геометрии: требуется восстановить функцию, заданную на сфере $S^2$, если известны интегралы от этой функции по полусферам. Получены формулы обращения для искомой функции различными способами: с помощью разложения по сферическим гармоникам; редукцией задачи к интегральному уравнению Абеля в «стиле» Функа; использованием формулы обращения А. В. Погорелова из [10].

## 1. Постановка задачи и основной результат

Пусть $n, p, q$ — точки на единичной сфере $S^2 = \{x \in R^3 : |x| = 1\}$; $(n, p)$ — скалярное произведение векторов $n$ и $p$; $S^2(n) = \{p \in S^2 : (n, p) > 0\}$ — полусфера; $\Gamma(n) = \{p \in S^2 : (n, p) = 0\}$ — окружность большого круга, ортогонального вектору $n$; $\Delta$ — оператор Лапласа-Бельтрами на $S^2$ [5]. $z^+(n) = 1/2[z(n) + z(-n)]$, $z^-(n) = 1/2[z(n) - z(-n)]$ — соответственно чётная и нечётная части функции $z(n), n \in S^2$; $(\gamma, \tau)$ и $(\theta, \varphi)$ — сферические координаты точек $n$ и $p$ соответственно относительно полюса $q$. Для функции $z(\theta, \varphi)$ точки $p(\theta, \varphi)$ на сфере $S^2$ через $\widetilde{z}(\theta, q)$ обозначим результат применения оператора усреднения $U$ к функции $z(\theta, \varphi)$ по переменной $\varphi$, то есть

$$\widetilde{z}(\theta, q) = Uz(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z(\theta, \varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi\sin\theta}\int_{(p,q)=\cos\theta} z(p)ds_p. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу интегральной геометрии: найти аналитическую на сфере $S^2$ функцию $u(n)$, если известна функция

$$f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2(n)} u(p)d\sigma. \tag{2}$$

Из (2) получаем уравнения для чётной и нечётной части искомой функции:

$$f^+(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2(n)} u^+(p)d\sigma, \quad f^-(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2(n)} u^-(p)d\sigma. \tag{3}$$

Первое из уравнений (3) не определяет однозначно чётную часть $u^+(p)$ функции $u(p)$. Действительно, функция $u_1(p) = u^+(p) + z(p)$, где $z(p)$ — любая чётная на $S^2$ функция, среднее значение которой равно нулю, также удовлетворяет этому уравнению. Поэтому целесообразно ставить задачу определения по функции $f(n)$ только нечётной части функции $u(p)$, то есть функции $u^-(p)$. Это равносильно рассмотрению класса нечётных на сфере $S^2$ функций $u(p)$. При этом функции $f(n)$ также принадлежат классу нечётных на сфере функций. В дальнейшем это условие для уравнения (2) предполагается выполненным.

**Теорема 1.** *Для любой аналитической нечётной на сфере функции f(n) существует единственное нечётное аналитическое решение уравнения (2). При этом имеют место следующие формулы обращения:*

$$u(q) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(p,q)>0}\frac{\Delta f(p)d\sigma}{(p,q)}; \tag{4}$$

$$u(q) = -\left.\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{(p,q)^2>t}\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial q}\,|_{x=p}|(p,q)|d\sigma}{\sqrt{(p,q)^2-t}}\right|_{t=0}; \tag{5}$$

$$u(q) = -\int_0^{2\pi}\frac{(\widetilde{f}'(\theta,q)\sin\theta)'}{\cos\theta}d\theta; \tag{6}$$

$$u(q) = f(q) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\theta\widetilde{f}''(\theta,q)d\theta. \tag{7}$$

Доказательство существования и единственности решения уравнения (2) дано в разделе 2. Там же доказана формула обращения (4). В разделах 3 и 4 получены формулы обращения (5), (6) и (7).

## 2. Формула обращения для полусферического преобразования. Метод сферических гармоник

Пусть $(\theta,\varphi)$ — сферические координаты точки $p$ относительно полюса $q$, $Y_k(p)$ — сферическая гармоника порядка $k$. Покажем, что среднее значение $\widetilde{Y}_k(\theta,q)$ сферической гармоники $Y_k(p)$ равно:

$$\widetilde{Y}_k(\theta,q) = P_k(\cos\theta)Y_k(q),$$

где $P_k(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра порядка $k = 0,1,2,\dots$. Действительно, подставляя в (1) выражение

$$Y_k(p) = \sum_{m=0}^{k}P_k^{(m)}(\cos\theta)[a_k^{(m)}\cos m\varphi + b_k^{(m)}\sin m\varphi]$$

для сферической гармоники $Y_k(p)$, где $P_k^{(m)}(\cos\theta)$ — присоединённые полиномы Лежандра, $P_k^{(0)}(\cos\theta) = P_k(\cos\theta)$, получаем:

$$\widetilde{Y}_k(\theta,q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y_k(\theta,\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{k}\int_{-\pi}^{\pi}P_k^{(m)}(\cos\theta)[a_k^{(m)}\cos m\varphi +$$
$$+ b_k^{(m)}\sin m\varphi]d\varphi = P_k(\cos\theta)a_k^{(0)}.$$

Полагая в этом равенстве $\theta = 0$ и учитывая, что $\widetilde{Y}_k(\theta,q)|_{\theta=0} = Y_k(q)$, $P_k(1) = 1$, получаем $a_k^{(0)} = Y_k(q)$.

**Лемма 1.** *Собственные значения уравнения (2) равны*

$$\lambda_{2k+1} = (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{(2k+2)!!}.$$

*Собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda_{2k+1}$, состоит из всех сферических гармоник порядка $2k+1$.*

*Доказательство.* Пусть $Y_m(p)$ — сферическая гармоника порядка $m$. Принимая точку $q \in S^2$ за полюс и подставляя в правую часть уравнения (2) выражение

$$Y_{2k+1}(p) = \sum_{m=0}^{2k+1} P_{2k+1}^{(m)}(\cos\theta)[a_{2k+1}^{(m)} \cos m\varphi + b_{2k+1}^{(m)} \sin m\varphi]$$

для сферической гармоники $Y_{2k+1}(p)$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(p,q)>0} Y_{2k+1}(p)d\sigma = \sum_{m=0}^{2k+1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2k+1}^{(m)}(\cos\theta)[a_{2k+1}^{(m)} \cos m\varphi + b_{2k+1}^{(m)} \sin m\varphi]\cdot$$
$$\cdot \sin\theta d\theta = a_{2k+1}^{(0)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2k+1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

Так как [7]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2k+1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_0^1 P_{2k+1}(t)dt = (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{(2k+2)!!},$$

то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(p,q)>0} Y_{2k+1}(p)d\sigma = (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{(2k+2)!!} a_{2k+1}^{(0)}.$$

Выше показано, что $a_{2k+1}^{(0)} = Y_{2k+1}(q)$. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(p,q)>0} Y_{2k+1}(p)d\sigma = (-1)^k \frac{|2k-1|!!}{(2k+2)!!} Y_{2k+1}(q),$$

то есть сферические гармоники $Y_{2k+1}(q)$ являются собственными функциями уравнения (2), а соответствующие собственные числа равны $(-1)^k \frac{(|2k-1|)!!}{(2k+2)!!}$. Поскольку сферические функции нечётных порядков образуют полную систему в подпространстве нечётных суммируемых на $S^2$ функций, то других собственных функций уравнение (2) не имеет. ■

**Лемма 2.** *Уравнение (2) имеет аналитическое на сфере $S^2$ решение $u(p)$ тогда и только тогда, когда функция f(p) аналитическая на $S^2$.*

*Доказательство.* Предположим сначала, что $f(p)$ аналитическая на $S^2$ функция и

$$f(p) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_{2k+1}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-2k-1}^{2k+1} a_{2k+1}^{(m)} Y_{2k+1}^{(m)}(p), \tag{8}$$

где
$$Y_{2k+1}(q) = \frac{4k+3}{4\pi}\int_{S^2} f(p)P_{2k+1}((p,q))d\sigma_p$$
её разложение по ортонормированной системе сферических функций нечётного порядка ($f(p)$ — нечётная функция). В силу леммы 1 решение $u(p)$ уравнения (2) можно записать в виде ряда
$$u(p) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k+2)!!}{|2k-1|!!} Y_{2k+1}(p). \tag{9}$$
Докажем, что $u(p)$ — аналитическая на $S^2$ функция. Для этого оценим члены её разложения по сферическим гармоникам. Так как $f(p)$ — аналитическая функция, то существуют постоянные $c > 0$ и $\eta > 0$ такие, что [12]
$$|Y_{2k+1}(p)| \le ce^{-\eta k},\ p \in S^2, k = 0, 1, 2, \dots .$$
Поэтому
$$\left|(-1)^k \frac{(2k+2)!!}{|2k-1|!!}\, Y_{2k+1}(p)\right| \le c_1 e^{-\eta_1 k},\ p \in S^2,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$
при некоторых постоянных $c_1 > 0$ и $\eta_1 > 0$. Таким образом, члены разложения функции $u(p)$ в ряд по сферическим гармоникам убывают по экспоненциальному закону. Следовательно, $u(p)$ — аналитическая на $S^2$ функция [12].

Обратно. Пусть $u(p)$ — аналитическая на $S^2$ функция. Разлагая её в ряд по сферическим гармоникам
$$u(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{Y}_{2k+1}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-2k-1}^{2k+1} \widehat{a}_{2k+1}^{(m)} \widehat{Y}_{2k+1}^{(m)}(p),$$
где
$$\widehat{Y}_{2k+1}(q) = \frac{4k+3}{4\pi}\int_{S^2} u(p)P_{2k+1}((p,q))d\sigma_p,$$
и пользуясь леммой 1 получаем следующее разложение для $f(p)$:
$$f(p) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{|2k-1|!!}{(2k+2)!!} \widehat{Y}_{2k+1}(p).$$
В силу аналитичности $u(p)$
$$|\widehat{Y}_{2k+1}(p)| \le \widehat{c}e^{-\widehat{\eta} k}, p \in S^2,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$
где $\widehat{c} > 0$ и $\widehat{\eta} > 0$ — некоторые постоянные. Поэтому для членов разложения функции f(p) имеют место неравенства
$$\left|(-1)^k \frac{|2k-1|!!}{(2k+2)!!} \widehat{Y}_{2k+1}(p)\right| < |\widehat{Y}_{2k+1}(p)| \le \widehat{c}e^{-\widehat{\eta} k},\ p \in S^2,\ k = 0, 1, 2, \dots .$$
Это и означает аналитичность f(p) на [12]. ■

Докажем формулу обращения (4). Разложим левую часть уравнения (2) в ряд (8) по сферическим гармоникам, при этом решение представляется рядом (9). Подставим разложение (8) в интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{(p,q)>0}\frac{\Delta f(p)}{(p,q)}d\sigma_p,$$

воспользуемся равенством

$$\Delta Y_{2k+1}(p) = -(2k+1)(2k+2)Y_{2k+1}(p),$$

почленно проинтегрируем, перейдём к сферическим координатам $\theta, \varphi$ относительно полюса $q$ и используем равенства [7]:

$$\widetilde{Y}_{2k+1}(\theta,q) = P_{2k+1}(\cos\theta)Y_{2k+1}(q),$$

$$\int_0^1 \frac{P_{2k+1}(t)}{t}dt = (-1)^k\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},\ k=0,1,2,\dots.$$

Последовательно получаем

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{(p,q)>0}\frac{\Delta f(p)}{(p,q)}d\sigma_p = -\frac{1}{2\pi}\int_{(p,q)>0}\frac{\Delta\left[\sum_{k=0}^{\infty}Y_{2k+1}(p)\right]}{(p,q)}d\sigma_p =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(p,q)>0}\frac{\Delta Y_{2k+1}(p)}{(p,q)}d\sigma_p = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(2k+2)\int_{(p,q)>0}\frac{Y_{2k+1}(p)}{(p,q)}d\sigma_p =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(2k+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{Y_{2k+1}(\theta,\varphi)}{\cos\theta}\sin\theta d\theta d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(2k+2)\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y_{2k+1}(\theta,\varphi)d\varphi\right]\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(2k+2)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{P_{2k+1}(\cos\theta)}{\cos\theta}\sin\theta d\theta\right]\cdot$$

$$\cdot Y_{2k+1}(q) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(2k+2)\left[\int_0^1\frac{P_{2k+1}(t)}{t}dt\right]Y_{2k+1}(q) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(2k+2)\cdot$$

$$\cdot(-1)^k\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}Y_{2k+1}(q) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k+2)!!}{|2k-1|!!}Y_{2k+1}(q).$$

Ввиду (9) формула (4) доказана, вместе с этим доказано существование и единственность решения уравнения (2).

## 3. Редукция полусферического преобразования к уравнению Абеля

Пусть $(\gamma,\tau)$ и $(\theta,\varphi)$ — сферические координаты точек $n$ и $p$ соответственно относительно полюса $q$, тогда точки $n$ и $p$ имеют следующие прямоугольные координаты:

$$n = n(\gamma,\tau) = (\sin\gamma\cos\tau, \sin\gamma\sin\tau, \cos\gamma),\ 0\le\gamma\le\pi,\ -\pi\le\tau\le\pi;$$

$$p = p(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),\ 0\le\theta\le\pi,\ -\pi\le\varphi\le\pi.$$

Уравнение окружности $\Gamma(n)$ в сферических координатах запишется в виде:

$$\sin\gamma\sin\theta\cos(\varphi-\tau)+\cos\theta\cos\gamma=0. \tag{10}$$

Найдём пределы изменения координаты $\varphi$ переменной точки $p(\theta,\varphi)$ окружности $\Gamma(n)$. Из уравнения (10) получаем:

$$\varphi=\tau\pm\pi\mp\arccos(\cot\theta\cot\gamma),$$

то есть координата $\varphi$ меняется в пределах от $\tau-\pi+s$ до $\tau+\pi-s$, где через $s(\theta,\gamma)$ обозначен $\arccos(\cot\theta\,\cot\varphi)$. Тогда уравнение (2) в сферических координатах принимает вид:

$$f(\gamma,\tau)=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\gamma}\sin\theta\int_{-\pi}^{\pi}u(\theta,\varphi)d\varphi\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\gamma}\sin\theta\int_{\tau-\pi+s}^{\tau+\pi-s}u(\theta,\varphi)d\varphi\,d\theta,\\ \text{если }\ 0\le\gamma\le\frac{\pi}{2},\\ \\ \int_{\frac{3\pi}{2}-\gamma}^{\pi}\sin\theta\int_{-\pi}^{\pi}u(\theta,\varphi)d\varphi\,d\theta+\int_{\gamma-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\gamma}\sin\theta\int_{\tau-\pi+s}^{\tau+\pi-s}u(\theta,\varphi)d\varphi\,d\theta,\\ \text{если }\ \frac{\pi}{2}\le\gamma\le\pi.\end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим функцию

$$h(\gamma,\tau)=\int_{\alpha(\gamma)}^{\beta(\gamma)}\sin\theta\int_{\tau-\pi+s}^{\tau+\pi-s}z(\theta,\varphi)d\varphi\,d\theta,$$

где $\alpha(\gamma)$, $\beta(\gamma)$ и $s=s(\theta,\varphi)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Применяя к функции $h(\gamma,\tau)$ оператор усреднения по $\tau$, переходя во внутреннем интеграле к новой переменной $\eta=\frac{\varphi-\tau}{k}$, где $k=\frac{\pi-s}{\pi}$ и учитывая периодичность функции $z(\theta,\varphi)$ по переменной $\varphi$, последовательно получаем:

$$\begin{aligned}&\widetilde{h}(\gamma,q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{\alpha(\gamma)}^{\beta(\gamma)}\sin\theta d\theta\int_{\tau-\pi+s}^{\tau+\pi-s}z(\theta,\varphi)d\varphi\right)d\tau=\int_{\alpha(\gamma)}^{\beta(\gamma)}\sin\theta d\theta\,\frac{1}{2\pi}\cdot\\ &\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}d\tau\int_{\tau-\pi+s}^{\tau+\pi-s}z(\theta,\varphi)d\varphi\right)=\int_{\alpha(\gamma)}^{\beta(\gamma)}\sin\theta d\theta\left(\frac{k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\tau\int_{-\pi}^{\pi}z(\theta,k\eta+\tau)d\eta\right)=\\ &=\int_{\alpha(\gamma)}^{\beta(\gamma)}\sin\theta d\theta\left(\frac{k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\eta\int_{-\pi}^{\pi}z(\theta,k\eta+\tau)d\tau\right)=\int_{\alpha(\gamma)}^{\beta(\gamma)}\sin\theta d\theta\frac{k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\eta\\ &\int_{-\pi+k\eta}^{\pi+k\eta}z(\theta,\lambda)d\lambda=\int_{\alpha(\gamma)}^{\beta(\gamma)}\sin\theta d\theta\left(k\int_{-\pi}^{\pi}d\eta\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}z(\theta,\lambda)d\lambda\right)\right)=\\ &=\int_{\alpha(\gamma)}^{\beta(\gamma)}k\sin\theta\,\widetilde{z}(\theta,q)\left(\int_{-\pi}^{\pi}d\eta\right)d\theta=2\int_{\alpha(\gamma)}^{\beta(\gamma)}(\pi-s(\theta,\gamma))\widetilde{z}(\theta,q)\sin\theta d\theta.\end{aligned} \tag{12}$$

Полученную формулу (12) используем для усреднения уравнения (11). Имеем:

$$\widetilde{f}(\gamma,q)=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}+\gamma}\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta d\theta+2\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\gamma}(\pi-s(\theta,\gamma))\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta d\theta,\\ \text{если}\quad 0\le\gamma\le\frac{\pi}{2};\\ 2\pi\int_{\frac{3\pi}{2}-\gamma}^{\pi}\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta d\theta+2\int_{\gamma-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\gamma}(\pi-s(\theta,\gamma))\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta d\theta,\\ \text{если}\quad \frac{\pi}{2}\le\gamma\le\pi\end{cases}$$

или

$$\widetilde{f}(\gamma,q)=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}+\gamma}\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta d\theta-2\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\gamma}s(\theta,\gamma)\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta d\theta,\\ \text{если}\quad 0\le\gamma\le\frac{\pi}{2};\\ 2\pi\int_{\gamma-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta d\theta-2\int_{\gamma-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\gamma}s(\theta,\gamma)\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta d\theta,\\ \text{если}\quad \frac{\pi}{2}\le\gamma\le\pi,\end{cases}\tag{13}$$

где $s=\arccos(\cot\theta\cot\gamma)$.

Продифференцируем уравнение (13). Применяя известную формулу дифференцирования интеграла по параметру и равенство

$$\frac{\partial s}{\partial\gamma}=\frac{\cos\theta}{\sin\gamma\sqrt{\sin^2\gamma-\cos^2\theta}},$$

получаем

$$\widetilde{f}(\gamma,q)=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}-2\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}+\gamma}\widetilde{u}(\theta,q)\frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sin\gamma\sqrt{\sin^2\gamma-\cos^2\theta}},\ 0\le\gamma\le\frac{\pi}{2};\\ -2\int_{\gamma-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\gamma}\widetilde{u}(\theta,q)\frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sin\gamma\sqrt{\sin^2\gamma-\cos^2\theta}},\ \frac{\pi}{2}\le\gamma\le\pi.\end{cases}\tag{14}$$

Уравнение (14) может быть сведено к уравнению Абеля. С этой целью, записывая его в виде

$$\widetilde{f}(\gamma,q)=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}-2\int_{\frac{\pi}{2}-\gamma}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta\cos\,\theta d\theta}{\sin\gamma\sqrt{\sin^2\gamma-\cos^2\theta}}-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\gamma}\frac{\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sin\gamma\sqrt{\sin^2\gamma-\cos^2\theta}},\ 0\le\gamma\le\frac{\pi}{2};\\ \\ -2\int_{\gamma-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sin\gamma\sqrt{\sin^2\gamma-\cos^2\theta}}-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}-\gamma}\frac{\widetilde{u}(\theta,q)\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sin\gamma\sqrt{\sin^2\gamma-\cos^2\theta}},\ \frac{\pi}{2}\le\gamma\le\pi\end{cases}$$

и переходя к новым переменным $t=\sin^2\gamma$, $0\le\gamma\le\pi$, $y=\cos^2\theta$, $0\le\theta\le\pi$, получим уравнение Абеля:

$$F(t=\int_0^t\frac{v(y)dy}{\sqrt{t-y}},\tag{15}$$

где $F(t)=-2\pi\sqrt{t}\widetilde{f}'(\arcsin\sqrt{t}), 0\le t\le 1$; $v(y)=\widetilde{u}(\arccos\sqrt{y})$-$\widetilde{u}(\arccos-\sqrt{y}), 0\le y\le 1$. Для непрерывно дифференцируемой функции $F(t)$ уравнение Абеля (15) имеет единственное непрерывное решение, которое даётся формулой [11]

$$v(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^y\frac{F'(t)dt}{\sqrt{y-t}},\tag{16}$$

где

$$F'(t) = -2\pi \frac{d}{dt}\left[\sqrt{t}\frac{d\widetilde{f}(\gamma)}{d\gamma}\mid_{\gamma=\arcsin\sqrt{t}}\right] = -\frac{\pi}{\sqrt{t}}\widetilde{f}'(\arcsin\sqrt{t}) - \frac{\pi}{\sqrt{1-t}}\widetilde{f}''(\arcsin\sqrt{t}).$$

Возвращаясь к переменным $\gamma, \theta$ и к функции $\widetilde{u}(\theta, q)$, получим следующее представление для решения уравнения (14):

$$\widetilde{u}((\arccos|\cos\theta|), q) - \widetilde{u}(\arccos(-|\cos\theta|), q) = -2\int_0^{\left|\frac{\pi}{2}-\gamma\right|} \frac{(\sin\gamma \widetilde{f}'(\gamma, q))' d\gamma}{\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\gamma}}. \quad (17)$$

При $\theta = 0$ значения $\widetilde{u}((\arccos|\cos\theta|), q)$ и $\widetilde{u}(\arccos(-|\cos\theta|)$ равны значениям $u$ в полюсах $q$ и $-q$ соответственно. Следовательно, из (17) получаем:

$$\frac{u(q) - u(-q)}{2} = u(q) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\gamma \widetilde{f}'(\gamma, q))' d\gamma}{\cos\theta}. \quad (18)$$

Таким образом, нечётная на $S^2$ функция $u(q)$ определяется однозначно из уравнения (2). Формула обращения (6) получена.

## 4. Применение формулы А.В. Погорелова

В работах [4, 10, 15] получена формула обращения для уравнения

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma(x)} z(p) ds_p, \quad (19)$$

где $z(p)$ — чётная функция на $S^2$, $\Gamma(x)$ – окружность большого круга сферы, ортогонального вектору $x \in R^3$. Формула обращения уравнения (19) из [10] имеет вид:

$$z(p) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{(n,p)^2>t} \frac{F(x)|_{x=q}|(p,q)| d\sigma_q}{\sqrt{(n,p)^2 - t}}\Bigg|_{t=0}. \quad (20)$$

Редуцируем уравнение (2)

$$f(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2(n)} u(p) d\sigma_p$$

к уравнению (19).

Продолжим функцию $f(n)$ на все значения $x \in R^3$, $x \neq 0$, полагая $f(x) = f(\frac{x}{|x|})$, то есть

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{(x,p)>0} u(p) d\sigma_p.$$

Так как
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi|x|}\int_{\Gamma(x)} p_i\, u(p)ds_p,$$
то, воспользовавшись формулой обращения (20), получим равенства
$$q_i u(q) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(p,q)^2>t} \left.\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}|_{x=p}|(p,q)|d\sigma_p}{\sqrt{(n,p)^2-t}}\right|_{t=0},\ i=1,2,3.$$
Умножая эти равенства на $q_i$, а затем суммируя их, получим:
$$u(q) = -\frac{1}{2\pi}\int_{(p,q)^2>t} \left.\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial q}|_{x=p}|(p,q)|d\sigma_p}{\sqrt{(n,p)^2-t}}\right|_{t=0}. \tag{21}$$

Здесь $\frac{\partial f(x)}{\partial q}|_{x=p} = (grad\, f(x), q)|_{x=p}$ производная по направлению $q, |q| = 1$, вычисленная в точке $p$.

Найдём выражение для производной по направлению в сферических координатах $(r, \theta, \varphi)$. Градиент функции в сферических координатах имеет вид [8]:
$$grad\, f(x) = \frac{\partial f}{\partial r}\bar{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\bar{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\bar{i}_\varphi,$$
где $\bar{i}_r$, $\bar{i}_\theta$, $\bar{i}_\varphi$ — локальный ортонормированный базис сферической системы координат. Воспользуемся формулами перехода от локального базиса $\bar{i}_r, \bar{i}_\theta, \bar{i}_\varphi$ к базису прямоугольной декартовой системы координат $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ [8].

Если $p = p_1\bar{i} + p_2\bar{j} + p_3\bar{k} = \widehat{p}_1\bar{i}_r + \widehat{p}_2\bar{i}_\theta + \widehat{p}_3\bar{i}_\varphi$ — разложения вектора $p$ по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и $\bar{i}_r, \bar{i}_\theta, \bar{i}_\varphi$, то его координаты $p_1, p_2, p_3$ и $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3$ преобразуются по формулам [8]:
$$\begin{cases} \widehat{p}_1 = p_1\sin\theta\cos\varphi + p_2\sin\theta\sin\varphi + p_3\cos\theta, \\ \widehat{p}_2 = p_1\cos\theta\cos\varphi + p_2\sin\varphi\cos\theta - p_3\sin\vartheta, \\ \widehat{p}_3 = -p_1\sin\varphi + p_2\cos\varphi. \end{cases}$$
Используя эти формулы и учитывая, что $r = 1$ на сфере $S^2$, $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$ (так как $f(x)$ — однородная функция степени ноль), получим следующее выражение для производной по направлению в сферических координатах:
$$\frac{\partial f(p)}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial\theta}(q_1\cos\theta\cos\varphi + q_2\sin\varphi\cos\theta - q_3\sin\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}(-q_1\sin\varphi\sin\theta +$$
$$+ q_2\sin\theta\cos\varphi) = \frac{\partial f(p)}{\partial\theta}(q, p'_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial f(p)}{\partial\varphi}(q, p'_\varphi) = \Delta_1(f, (p,q)),$$
где $\Delta_1$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами [5]. Если точка $q$ — полюс сферической системы координат, то производная по направлению запишется в виде:
$$\frac{\partial f}{\partial q} = \Delta_1(f, \cos\theta) = -\sin\theta\frac{\partial f(\theta,\varphi)}{\partial\theta}.$$

Принимая точку q за полюс сферической системы координат, преобразуем формулу обращения (21).

$$u(q) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{(n,p)^2>t} \frac{\frac{\partial f(p)}{\partial q}|(n,p)|d\sigma_p}{\sqrt{(n,p)^2-t}}\Bigg|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\arccos\sqrt{t}} \frac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta - t}}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\frac{\partial f(\theta,\varphi)}{\partial\theta}d\varphi d\theta\Bigg|_{t=0} = 2\frac{d}{dt}\int_0^{\arccos\sqrt{t}} \frac{\cos\theta\sin^2\theta\widetilde{f}'(\theta,q)}{\sqrt{\cos^2\theta-t}}d\theta\Bigg|_{t=0} =$$

$$= 2\frac{d}{dt}\int_0^{\arccos\sqrt{t}} \frac{[\sin\theta\widetilde{f}'(\theta,q)]\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta-t}}d\theta\Bigg|_{t=0} = -2\frac{d}{dt}\Bigg[\sin\theta\widetilde{f}'(\theta,q)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\cos^2\theta-t}\Big|_0^{\arccos\sqrt{t}} - \int_0^{\arccos\sqrt{t}}(\sin\theta\widetilde{f}'(\theta,q))'\sqrt{\cos^2\theta-t}d\theta\Bigg]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= 2\frac{d}{dt}\int_0^{\arccos\sqrt{t}}(\sin\theta\widetilde{f}'(\theta,q))'\sqrt{\cos^2\theta-t}d\theta\Bigg|_{t=0} = -\int_0^{\arccos\sqrt{t}}\frac{(\sin\theta\widetilde{f}'(\theta,q))'}{\sqrt{\cos^2\theta-t}}d\theta\Bigg|_{t=0} =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin\theta\widetilde{f}'(\theta,q))'}{\cos\theta}d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\widetilde{f}'(\theta,q)+\sin\theta\widetilde{f}''(\theta,q)}{\cos\theta}d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\widetilde{f}'(\theta,q)d\theta -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\theta\widetilde{f}''(\theta,q)d\theta = \widetilde{f}(0,q) - \widetilde{f}(\frac{\pi}{2},q) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\theta\widetilde{f}''(\theta,q)d\theta =$$

$$= f(q) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\theta\widetilde{f}''(\theta,q)d\theta.$$

Таким образом, формулы обращения (4), (5), (6), (7) уравнения (2) получены.

## Литература


1. Аниконов Ю.Е. Замечания о выпуклых поверхностях // Сиб. мат. ж. 1968. Т. 9, № 6. С. 1413–1415.
2. Аниконов Ю.Е., Степанов В.Н. Формула обращения в одной задаче интегральной геометрии // Доклады АН СССР. 1991. Т. 318, № 2. С. 265–266.
3. Аниконов Ю.Е., Степанов В.Н. Геометрия выпуклых поверхностей и обратные задачи теории рассеяния // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 5. С. 955–973.
4. Бляшке В. Круг и шар. М.: Наука, 1967. 232 с.
5. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. М.: ОНТИ, 1935. 302 с.
6. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Сер.: Обобщённые функции. М.: Физматгиз, 1961. Вып. 5. 472. с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных и инженерных работников. М.: Наука, 1974. 832 с.

9. Небабин В.Г., Сергеев В.В. Методы и техника радиолокационного распознавания. М.: Радио и связь, 1984. 152 с.
10. Погорелов А.В. Четвёртая проблема Гильберта. М.: Наука, 1974. 78 с.
11. Преображенский Н.Г., Пикалов В.В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск: Наука, 1982. 242 с.
12. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
13. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонин А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. 160 с.
14. Minkowski H. Volume und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd. 57. P. 447–495.
15. Funk P. Über Flächeh mit lauter geschlossenen Linien // Math. Ann. 1913. Bd. 74. P. 283–288.
16. Falconer K.I. Applications of a result on spherical integration to the theory of convex sets // Amer. Math. Mon. 1983. V. 90, N. 10. P. 690–693.
17. Schneider R. Zonoids whose polars are zonoids // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 50, N 7. P. 365–368. Computers and Math. Appl. 1990. V. 20, N. 4. P. 127–138.

## THE INVERSION FORMULAS OF HEMISPHERIC TRANSFORM IN $R^3$

**V.N. Stepanov**
Ph.D.(Math.), docent, e-mail: stpnv@yandex.ru

Omsk State Technical University

**Abstract.** The following task of integral geometry is considered: one needs to restore a function defined on a sphere S2 knowing the function's integrals over the hemispheres. The inversion formulas for the required function are obtained by several ways: using a series expansion in spherical harmonics, by reducing the task to an Abel integral equation in the Funk "style", using the inversion formula of A.V. Pogorelov

**Keywords:** integral geometry, geometric tomography, hemispheric transform, inversion formula, spherical harmonics, Abel equation.