Математические структуры и моделирование
2014. №2(30). С. 32–48

УДК 372.851:514.112

СНОВА О ВЕКТОРАХ

Б.Б. Банчев
гл. асс., к. инф. н., e-mail: boykobb@gmail.com

Институт математики и информатики — БАН, София, Болгария

Аннотация. В школьном курсе геометрии векторы наделяются спорными определениями, а их присутствие не убеждает в своей полезности — будучи слабо связанным с остальным материалом, оно является в значительной мере самоцельным. В статье показывается, что векторы могут быть гораздо более содержательным и полезным инструментом геометрии, а точнее планиметрии, причём это касается не только изучаемого в школе. Для этого предлагается определение вектора, лучше соответствующее сущности этого понятия, а также применение более полной арифметики векторов. Последнее позволяет выразить весьма важные, но ошибочно пренебрегаемые школьной геометрией свойства и отношения, и этим делает возможными недоступные по-другому вычисления. Таким образом, традиционный для школы классический подход к геометрии гармонично дополняется аналитическим аппаратом. Применение векторов в доказательствах теорем и решениях задач показано на ряде примеров.

Ключевые слова: геометрия в школе, арифметика векторов, применение векторов.

Введение

Векторы присутствуют в школьной геометрии несколько десятков лет, и необходимость их изучения давно уже не подвергается сомнению. Казалось бы, смысл введения векторов и польза от их применения в доказательствах и решениях задач должна быть сразу видна по современным учебникам. Однако при внимательном рассмотрении это является весьма сомнительным. Почему?

Проблемы создаёт уже само введение понятия вектора. Сегодня наиболее распространено чреватое серьёзными недостатками определение вектора как направленного отрезка. Ошибочным на наш взгляд является и вводить понятие, исходя из направленности физических величин — как будто векторы и нужно изучать в основном по физическим, а не геометрическим побуждениям.

Наибольшее неудовлетворение вызывает применение векторов. Доказательств теорем аппаратом векторов почти нет (если не считать теорем о самих векторах), а большинство задач, якобы иллюстрирующих пользу от применения векторов, либо легко решается и без них, либо выглядит надуманно.

Вместе с тем, ряд геометрических свойств и отношений, где естественно ожидать применение векторов с пользой, выразить данным аппаратом оказывается трудно или невозможно. Среди этих свойств и отношений — ориентация на плоскости, по часовой стрелке или против неё, преобразования плоскости — такие как поворот и осевая симметрия, относительное расположение точек, а также ряд других. Например, школьники обычно узнают, что точку пересечения медиан $\triangle ABC$ можно найти как среднее арифметическое координат вершин A, B и C, т. е. среднее радиус-векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. А как выразить точки пересечения высот, биссектрис или серединных перпендикуляров, или же площадь $\triangle ABC$ через те же A, B и C? А как определить по расположению точек A, B и C ориентирован ли контур $\triangle ABC$ по часовой стрелке?

Задачи даже такого простого вида отсутствуют в школьных учебниках. Множество таких задач нелегко даже формулировать на обычном языке школьной геометрии. В действительности же они должны быть не только решаемы, а *решаемы систематическим способом*. В частности, разлагаемость любого вектора по двум неколлинеарным векторам должна непосредственно применяться для нахождения точек, отрезков и отношений в треугольниках, но изложение векторов как оно есть не позволяет этого.

В итоге, векторы в школьном курсе геометрии вводятся при помощи спорных определений, а само их присутствие слабо интегрировано с остальным материалом и в значительной мере самоцельно. Трудно согласиться, что в таком виде оно как-нибудь заметно способствует освоению тех знаний и умений, которые призвана дать обучающимся геометрия.

Цель настоящей статьи — показать каким образом в школьной (и не только) геометрии, а точнее планиметрии, векторы могут быть гораздо более содержательным и полезным инструментом, чем сейчас. Прежде всего выберем определение вектора, которое лучше соответствует природе этого понятия, чем используемые сегодня.

1. Определение вектора

Парадоксально, что наиболее распространённым определением вектора в школьных учебниках разных стран оказалось «вектор — направленный отрезок». Добросовестный читатель сразу заметит, что оно ошибочно. Согласно этому определению вектор является геометрической фигурой, и ему должны быть присущи свойства фигуры. Точнее, он должен состоять из точек, иметь общие точки с другими фигурами и в частности векторами, принадлежать некоторой прямой и сам содержать в себе другие векторы того же и противоположного направления.

Конечно, такое понимание вектора бессмысленно и его следует не допускать. Для этого нужно как минимум оговорить, что направленный отрезок, являясь новым понятием, уже не есть отрезок и вообще фигура. Или что он все-таки фигура, но мы должны не обращать внимания на факт принадлежности точек отрезку и т. п. В действительности ничего даже и не оговаривают, а ошибочное определение так и перекочёвывает из учебника в учебник.

Недостатком определения является и то, что им обособляются у вектора начальная и конечная точки: вектор есть направленный отрезок, а это — отрезок, для которого указано, заметим, не просто направление (одно из двух), а какая из его граничных точек считается началом и какая — концом. Но если вектор — это величина с длиной и направлением, то при чем здесь начало и конец?

Типичная ситуация в учебнике: для введения понятия вектора объясняют, что это — величина с длиной и направлением, приводятся примеры из физики (сила, скорость) и вдруг начинают говорить об отрезках с началом и концом. Резонно спросить, а что у скорости является началом и концом?

Определение вектора было бы чуть менее неправильным, если бы вместо направленных отрезков рассматривали упорядоченные пары точек: тогда вектор не был бы отрезком и фигурой. Но и в этом случае налицо лишнее и запутывающее привязывание понятия к начальной и конечной точкам.

Усложнения возникают и дальше. Определяя вектор как направленный отрезок, приходится уточнять, какие векторы являются равными — это отрезки с одинаковыми длинами и направлениями, т. е. присутствие начальных и конечных точек нужно все-таки «сгладить». Но то же самое нужно делать и определяя координаты вектора через координаты его «начала» и «конца»: ведь надо обосновать, что именно у тех направленных отрезков, которые являются равными векторами, равны и координаты. И опять с тем же самым сталкиваемся, определяя сумму векторов и умножение вектора на число: нужно обосновать, что сумма и произведение получаются теми же, если подставить равные векторы вместо равных. Или же нужно как можно раньше ввести в рассмотрение координаты векторов и доказывать все свойства в терминах координат.

Имеются и другие способы определения понятия вектора: совокупность направленных отрезков одинаковой длины и направления, параллельный перенос, координатная пара чисел, радиус-вектор (точки относительно некоторой фиксированной точки), элемент абстрактного (определяемого лишь его свойствами) векторного пространства. У каждого из них свои преимущества и практически все они были испробованы в учебниках для школы.

Вместе с тем, все определения вызывают те или иные методологические неудобства или затруднения. С координатными парами или элементами абстрактного векторного пространства, например, свойства векторов доказываются проще, но само определение становится отвлечённым и в частности теряет прямую связь с геометрией. Также отвлечённо для школьников определять вектор и как совокупность чего бы то ни было. Предложенное же А. Н. Колмогоровым и другими авторами определение вектора как параллельный перенос мы считаем методологически ошибочным. Хотя данные два понятия близки, они не тождественны: векторы и действия с ними — это язык, на котором выражаются вычисления, и последние могут касаться самых разнообразных геометрических сущностей, а не только параллельных переносов.

Косвенным свидетельством того, насколько непросто решить, как определять понятие вектора, является то интересное обстоятельство, что в учебниках В. Г. Болтянского (с соавторами) с 1963 по 1998 год встречается четыре существенно разных определения.

На каком в конце концов определении вектора остановиться?

Появление векторов в XIX в. связано с попытками расширить понятие числа так, чтобы можно было при помощи новых чисел и подходящих действий с ними проводить геометрические вычисления — снабдить геометрию (и физику) алгебраическим аппаратом, который, в отличие от координатного метода, имел бы истинно геометрическое содержание. Вот почему векторы (и ряд других понятий) имеют корни и в геометрии, и в алгебре. В связи с этим, а также ввиду действительного использования векторов в геометрии, на наш взгляд лучше всего определить вектор как «**геометрическое число**».

Конечно, само это словосочетание не является определением, его нужно уточнять. Но оно сразу обращает внимание на главное: а) подобно обычным, хорошо знакомым числам, векторы — величины, над которыми проводятся вычисления; б) эти вычисления имеют геометрическую природу — и у данных, и у результатов имеется геометрический смысл.

Обобщения понятия числа, разумеется, не новость в математике. Так из натуральных чисел возникли числа целые, среди которых есть и отрицательные. Путём обобщения возникли и дробные, и вещественные, и комплексные числа.

Те же самые обобщения хорошо знакомы и школьной математике, и вводятся они в ней также постепенно, по мере осознания вычислительной необходимости. Ввиду этого появление векторов, которым придаётся смысл чисел, не должно вызывать когнитивных трудностей.

Особенность векторов как чисел состоит в том, что *им свойственны размер и направление*. Размер — это неотрицательное действительное число, а значит, вектор — такое же, но направленное число. Действительное число со знаком также отличается размером и направлено в соответствии с этим знаком, но знак задаёт одно из всего двух возможных направлений. Поэтому действительное число со знаком — все равно что вектор на прямой. У векторов же на плоскости направление и берётся на плоскости, а там возможностей сделать это имеется бесконечно много. Именно таким образом вектор является обобщением действительного числа.

Итак, вектор для нас — не направленный отрезок, и не что-либо другое, а число несколько особого рода. Геометрический смысл векторов раскрывается введением нужных нам действий с ними. В частности, так как желательно, чтобы сложение векторов могло быть использовано для нахождения результата от последовательно прилагаемых параллельных переносов, определяем его так, чтобы оно удовлетворяло правилу треугольника.

Здесь и появляются направленные отрезки и откладывание, но лишь как средство наглядного представления векторов. Направленным отрезком мы можем записать, представить вектор, но сам отрезок вектором не является. Точно так же и пара координат используется как форма представления вектора в некоторой системе координат, но сама пара — не вектор (так же, как и не точка). Наконец, любую точку тоже можно использовать для представления вектора — так называемого радиус-вектора, связываемого с данной точкой.

Стоит обратить внимание и на то, что комплексное число тоже является обобщением действительного числа, при этом схожим с вектором. У него тоже есть геометрическое истолкование.[1] У векторов и комплексных чисел разные наборы операций и свойства этих операций. Но и сходство между вектором и комплексным числом, и то, что различие между ними алгебраическое, подтверждают естественность понимания вектора как числа.

Одно из преимуществ нашей трактовки векторов состоит в том, что можно и не давать особого определения равенства векторов, его можно подразумевать: так же как и для вещественных чисел, вектор с данными размером и направленностью единственен. Разумеется, теперь нужно определить соответствие между векторами и представляющими их направленными отрезками (ненулевому вектору соответствует множество отрезков), но это намного естественнее, чем постулировать разные объекты равными, как это имеет место в определении вектора как направленного отрезка.

2. Действия с векторами. Ориентация на плоскости

Умножение вектора на число, сложение и вычитание векторов имеют непосредственно геометрический смысл, который, как было упомянуто, принято связывать с параллельным переносом. Однако одними этими действиями можно выражать лишь очень немного из свойств геометрических объектов и отношений между ними. Единственное оставшееся изучаемое в школе действие — скалярное умножение, тоже не очень расширяет применимость векторов. Оно и включено в базовое обучение математике не во всех странах, а уже само его введение связано с трудностями.

Одна такая трудность состоит в том, что, если определять скалярное произведение через функцию косинуса, как обычно и делают, то приходится до того знакомить с тригонометрическими функциями. Дальше мы увидим, что в рамках нашего подхода можно обойтись без тригонометрии.

Вторая трудность касается геометрического смысла скалярного произведения. Как правило, оно вводится само по себе, без всякой мотивировки, а уж потом «оказывается», что с помощью его знака можно определить вид угла как острый, тупой или прямой. Абсолютное же значение скалярного произведения так и остаётся без какого-либо общего истолкования.

В рамках нашего подхода к изложению векторов скалярное произведение вводится после и на основе двух других действий, имеющих более непосредственный геометрический смысл. Определение этих двух действий имеет отношение к понятию ориентации на плоскости.

Ориентация является существенной частью пространственного мышления. Когда речь идёт о плоскости, это понятие относится к одному из двух направлений поворота — направо или налево, или, что то же самое — к направлению вращения по часовой стрелке или против неё. Ориентация на плоскости проявляется также и как направление угла или отношение предшествования лучей относительно некоторого направления поворота, как ориентированность замкнутых линий и в частности — контуров фигур, как положение точки от-

[1] Геометрические применения комплексных чисел подробно рассмотрены например в [3].

носительно направленной прямой. Ориентация на плоскости тесно связана и с различением между отношениями «внутри» и «вне» относительно контура (т. е. с принадлежностью или непринадлежностью точки фигуре), а также с различением выпуклости и вогнутости вершин многоугольника и точек контура фигуры. Все эти аспекты и проявления ориентации сводятся к одному-единственному, при этом алгебраически очень просто выражаемому, отношению.

Является большущей аномалией то, что, несмотря на очевидную и разностороннюю важность понятия ориентации для геометрии, в школе оно полностью пренебрегается. Рассмотрение отражающих ориентацию действий над векторами — отличная возможность исправить это.

Операцией «перп» мы называем поворот вектора на прямой угол в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки. Операцию отмечаем знаком $^\perp$; выражение вида $\mathbf{u}^\perp$ можно читать как «$\mathbf{u}$-*перп*».

Перп ценен двояко. Для любого $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ через него находится вектор длины как у $\mathbf{u}$ и перпендикулярный $\mathbf{u}$, например, по одной диагонали квадрата находим другую. Кроме этого, пара $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^\perp)$ является положительно ориентированной прямоугольной системой координат: любой вектор можно представить разложением по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^\perp$, и в ряде задач бывает удобно делать именно так.

Косым произведением $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ назовём ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на пару векторов $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

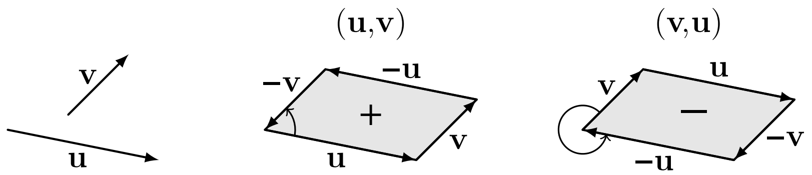

Рис. 1. Ориентированные параллелограммы $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ и $(\mathbf{v},\mathbf{u})$

Параллелограмм, натянутый на $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, образован векторами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $-\mathbf{u}$ и $-\mathbf{v}$, взятых в этой последовательности (рис. 1). Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ коллинеарные, включая любой из них или оба равны $\mathbf{0}$, параллелограмм вырождается в отрезок или точку и его площадь равна нулю. При неколлинеарных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ ориентированная площадь параллелограмма есть число со знаком: положительный, если $\mathbf{u}$ предшествует $\mathbf{v}$, и отрицательный, если наоборот. Считаем, что $\mathbf{u}$ предшествует $\mathbf{v}$ $(\mathbf{u} \prec \mathbf{v})$, когда содержащий $\mathbf{u}$ луч можно повернуть на угол меньше развёрнутого в положительном направлении до наложения с направлением $\mathbf{v}$.

Параллелограмм, образованный парой $(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, отличается от порождённого $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ориентацией контура и знаком площади, как на рис. 1, где $\mathbf{u} \prec \mathbf{v}$. Дуговые стрелки обозначают угол поворота от первого ко второму вектору.

Косое произведение естественным образом обобщает простейшую формулу нахождения площади: прямоугольника по его сторонам. Беря вместо прямоугольника любой параллелограмм, произведение от числового становится косым, и множители уже не сами стороны, а получаемые из них векторы.

На пару $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ натянуты также треугольники $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, -(\mathbf{u}+\mathbf{v}))$ и $(\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u}, -\mathbf{v})$, у которых та же ориентация, что у параллелограмма по $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, а площадь наполовину (на рис. 2 показаны эти два треугольника для тех же $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, что на рис. 1). Поэтому ориентированная площадь обоих треугольников равна $\frac{1}{2}\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Итак, абсолютное значение $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ вычисляет площадь треугольника и параллелограмма, а его знак указывает на коллинеарность векторов ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}=0$) или предшествование $\mathbf{u}\prec\mathbf{v}$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}>0$) или $\mathbf{v}\prec\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v}<0$).

Рис. 2. Ориентированные треугольники для $(\mathbf{u},\mathbf{v})$

Следующие свойства выполнены для любых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ и чисел k, k':

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\times\mathbf{u} &= 0\\
\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})\\
|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| &\le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\\
(\mathbf{u}^{\perp})^{\perp} &= -\mathbf{u}\\
\mathbf{u}^{\perp}\times\mathbf{v}^{\perp} &= \mathbf{u}\times\mathbf{v}\\
(k\,\mathbf{u}+k'\,\mathbf{v})^{\perp} &= k\,\mathbf{u}^{\perp}+k'\,\mathbf{v}^{\perp}\\
(k\,\mathbf{u}+k'\,\mathbf{v})\times\mathbf{w} &= k\,(\mathbf{u}\times\mathbf{w})+k'(\mathbf{v}\times\mathbf{w})
\end{aligned}
$$

Кроме того, если $\mathbf{u}(x_1;y_1)$ и $\mathbf{v}(x_2;y_2)$, то в положительно ориентированной системе координат имеет место $\mathbf{u}^{\perp}(-y_1;x_1)$ и $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=x_1\,y_2-x_2\,y_1$.

Наконец, *скалярное произведение* любых двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ можно определить, наряду с другими возможностями, как $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\times\mathbf{u}^{\perp}$. Этим обеспечиваем произведение, взаимно дополняющееся по смыслу с косым: его значение — 0 для перпендикулярных векторов (как косое для коллинеарных), а знак различает острый угол между векторами ($\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}>0$) от тупого ($\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}<0$), так же как знак косого произведения указывает направление предшествования.

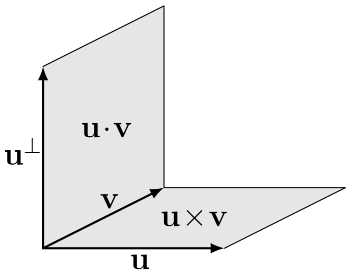

Рис. 3. Косое и скалярное произведения

На рис. 3 показаны две фигуры, чьи площади равны косому и скалярному произведениям векторов — это параллелограммы, натянутые соответственно на $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ и $(\mathbf{v},\mathbf{u}^{\perp})$. Когда угол от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{v}$ изменяется от нулевого до прямого, высота, а вместе с ней и площадь первого параллелограмма — косое произведение — растёт от 0 до своего максимально возможного значения. Площадь второго параллелограмма — скалярное произведение — наоборот, уменьшается от максимального значения до нуля.

Алгебраические свойства скалярного произведения, его представление в координатах, а также то, что его абсолютное значение равняется произведению длины одного вектора на величину проекции на его направление другого вектора, выводятся из свойств $^{\perp}$ и $\times$.

3. Прямые следствия

Знак косого произведения векторов позволяет вычислять всевозможные связанные с ориентацией отношения. Наиболее непосредственно это применимо к соответствию между парами векторов и тройками точек на плоскости.

■ Любые три точки A, B и C на плоскости либо коллинеарны, либо образуют тройку, равно как и треугольник, ориентированные, при фиксированном порядке перечисления точек, либо отрицательно, либо положительно. Ориентацию можно определить по предшествованию заданных точками векторов, т. е. по знаку их косого произведения. Например, $\triangle ABC$ (а также $\triangle BCA$ и $\triangle CAB$) ориентированы положительно, если для «соначальных» векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ выполнено $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} > 0$ или для «последовательных» векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ выполнено $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} > 0$. Точки A, B и C коллинеарны, если произведение любых двух получаемых от них векторов равно 0.

В зависимости от задачи, можно именно так по заданным трём точкам, образуя векторы, найти ориентацию тройки, а можно и по заданным векторам и точке, откладывая векторы с общим началом или последовательно, узнать ориентацию тройки из данной точки и получающихся при откладывании концов направленных отрезков.

■ Определение того, находится ли точка слева или справа от направленной прямой, также сводится к вычислению косого произведения: точка P слева, если $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} > 0$, где A и B — точки на прямой и она направлена по $\overrightarrow{AB}$.

■ Критерии коллинеарности типа существования, например, «существует число, которое, умноженное на вектор $\mathbf{a}$, даёт вектор $\mathbf{b}$», обладают небольшой полезностью, так как не являются непосредственными. Чтобы доказать коллинеарность, нужно доказать существование данного числа или чисел, а для этого чаще всего требуется найти такие числа. Это само по себе может быть затруднительным, а и ведь по отношению к самому факту коллинеарности знание любых чисел является по существу лишней информацией.

Поэтому равенство нулю косого произведения как критерий коллинеарности очень важно с практической точки зрения. Одно из его применений — составление уравнения прямой. Если прямая задана точкой A на ней и вектором направления $\mathbf{u}$ (или же второй точкой B, так что $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$), то для любой точки P на прямой вектор $\overrightarrow{AP}$ коллинеарен $\mathbf{u}$ и уравнением прямой является

$$\overrightarrow{AP} \times \mathbf{u} = 0,$$

которое самым прямым способом выражает зависимость между неизвестным P и данными A и $\mathbf{u}$ и которое, к тому же, и в пространстве задаёт эту же прямую. Выгодно сравнить это уравнение с общим уравнением прямой $a\,x+b\,y+c=0$ в координатах. Последнее не является непосредственно отображающим: какой прямой оно соответствует, не сразу понятно, а когда его нужно составить, коэффициенты нужно найти по данным A и $\mathbf{u}$ (или B). В пространстве же уравнение в координатах задаёт уже не прямую, а плоскость.

■ Нетрудно показать, что вектор с координатами $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v};\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ имеет длину $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ и заключает ориентированный угол $\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$ с положительным лучом абсциссы. Поэтому построение вектора $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v};\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ есть способ построения ориентированного угла между векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Способ этот очень прост, не прибегая к тригонометрическим функциям, а лишь к сложению, вычитанию и умножению чисел-координат: если $\mathbf{u}(x_1;y_1)$ и $\mathbf{v}(x_2;y_2)$, то $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v};\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (x_1x_2+y_1y_2;\, x_1y_2-x_2\,y_1)$.

Для сравнения, нахождение угла только через скалярное произведение, как обычно делают в учебниках, требует деления и извлечения корня: $\frac{x_1x_2+y_1\,y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$, причём этой формулой находим косинус угла и через него — величина угла меньше развёрнутого, что не всегда соответствует действительному углу.

■ Площадь $\triangle ABC$ удобно найти как $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ — через $\overrightarrow{AB}$ и соначальный ему вектор, или как $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ — через $\overrightarrow{AB}$ и последовательный ему вектор. Но значение произведения сохраняется и если вместо $\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{BC}$ поставить любой вектор, заданный направленным отрезком с началом на прямой AB и концом на параллельной AB прямой через C — см. рис. 4 (вектор $\overrightarrow{PQ}$ такого вида равен $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ}$, а $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CQ} = 0$). Налицо существенное обобщение формулы $\frac{1}{2}a\,h$ нахождения площади по основанию и высоте.

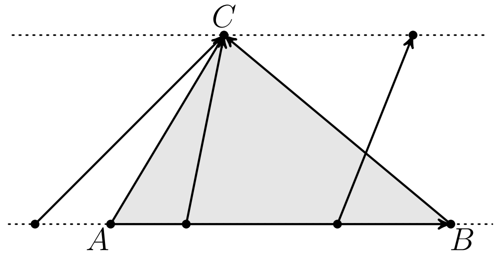

Рис. 4. Площадь треугольника

■ Косое произведение выгодно и в вычислительном смысле. Если известны координаты точек A, B и C, над ними требуется выполнить всего несколько арифметических операций — зачастую их даже можно проделать в уме. Например, для $A(1;0)$, $B(8;3)$ и $C(2;5)$: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{B}-\mathbf{A} = (7;3)$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{C}-\mathbf{A} = (1;5)$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(7\cdot 5 - 3\cdot 1) = 16$. Для сравнения, формулу $\frac{1}{2}a\,h$ применить непосредственно нельзя, а вычисления по формуле Герона настолько громоздки, что вряд ли стоит проводить их вручную: для тех же координат вершин, найдя сначала длины сторон $\triangle ABC$, получаем для площади $\frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{40}+\sqrt{26}+\sqrt{58})\cdot(-\sqrt{40}+\sqrt{26}+\sqrt{58})\cdot(\sqrt{40}-\sqrt{26}+\sqrt{58})\cdot(\sqrt{40}+\sqrt{26}-\sqrt{58})}$. Трудно даже предвидеть, что результат данного выражения — целое число.

■ В школьной геометрии доказывается утверждение о том, что любой вектор можно единственным образом разложить по двум неколлинеарным между собой векторам. Однако полезность данного факта невелика, так как коэффициенты разложения остаются неизвестными. Их легко найти с помощью косого произведения. Если $\mathbf{p}$ разлагается по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ ($\mathbf{u}\times\mathbf{v} \neq 0$), то должно быть выполнено $\mathbf{p} = s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}$, откуда s и t можно найти, умножая соответственно через $\times\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}\times$. Так что:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}((\mathbf{p}\times\mathbf{v})\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\times\mathbf{p})\,\mathbf{v}). \tag{1}$$

В частности, для $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\perp}$:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\mathbf{u}^2}((\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\times\mathbf{p})\,\mathbf{u}^{\perp}). \tag{2}$$

Кроме как для получения для данного $\mathbf{p}$ слагаемых, коллинеарных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, равенства (1) и (2) можно использовать и наоборот, для нахождения *неизвестного* $\mathbf{p}$. Для этого нужно найти значения произведений во внутренних скобках непрямым способом, что нередко оказывается возможным, исходя из их геометрического смысла. Примеры этому даны в следующем разделе.

■ Можно доказать множество связанных с векторами тождеств и других зависимостей. Приводим несколько тождеств, выводимых весьма непосредственно и пользуясь только векторной арифметикой (но не тригонометрией и не фигурной наглядностью).

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 + (\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2$$

(аналог тождества $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$)

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,\mathbf{w} + (\mathbf{v}\times\mathbf{w})\,\mathbf{u} + (\mathbf{w}\times\mathbf{u})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

(следствие из (1) для любых, включая коллинеарных, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$)

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) + (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{w})\,\mathbf{v}^2\,,$$
$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) - (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\,\mathbf{v}^2$$

(аналоги тригонометрических формул синуса и косинуса суммы углов)

Для любых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, таких, что $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{0}$, выполнено:

$$\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}^2 - \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{w}^2 - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{w}^2)\,,$$
$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}) + (\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = S^2\,,$$

где S — удвоенная площадь треугольника со сторонами-векторами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

4. Примеры применения векторов

В этом разделе приводим, сопровождая их короткими комментариями, некоторое количество теорем и задач, решаемых с помощью векторов. Везде, где требуется найти точку, условие или что-либо другое по данным точкам или векторам, предполагается предъявление зависящего от этих данных выражения. Таким образом, с одной стороны, находим решения в общем виде, а с другой — их конечно можно применять к точкам и векторам с конкретными координатами, получая такие же конкретные результаты.

Везде в примерах переменная S обозначает удвоенную площадь $\triangle ABC$.

■ *По заданным точкам A, B, C и D определить, является ли четырёхугольник $ABCD$ квадратом.* ┘ Хотя это можно сделать разными способами, скорее всего самый простой ответ даёт пара условий $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \mathbf{0}$ и $\overrightarrow{AC} \pm \overrightarrow{BD}^{\perp} = \mathbf{0}$: первое обеспечивает, что $ABCD$ — параллелограмм, второе — что диагонали равны и перпендикулярны одна другой. Отметим, что в координатах проверка условий состоит всего в нескольких сложениях и вычитаниях чисел; не требуется нахождения длин и т. п.

■ *Определить какой из трёх случаев имеет место для четырёхугольника $ABCD$, заданного своими вершинами: выпуклый, вогнутый или самопересекающийся.* ┘ Данные три случая имеют место, когда число внутренних диагоналей соответственно 2, 1 или 0. Диагональ внутренняя, когда оставшиеся две вершины находятся по разные стороны от содержащей диагональ прямой (по существу решается задача: пересекаются ли отрезок и прямая), что сводится к проверке знаков косых произведений. Так, AC внутренняя, если знаки у $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$ разные; аналогично для BD.

■ *Найти площадь (невырожденного) четырёхугольника $ABCD$ по заданным его вершинам.* ┘ Диагональю $ABCD$ разбивается на два треугольника. Складывая их площади при соблюдении ориентации, получаем $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}$. При этом значение положительно, когда A, B, C, D, в этом порядке, расположены против часовой стрелки, т. е. контур фигуры ориентирован положительно.

■ *Найти площадь прямоугольника, если точки A и B лежат на одной из его сторон, точки S_1 и S_2 — на прилежащих к ней сторонах, а точка T — на противолежащей стороне.* ┘ Используя свойства скалярного и косого произведений, находим длины сторон прямоугольника и перемножаем их, получая $\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{S_1S_2}|\,(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AT})}{AB^2}$. Площадь положительна, когда T лежит слева от оси AB.

■ *Найти расстояние от точки P до прямой, заданной точками A и B.* ┘ Искомое расстояние является проекцией на $\overrightarrow{AB}^{\perp}$ вектора $\overrightarrow{AP}$. Она находится непосредственно по разложению $\overrightarrow{AP}$ на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB}^{\perp}$ согласно (2) и равна $\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}}{AB}$. Расстояние положительно, когда P находится слева от оси $\overrightarrow{AB}$.

■ *Найти точку пересечения двух прямых, заданных точками P_1 и P_2 на них и параллельными им векторами, соответственно $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$.* ┘ Пусть X — искомая точка. Разложив $\mathbf{X}$ на $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ согласно (1), находим $\frac{(\mathbf{X}\times\mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_1+(\mathbf{u}_1\times\mathbf{X})\,\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2}$, а выражения во внутренних скобках заменяем согласно $\mathbf{u}_i\times\mathbf{X} = \mathbf{u}_i\times\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2$ (из уравнений прямых). Итак: $\mathbf{X} = ((\mathbf{P}_2 \times \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{P}_1)\,\mathbf{u}_2)/(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)$.

■ *Найти необходимое и достаточное условие, при котором три прямые, заданные точками P_1, P_2 и P_3 на них и параллельными им векторами, соответственно $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}_3$, имеют общую точку или параллельны одна другой.* ┘ Если $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \neq 0$, то у прямых 1 и 2 есть точка пересечения X, которая определяется как выше. Если X лежит и на прямой 3, то из уравнения этой прямой имеет место $\mathbf{u}_3 \times \mathbf{X} = \mathbf{u}_3 \times \mathbf{P}_3$. Заменяя левую сторону правой в равенстве, полученном умножением через $\mathbf{u}_3\times$ равенства для $\mathbf{X}$, находим

$$(\mathbf{P}_1 \times \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) + (\mathbf{P}_2 \times \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) + (\mathbf{P}_3 \times \mathbf{u}_3)(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) = 0,$$

что выполнено и для параллельных $(\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j = 0)$ прямых.

■ *Найти площадь треугольника, образованного точками пересечения трёх заданных как в предыдущей задаче прямых (предполагаем, что в каждой паре прямые не параллельны и не совпадают).* ┛ Находим точки пересечения прямых, а через них — и площадь треугольника:

$$\frac{1}{2}\,\frac{((\mathbf{P}_1 \times \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) + (\mathbf{P}_2 \times \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) + (\mathbf{P}_3 \times \mathbf{u}_3)(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2))^2}{(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)\,(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3)\,(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1)}\,.$$

Эту задачу можно считать обобщением предыдущей: выражение под квадратом в числителе совпадает с найденным выше и обращается в ноль, когда треугольник вырождается в точку. Можно также заметить, что знак площади определяется единственно порядком перечисления прямых, но не направлениями $\mathbf{u}_i$.

■ *Доказать, что если на каждой стороне четырёхугольника внешне построить квадрат, то отрезки, соединяющие центры квадратов, соответствующих противолежащих сторон, перпендикулярны и одинаковой длины. Это теорема Ван-Обеля о четырёхугольнике.* ┛ Обозначив вершины четырёхугольника через A, B, C и D, а его стороны через $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$ и $\mathbf{d} = \overrightarrow{DA}$, находим центры квадратов: $\mathbf{A} + 1/2\,(\mathbf{a} - \mathbf{a}^{\perp})$ и аналогично для $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$, а через них — и векторы, заданные направленными отрезками, накрест соединяющими эти центры. Утверждение сводится к тому, что один вектор является «перпом» другого; это проверяется непосредственно.

Из доказательства видно, что в действительности теорема верна для любых точек A, B, C и D: четырёхугольник может и пересекаться, а точки совпадать. Достаточно строить квадраты по одну и ту же сторону, слева или справа, от осей AB, BC, CD и DA.

■ *Найти точки касания прямых через точку P к окружности k с центром C и радиусом r.* ┛ Пусть $\mathbf{d} = \overrightarrow{CP}$. Если R и L — точки касания к k справа и слева, используя (2), выражаем $\overrightarrow{CR}$ через $\mathbf{d}$ и $\mathbf{d}^{\perp}$, учитывая при этом, что $\mathbf{d} \cdot \overrightarrow{CR} = r^2$ и $\mathbf{d} \times \overrightarrow{CR} = r\sqrt{\mathbf{d}^2 - r^2}$. Получаемое в результате выражение — $\mathbf{C} + \frac{r}{\mathbf{d}^2}\,(r\,\mathbf{d} + s\sqrt{\mathbf{d}^2 - r^2}\,\mathbf{d}^{\perp})$, которое при $s = 1$ даёт $\mathbf{R}$, а при $s = -1$ — $\mathbf{L}$.

Заметим, что в этой задаче об окружности может и не идти речь: фактически по заданной гипотенузе CP и длине катета $r = CL = CR$ находятся вершины L и R прямоугольных треугольников $\triangle CPL$ и $\triangle CPR$.

■ *Найти точки касания общих касательных к окружностям k_1 и k_2 с центрами C_1 и C_2 и радиусами r_1 и r_2.* ┛ За исключением того, что в общем случае имеется восемь точек касания четырёх касательных прямых, решение находится подобно предыдущей задаче. Положив $\mathbf{d} = \overrightarrow{C_1C_2}$, для точек находим общую формулу $\mathbf{T}_i = \mathbf{C}_i + (-1)^{[i+s_1=3]}\,\frac{r_i}{\mathbf{d}^2}\,(r\,\mathbf{d} + s_2\sqrt{\mathbf{d}^2 - r^2}\,\mathbf{d}^{\perp})$, где $i = 1, 2$ — для точек на k_i, $s_1 = \pm 1$ — для точек внутренних и внешних касательных, $s_2 = \pm 1$ — для точек касательных справа и слева к k_1, а $r = r_1 + s_1 r_2$. Выражение

$[i+s_1=3]$ считается равным 1 или 0 в зависимости от справедливости равенства в скобках.

■ *Найти результат* $\mathbf{u}'$ *поворота вектора* $\mathbf{u}$ *на угол* φ *в положительном направлении.* ⌟ Разложив $\mathbf{u}'$ по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^{\perp}$ согласно (2) и учитывая $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'=\mathbf{u}^2\cos\varphi$ и $\mathbf{u}\times\mathbf{u}'=\mathbf{u}^2\sin\varphi$,[2] находим $\mathbf{u}'=\cos\varphi\,\mathbf{u}+\sin\varphi\,\mathbf{u}^{\perp}$. Обратим внимание, что из всех примеров это единственный, где в явном виде ссылаемся на угол, точнее — на функции от угла, и в данном случае такая ссылка необходима по существу.

Для дальнейшего примем обозначения $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$, а также $\mathbf{a}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{CA}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$.

■ *Найти центр* O *описанной около* $\triangle ABC$ *окружности.* ⌟ O находится как точка пересечения серединных перпендикуляров сторон. Получаем:

$$\mathbf{O}=((\mathbf{B}^2-\mathbf{C}^2)\,\mathbf{A}+(\mathbf{C}^2-\mathbf{A}^2)\,\mathbf{B}+(\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2)\,\mathbf{C})/S=(\mathbf{A}^2\,\mathbf{a}+\mathbf{B}^2\,\mathbf{b}+\mathbf{C}^2\,\mathbf{c})/S\cdot$$

■ *Найти центр* I *вписанной в* $\triangle ABC$ *окружности.* ⌟ Используя (1), можно выразить $\overrightarrow{AI}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а потом заменить $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AI}\times\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ выражениями для удвоенных площадей $\triangle ABI$, $\triangle AIC$ и $\triangle ABC$. В итоге находим $\mathbf{I}=\mathbf{A}+\frac{1}{2p}(b\,\mathbf{c}-c\,\mathbf{b})=\frac{1}{2p}(a\mathbf{A}+b\mathbf{B}+c\mathbf{C})$, где p — полупериметр $\triangle ABC$.

■ *Найти ортоцентр* H $\triangle ABC$. ⌟ H есть точка пересечения любых двух высот, а прямая-высота задаётся вершиной, например A, и вектором — в данном случае $\mathbf{a}^{\perp}$. Применение найденной формулы для точки пересечения даёт:

$$\mathbf{H}=((\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{c}^{\perp}-(\mathbf{C}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}^{\perp})/S=-(((\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{A}+(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{B}+(\mathbf{C}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{C})^{\perp})/S.$$

■ *Доказать, что для любых трёх точек* A, B *и* C *и точек* $A_1\in BC$, $B_1\in CA$ *и* $C_1\in AB$ *отношение между ориентированными площадями* $\triangle A_1B_1C_1$ *и* $\triangle ABC$ *равно* $\lambda\,\mu\,\nu+(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)$, *где* $\lambda=\overrightarrow{BA_1}:\overrightarrow{BC}$, $\mu=\overrightarrow{CB_1}:\overrightarrow{CA}$ *и* $\nu=\overrightarrow{AC_1}:\overrightarrow{AB}$. *Это теорема Раута о вписанном треугольнике.* ⌟ Ввиду $\mathbf{A}_1=\mathbf{B}+\lambda\,\mathbf{a}$, $\mathbf{B}_1=\mathbf{C}+\mu\,\mathbf{b}$ и $\mathbf{C}_1=\mathbf{A}+\nu\,\mathbf{c}$ площадь $\triangle A_1B_1C_1$ выражается через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и отсюда — через площадь $\triangle ABC$.

■ *Доказать, что при условиях предыдущей теоремы точки* A_1, B_1 *и* C_1 *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\lambda\,\mu\,\nu+(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)=0$. *Это прямая и обратная теоремы Менелая.* ⌟ Утверждение является прямым следствием предыдущей теоремы.

■ *Доказать, что для любых трёх точек* A, B *и* C *и точек* $A_1\in BC$, $B_1\in CA$ *и* $C_1\in AB$ *отношение между ориентированными площадями образованного прямыми* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *треугольника и* $\triangle ABC$ *равно*

$$\frac{(\lambda\,\mu\,\nu-(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu))^2}{(1-\lambda+\nu\,\lambda)\,(1-\mu+\lambda\,\mu)\,(1-\nu+\mu\,\nu)},$$

где $\lambda=\overrightarrow{BA_1}:\overrightarrow{BC}$, $\mu=\overrightarrow{CB_1}:\overrightarrow{CA}$ *и* $\nu=\overrightarrow{AC_1}:\overrightarrow{AB}$. *Это теорема Раута о внутреннем треугольнике.* ⌟ Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 можно считать определёнными точками A, B и C и векторами $\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}+\lambda\,\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BB_1}=\mathbf{a}+\mu\,\mathbf{b}$ и

[2] Одним из способов определить функции sin и cos в школьном курсе геометрии является как раз задание их равными $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ имеют единичный размер.

$\overrightarrow{CC_1} = \mathbf{b} + \nu\,\mathbf{c}$ и применить найденную формулу для площади заданного тремя прямыми треугольника.

■ *Доказать, что при условиях предыдущей теоремы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в общей точке тогда и только тогда, когда $\lambda\,\mu\,\nu - (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = 0$. Это прямая и обратная теоремы Чевы для непараллельных прямых.* ┛ Утверждение является прямым следствием предыдущей теоремы.

Все вышеприведённые задачи можно рассматривать в той или иной степени как теоремы: результат в них находится в общем виде и его можно применять для решения других задач. Это сделано намеренно, чтобы показать силу векторного аппарата как раз для выражения разнообразных общих зависимостей, а не просто как средства производить вычисления над конкретными координатами. Подчеркнём, что решения именно аппаратом векторов приведённых задач довольно прямо вытекают из условий и почти все являются короткими.

Список таких результатов можно значительно удлинить, например теоремами: относящимися к метрическим соотношениям, порождаемым чевианами в треугольнике — теоремы Ван-Обеля о треугольнике, Жергонна, Стюарта и пр.; о трансформациях на плоскости; о построениях; о вычислении площадей.

5. Достоинства применения аппарата векторов

Изложенное выше и, в более широком плане, опыт автора, обусловливают приведённые здесь наблюдения и выводы.

Алгебраический подход в геометрии на основе векторного исчисления чрезвычайно эффективен. Он дополняет традиционное содержание геометрии, не вытесняя его. С его помощью развивается более полное представление о геометрических зависимостях, включая в рассмотрение таких, которые сегодняшняя школьная математика почему-то избегает. Многие задачи, такие как нахождение точек, ориентации, расстояний, уравнений, которые школьная геометрия плохо или никак не решает или даже не в состоянии формулировать, являют собой примеры простых применений векторов.

Если задача не вполне определена, построение вычислением может помочь выявить и параметризовать семейства решений. В частности, в явном виде и точно можно выразить выбор: который из двух концов отрезка, которое из двух противоположных направлений, по которую сторону от оси и т. д.

Алгебраический подход в геометрии, и в частности векторный, помогает выявить и оценить качественно и количественно свойства, отношения и особенности, которые без него могут остаться незамеченными. Примером этому является определение вида некоторого числового результата по задающему его выражению — целый, рациональный, вещественный, со знаком или без. Так, формула площади треугольника через косое произведение прямо говорит, что если вершины любого многоугольника заданы в целочисленных координатах, то его площадь (разбиением на треугольники) будет либо целой, либо половиной целого, а если координаты рациональные, то такой будет и площадь.

«Координатную геометрию» как алгебраический аппарат геометрии удаётся в значительной степени заменить истинно геометрическим средством проведения вычислений и рассуждений, где выражения и уравнения обладают непосредственно геометрическим смыслом. И процесс составления выражений и уравнений в векторах, и сами они, по сравнению с координатными, намного более непосредственно выражают суть геометрических зависимостей.

Так как действия с векторами часто включают неявное манипулирование углами, уменьшается необходимость и в применении тригонометрии (которая так или иначе к геометрии имеет несколько косвенное отношение).

С применением векторного аппарата получение результатов становится более планомерным делом. В доказательствах и построениях на место изобретательства и озарений (дополнительные построения, косвенные пути к цели) приходят вычисления.

Рассуждения и построения вычислением:

- являются строгими — в отличие от неформальных рассуждений,
- состоят из немногих, чётко определённых элементов,
- поддаются механическому выполнению,
- проверяемы — рассуждение правильно, если вычисление является таким,
- легко реализуются в виде программ для компьютера.

Последнее из перечисленных обеспечивает естественную связь геометрии с информатикой. В более широком смысле, полноценным использованием векторов открывается возможность формулировать и решать задачи алгоритмического характера. Например, указать процедуру, которая по спискам вершин двух выпуклых многоугольников строит общую к ним касательную.

6. Дополнительные замечания

«Геометрческие числа», т. е. направленные геометрические количества в лице обобщённых чисел, появились в математике в XIX в. Наряду с векторами или подобными им понятиями рассматривались и направленные величины любой размерности. Тогда же появились и действия, эквивалентные или подобные косому произведению и перпу.

Однако присутствию векторов в планиметрии не повезло. Одна из породившихся моделей геометрического исчисления на основе направленных величин развилась исключительно в расчёте на применения в физике и поэтому оказалась преимущественно пространственной: это то, что сегодня знакомо как векторная алгебра и анализ. В них планиметрии уделяется мало внимания и поэтому и косое произведение, и перп отсутствуют. Другие, более общие модели геометрического исчисления, либо остались преимущественно алгебраическими, либо не нашли широкой поддержки. Таким образом, применение векторов в планиметрии осталось неразвитым. Помимо этого, даже тому ограниченному пониманию векторов, которое оказалось распространённым, пришлось мучительно пробивать себе путь в школьную геометрию.

Итак, с одной стороны, рассматриваемые в этой статье операции косого произведения и поворота на прямой угол не новые, а с другой, их практическое применение слабо развито. Его приходится выискивать по крупицам и прежде всего — развивать самому.

Автор занимался этим в связи с преподаванием вычислительной (алгоритмической) геометрии студентам и школьникам.[3] В случае последних было особо желательным избежать ссылок на матрицы, детерминанты и пр. реквизит традиционной аналитической геометрии, что и удалось благодаря продвинутому применению векторов. Накопленный при этом опыт позволяет считать, что усиленное присутствие аппарата векторов могло бы заметно улучшить изучение геометрии и в школе, и в вузах.

Понимание вектора как направленного отрезка критиковал в своё время с несколько иных позиций А. Д. Александров. В статье [1], а также в серии учебников, и до сегодня среди самых востребованных, он дал другое определение вектора, в какой-то степени схожее с нашим. Различные аспекты определения и изложения векторов в школьном курсе рассматривались и другими авторами.

В последние годы интенсивно развивается и популяризируется так называемая геометрическая алгебра — современное, конкретизированное для геометрии перевоплощение одной из алгебр Клиффорда, возрождающее подход многоразмерного геометрического исчисления. Однако по нашему мнению геометрическая алгебра, хотя и является инструментом более общим и мощным чем векторы, по сравнению с ними тяжеловата и менее интуитивна — для школы её вряд ли можно считать пригодной.

Литература

1. Александров А.Д. Так что же такое вектор? // Математика в школе. 1984. №.5. С. 39–46.
2. Банчев Б.Б. Vecta: программная библиотека для векторной арифметики. ИМИ, 2010. URL: `http://www.math.bas.bg/bantchev/vecta` (действительно к 9/2014).
3. Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М.: МЦНМО, 2004. 160 с.
4. Bantchev B.B. Calculating with vectors in plane geometry. // Proc. 37$^{\text{th}}$ Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, April 2008. pp. 261–267.

[3] Ранний вариант некоторых результатов был опубликован в [4], а [2] — программная реализация векторной арифметики.

VECTORS REVISITED

B.B. Bantchev
Assist. Prof., PhD, e-mail: boykobb@gmail.com

Institute of Mathematics and Informatics — BAS, Sofia, Bulgaria

Abstract. In school and college geometry, vectors are being defined in a questionable manner, and their very presence does not convince of its usefulness: as it is weakly related to the rest of the material, it remains, to a large extent, an end in itself. We show that vectors can be a much more substantial and useful tool of geometry, namely plane geometry — this pertaining not only to school and college levels. Proposed is a definition of vector that better suits the essence of the concept, as well as a more complete arithmetic of vectors. The latter allows the expression of important geometric properties and relations now mistakenly neglected in school and college, and so enables various kinds of otherwise unattainable calculations. Thus, the classic approach to geometry is harmonically complemented by calculational means. Applying vectors to proving theorems and solving problems is demonstrated on a number of examples.

Keywords: school and college geometry, vector arithmetic, application of vectors.