Математические структуры и моделирование
2014. №4(32). С. 100–104

УДК 519.71

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РОБОТОТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Б.И. Пякилля
аспирант, e-mail: pakillaboris@gmail.com

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Аннотация. В работе предложен метод получения математической модели линейного объекта на примере решения задачи идентификации управляемой робототехнической системы. Метод основан на применении частного случая преобразования Лапласа и численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: передаточная функция, робот, робототехническая система, идентификация, линейная система, преобразование Лапласа.

Введение

Проблема получения математической модели исследуемого объекта или системы имеет огромное теоретическое и практическое значение. Адекватная математическая модель, а, значит, и точное описание свойств объекта, позволяет понять и спрогнозировать его дальнейшее поведение, а также синтезировать оптимальное управление. Построение математической модели реального промышленного объекта на основе физических законов нередко осложнено невозможностью применения этих законов или их излишней сложностью. В инженерных приложениях часто возникает задача, когда имеется некоторый набор данных в виде массивов значений входных и выходных сигналов и на их основе требуется построить модель типа «вход-выход», используемую в дальнейшем для синтеза регуляторов. Для построения таких моделей используются методы идентификации систем, являющейся специальным разделом теории автоматического управления, и позволяющей на основе специальных алгоритмов получить математические модели динамических систем по данным наблюдений. В данной работе будет рассмотрена конкретная задача построения математической модели робототехнической системы, представленной в виде подвижного звена промышленного робота [1]. Выбор в качестве исследуемого объекта робототехнической системы обусловлен тем, что такие системы имеют большое значение для промышленного производства, а, значит, представляют интерес для теории автоматического управления и её приложений. Правильно построенная система автоматического управления на основе полученной математической модели робототехнической системы позволит оптимально управлять объектом с точки зрения быстродействия или затрат энергии, что приведёт к повышению эффективности производства.

Далее подробно опишем используемый метод идентификации, который будет использоваться для решения поставленной задачи.

1. Описание метода идентификации

Для получения математической модели был выбран метод идентификации, основанный на применении вещественного интерполяционного метода (ВИМ) [2,4,5], доказавшего свою эффективность и небольшие вычислительные затраты.

ВИМ принадлежит к методам, оперирующим с математическими описаниями в области изображений. Основой метода является вещественное интегральное преобразование:

$$F(\delta) = \int_0^\infty f(t)e^{-\delta t}\mathrm{dt}, \delta \in [C, \infty), C \geq 0, \tag{1}$$

где оригиналу $f(t)$ ставится в соответствие изображение $F(\delta)$, представленное как функция вещественной переменной δ. Формулу (1), являющуюся прямым преобразованием, можно рассмотреть как частный случай преобразования Лапласа, связанный с заменой переменной: комплексной $p = \delta + j\omega$ на вещественную δ.

Использование преобразования (1) для решения задачи идентификации, как и в базовом случае применения преобразования Лапласа, связано с определением передаточной функции $W(p)$ по известным сигналам входа $x(t)$ и выхода $y(t)$. Отличие заключается в переходе к вещественным изображениям $W(\delta)$, $X(\delta) = L\{x(t)\}$, $Y(\delta) = L\{y(t)\}$, $\delta \in [C, \infty), C \geq 0$. На основе этих моделей формируется уравнение $Y(\delta) = W(\delta)X(\delta)$, в котором присутствует искомая функция $W(\delta)$.

Далее, имея математическое выражение вида

$$W(\delta) = \frac{\int\limits_0^\infty y(t)e^{-\delta t}\mathrm{dt}}{\int\limits_0^\infty x(t)e^{-\delta t}\mathrm{dt}}, \tag{2}$$

можно найти вещественную передаточную функцию $W(\delta)$. Переход к передаточной функции по Лапласу осуществляется формальной заменой вещественной переменой δ на комплексную p в соответствии с рекомендациями [2, 4].

Практическое применение соотношения (2) требует ещё двух пояснений. Во-первых, в практических задачах входные и выходные сигналы $y(t)$, $x(t)$ заданы своими отсчётами $y(t_i)$, $x(t_i)$, $i = 1 \ldots n$. Эта особенность требует перехода в формуле (2) к численному интегрированию, что делается достаточно просто. Во-вторых, технология ВИМ использует численные расчёты. Поэтому по формуле (2) ищется предварительно так называемая численная характеристика:

$$\{W(\delta_i)\}_\eta = \{W(\delta_1), W(\delta_2), \ldots, W(\delta_\eta)\}, \ i = 1, ..., \eta,$$

которая является численной формой математического описания динамического объекта [2, 4], позволяя значительно сократить объем вычислений по сравнению с традиционными методами.

С учётом сказанного расчётная формула принимает вид:

$$W(\delta_i) = \frac{\int\limits_0^\infty y(t)e^{-\delta_i t}\mathrm{dt}}{\int\limits_0^\infty x(t)e^{-\delta_i t}\mathrm{dt}}, i = 1, ..., \eta. \tag{3}$$

Математическая модель в форме численной характеристики объекта управления и исходная непрерывная вещественная передаточная функция имеют однозначную связь [4]. Она устанавливается при помощи системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в которой количество неизвестных параметров $m + n$ равно количеству точек интерполяции η:

$$\begin{cases} W(\delta_1) = \dfrac{b_m\delta_1^m + b_{m-1}\delta_1^{m-1} + ... + b_1\delta_1 + b_0}{a_n\delta_1^n + a_{n-1}\delta_1^{n-1} + ... + a_1\delta_1 + 1}, \\ \quad\quad ... \\ \quad\quad ... \\ W(\delta_\eta) = \dfrac{b_m\delta_\eta^m + b_{m-1}\delta_\eta^{m-1} + ... + b_1\delta_\eta + b_0}{a_n\delta_\eta^n + a_{n-1}\delta_\eta^{n-1} + ... + a_1\delta_\eta + 1}. \end{cases}$$

При выполнении несложных условий СЛАУ имеет решение, и оно единственное [2, 4, 5].

Изложенные основы вещественного интерполяционного метода и его применения к задаче идентификации позволяют перейти к рассмотрению конкретной задачи получения математической модели и её решению.

Применение метода идентификации

За экспериментальные данные была взята переходная характеристика двухмассового подвижного звена робота IRB 1400 фирмы ABB [1]. Характеристика эта получена путём изменения управляющего момента вращения вала электродвигателя и записи с помощью датчиков полученной угловой скорости вращения звена. Наличие помех в измерительном тракте обуславливает её колебательный и «неровный» характер. Однако свойство ВИМ, а именно процедура самого вещественного интегрального преобразования (2, 3), позволяет получать адекватную математическую модель в условиях небольших помех измерений [3]. Вид характеристики представлен на рисунке 1. За математическую модель, адекватно описывающую поведение звена, выбрана передаточная функция:

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + k}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + 1},$$

где $n \leq 3$, $m < 3$.

Таблица 1. Результаты идентификации

$W_a(p)$	$\Delta h_{\%}$
$\dfrac{10}{0,015\,p+1}$	$24,59$
$\dfrac{0,051\,p+10}{8,4\cdot 10^{-7}\,p^2+0,024\,p+1}$	$17,52$
$\dfrac{-4,71\cdot 10^{-5}p^2+0,1p+10}{2,1\cdot 10^{-5}p^2+0,0325p+1}$	$21,84$
$\dfrac{0,07\,p+10}{4,03\cdot 10^{-8}\,p^3+8,1\cdot 10^{-6}\,p^2+0,02\,p+1}$	$19,5$
$\dfrac{0,0008\,p^2+0,03\,p+10}{5,3\cdot 10^{-7}\,p^3+0,0001\,p^2+0,02\,p+1}$	$9,9$

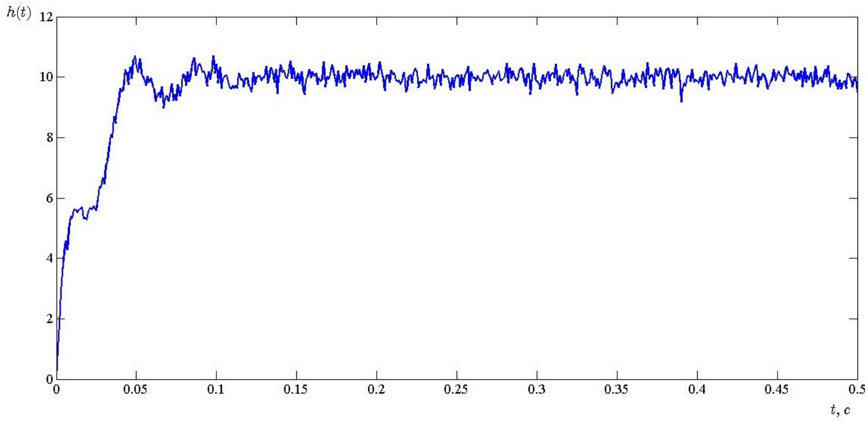

Рис. 1. Переходная характеристика подвижного звена

Выбор такого вида передаточной функции обусловлен возможностью представления исследуемого объекта в виде линейной системы без потери точности описания.

Используем предложенный алгоритм идентификации, основанный на использовании ВИМ. При проведении процедуры идентификации учтём, что нам известно конечное значение переходной характеристики, а, значит, и коэффициент усиления исследуемого объекта $k = 10$. За величину, характеризующую качество полученной модели, был взят критерий Чебышёва:

$$\Delta h_{\%} = \frac{\max\limits_{i\in[1,n]} |\, y_m(t_i) - y(t_i)\, |}{y_{\max}},$$

где $y_{\max}$ — максимальное значение выходного сигнала. Результаты идентификации при различных значениях порядка числителя и знаменателя представлены в виде таблицы 1.

Таким образом, наиболее точно двухмассовое подвижное звено описывается передаточной функцией с параметрами $n = 3$, $m = 2$.

Заключение

В результате проделанной работы была получена математическая модель робототехнической системы в виде передаточной функции третьего порядка, используя вещественный интерполяционный метод.

Литература

1. Måns Östring Identification, Diagnosis, and Control of a Flexible Robot Arm // Linköping Studies in Science and Technology. Thesis № 948, 2002.
2. Вещественный интерполяционный метод в задачах автоматического управления: учебное пособие / А.С. Алексеев, А.А. Антропов, В.И. Гончаров, С.В. Замятин, В.А. Рудницкий. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. 219 с.
3. Пякилля Б.И., Гончаров В.И. Идентификация линейной динамической системы при случайных возмущениях [Электронный ресурс] // Молодежь и современные информационные технологии: сборник трудов X Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. Томск, 13-16 Ноября 2012. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. С. 252–253.
4. Belikmaier M.Y., Goncharov V.I. Correctors for automatic control systems: Synthesis by uniform approximation // Automation and Control, 1997. N. 58(5). P. 715–721.
5. Goncharov V. Rudnicki V. Real interpolation method in automatic control systems self-adjustment problem // Systems Science. 2010. Vol. 36, N. 3. P. 35–37.

IDENTIFICATION OF ROBOT SYSTEM'S MATHEMATICAL MODEL

B.I. Pyakillya
Graduate Student, e-mail: pakillaboris@gmail.com

National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk

Abstract. In this paper a method of obtaining the linear mathematical models in case of robot system identification is presented. The method is based on special case of Laplace transform and numerical methods for the solution of linear algebraic equations.

Keywords: transfer function, robot, robot system, system identification, linear system, Laplace transform.