Математические структуры и моделирование
2015. № 1(33). С. 33–37

УДК 621.1.016:51-7

ОЦЕНКА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.П. Дмитриев
заведующий кафедрой физико-математического образования, к.ф.-м.н., доцент,
e-mail: dnp4@yandex.ru

Нижневартовский государственный университет

Аннотация. С помощью неравенства Бора, сплайнов Бернулли и теорем сравнения вычисляется оценка быстродействия ограниченных по норме комплекснозначных функций с эллиптической областью изменения производной второго порядка.

Ключевые слова: оценка быстродействия, неравенство Бора, сплайны Бернулли.

В работах [1, 2] были даны оценки быстродействия на классе действительных дифференцируемых функций с симметричными и несимметричными ограничениями на вторую производную. В данной статье получена оценка быстродействия комплекснозначных функций с несимметричными ограничениями на производную второго порядка, а именно, рассмотрен случай, когда область изменения производной второго порядка функций класса $\overline{W}^2$ ограничена эллипсом, у которого один из фокусов находится в начале координат.

Пусть $\overline{W}^2$ означает класс заданных на всей числовой прямой R комплекснозначных дифференцируемых функций $f(t)$ с абсолютно непрерывной производной $f'(t)$ на любом отрезке из R и существенно ограниченной производной второго порядка, причём

$$K = \|f\| = \sup|f(t)|, \quad L = \left\|f'\right\| = \sup\left|f'(t)\right|, \quad ess\sup\left|f''(t)\right| < \infty.$$

Областью изменения комплекснозначной функции $f(t)$ является центральный круг $||f|| \leq K$ радиуса K. Областью изменения производной второго порядка функций класса $\overline{W}^2$ является эллипс $(u+c)^2/a^2+v^2/b^2 = 1 \quad (c > 0,\ b^2 = a^2-c^2)$, где c — фокусное расстояние. Пусть $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2 = x_2+iy_2$ — контактные точки, являющиеся концами диаметра центрального круга $||f|| \leq K$.

Рассмотрим следующий вариант задачи быстродействия: оценить промежуток $T(f)$ изменения аргумента t, на котором процесс $f(t)$ переходит с контактной точки z_1 на точку z_2 и возвращается в точку z_1 при заданных ограничениях на области изменения самой функции $\|f\| \leq K$ и её производной $\left\|f'\right\| \leq L$.

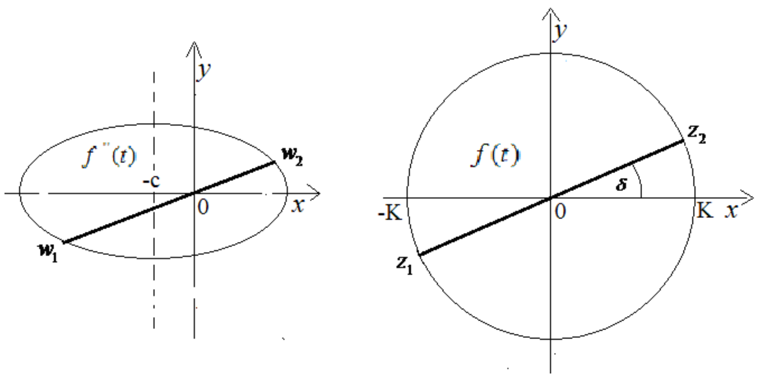

Рис. 1.

В теории приближения действительных функций хорошо известно неравенство Бора и его обобщение — неравенство Хермандера (см., напр. [5]), связывающие числа K, L, M, N:

$$L \leq 2\sqrt{K\frac{MN}{M+N}}, \tag{1}$$

где $M = ess\sup f''(t)$, $N = ess\inf f''(t)$ $(-\infty < t < \infty,\ 0 < M \leq N < \infty)$. В случае симметричных ограничений ($M = N$) на производную второго порядка неравенство (1) переходит в неравенство Адамара [4]

$$L \leq \sqrt{2KM}, \tag{2}$$

являющегося частным случаем широко известного неравенства Колмогорова [3].

Неравенства (1) и (2) точные, т.е. константы 2 и $\sqrt{2}$ нельзя уменьшить на классе действительных функций W^2. Экстремальными функциями в неравенстве (1) являются следующие функции:

$$s_2(t) = a(b_3(ct-d) - b_3(ct+d), \tag{3}$$

где $b_r(t)$ — известные сплайны Бернулли

$$b_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi\, r/2)}{k^r} \quad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

a, c, d — некоторые константы, подобранные так, чтобы удовлетворить заданной тройке чисел K, M, N. Таким образом, имеет место равенство:

$$\|s_1\| = 2\sqrt{\|s_2\|\,\frac{\sup\limits_t s_0(t)\cdot\Big(-\inf\limits_t s_0(t)\Big)}{\sup\limits_t s_0(t) - \inf\limits_t s_0(t)}} \tag{4}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} M\dfrac{t^2}{2} - K, & [-\theta,\ \theta); \\ \\ -N\dfrac{(t-\tau)^2}{2} + K, & [\theta,\ 2\tau - \theta), \end{cases} \tag{5}$$

где

$$\theta = 2\sqrt{\frac{KM}{N(M+N)}}, \quad \tau = 2\sqrt{\frac{K(M+N)}{MN}}. \tag{6}$$

Продолженную на всю числовую прямую с периодом 2τ функцию $s_2(t)$ будем обозначать тем же символом. Параметры θ, τ вычисленные по формулам (6), обеспечивают выполнение следующих заданных ограничений:

$$\|s_2\| = K, \quad \sup_t s_0(t) = \sup_t s_2^{''}(t) = M, \quad \inf_t s_0(t) = \inf_t s_2^{''}(t) = -N.$$

Легко подсчитать, что в этом случае

$$\|s_1\| = \left\|s_2^{'}\right\| = 2\sqrt{K\frac{MN}{M+N}}. \tag{7}$$

Это означает, что на сплайне $s_2(t)$ реализуется равенство в неравенстве (1), следовательно, и максимальное значение нормы производной функции $f(t) \in W^2$.

Рассмотрим функцию $\overline{s_2(t)} = s_2(t) \cdot e^{i\delta}$. Здесь параметр δ переводит отрезок $[-K, K]$, являющийся областью изменения действительной функции $s_2(t)$ на действительной прямой, в отрезок $[z_1, z_2]$, являющийся областью изменения комплекснозначной функции $\overline{s_2(t)}$ в комплексной плоскости. Тогда областью изменения производной второго порядка будет отрезок $[w_1, w_2]$, ($w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$) (см. рис.1). Пусть $y = kx$, ($k = tg\delta$) — уравнение прямой, проходящей через контактные точки z_1, z_2; $v = ku$ — уравнение соответствующей прямой, проходящей через точки w_1, w_2. По построению $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = K$, $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = K$.

Для решения поставленной задачи отметим следующее свойство эллипса, у которого фокус находится в начале координат.

Лемма. Пусть $2a$ — диаметр эллипса $b^2(u+c)^2 + a^2v^2 = a^2b^2$, $v = ku$ — уравнение прямой, проходящей через точки w_1, w_2 на этом эллипсе. Тогда при любом k справедливо равенство:

$$\frac{|w_1| + |w_2|}{|w_1| \cdot |w_2|} = 2a. \tag{8}$$

В самом деле, равенство (8) означает, в частности, что при любом наклоне хорды, стягивающей точки на эллипсе и проходящей через начало координат, левая часть этого равенства остаётся постоянной. Подставим в уравнение $v =$

ku эллипса замену и приведём к общему знаменателю: $(a^2-c^2)(u+c)^2+a^2k^2u^2 = a^2(a^2-c^2)$. После несложных преобразований получаем:

$$u_1 = \frac{-(a^2c-c^3)-(a^3-ac^2)\sqrt{1+k^2}}{(1+k^2)a^2-c^2}, \quad u_2 = \frac{-(a^2c-c^3)+(a^3-ac^2)\sqrt{1+k^2}}{(1+k^2)a^2-c^2}$$

$$v_1 = ku_1, \quad v_2 = ku_2$$

$$|w_1| = \frac{(a^3-ac^2)(1+k^2)+(a^2c-c^3)\sqrt{1+k^2}}{(1+k^2)a^2-c^2},$$

$$|w_2| = \frac{(a^3-ac^2)(1+k^2)-(a^2c-c^3)\sqrt{1+k^2}}{(1+k^2)a^2-c^2}.$$

Подставляя в (8) полученные выражения, убеждаемся в его справедливости.

Из равенства (4) непосредственно вытекает, что при фиксированных значениях норм $\|\overline{s_1}\|$, $\|\overline{s_2}\|$ выражение

$$\frac{\sup\limits_t \overline{s_0(t)} \cdot (-\inf\limits_t \overline{s_0(t)})}{\sup\limits_t \overline{s_0(t)} - \inf\limits_t \overline{s_0(t)}} \tag{9}$$

сохраняет постоянное значение. Сравнивая с (8), приходим к следующему утверждению.

Теорема. Пусть $f \in \overline{W}^2$, причём

$$\|f\| \le \|\overline{s_2}\| = K, \quad \left\|f'\right\| \le \|\overline{s_1}\| = L.$$

Кроме того, пусть z_1, z_2 — контактные точки, являющиеся концами произвольного диаметра центрального круга $\|f\| \le K$. Тогда справедлива следующая оценка быстродействия функции из этого класса:

$$T(f) \ge \frac{8K}{L}. \tag{10}$$

Действительно, если в качестве оценки быстродействия функции $f \in \overline{W}^2$ взять длину периода функции сравнения $s_2(t)$, то нетрудно подсчитать, что

$$T(\overline{s_2}) = 4\sqrt{K\frac{M+N}{MN}} = 4\sqrt{K\frac{4K}{L^2}} = \frac{8K}{L}.$$

С учётом инвариантности формы (9) из приведённой выше леммы, а также из неравенства (1) и теоремы сравнения [2] относительно функций с несимметричными ограничениями для производной второго порядка следует, что при любом расположении контактных точек на концах диаметра окружности $\|f\| = K$ справедлива оценка (10).

Литература

1. Дмитриев Н.П. Оценка быстродействия динамического процесса на классе дифференцируемых функций с ограничениями // Вестник Нижневартовского гос. гуманит. ун-та. 2011. № 3. С. 6–9.
2. Дмитриев Н.П. Оценка быстродействия динамического процесса на классе дифференцируемых функций с несимметричными ограничениями // Информ. ресурсы в образовании. Материалы Междунар. конф. в Нижневартовске, 12-19 апр, 2013. С. 153-156.
3. Колмогоров А.Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Учен. зап. Моск. Университета. 1938. Вып. 30. Математика. Кн. 3. С. 3–16.
4. Hadamard J. Sur le module maximum d'une function et de ses derives // Soc. Math. France. Comptes rendus des Seanses. 1914. N. 41. P. 68–72.
5. Hörmander L. A new proof and generalization of an inequality of Boor // Math. Scand. 1954. V. 2, N. 1. P. 33–45.

OPTIMAL TIME EVALUATION FOR THE COMPLEX-VALUED FUNCTIONS WITH AN ELLIPTICAL RANGE OF THE SECOND DERIVATIVE

N.P. Dmitriev
Associate Professor, Ph.D. (Math), e-mail: dnp4@yandex.ru

Nizhnevartovsk State University

Abstract. Using Bohr's inequality, Bernoulli splines and comparison theorems, minimal time for complex-valued functions limited by the norm and having elliptical range of the second derivative in time-optimal problems is estimated.

Keywords: performance evaluation, Bohr's inequality, Bernoulli splines.